Esercizi di Calcolo e Biostatistica con soluzioni

1. Avete due scatole uguali contenenti ciascuna 5 palline, 3 bianche e 2 nere. Se estraete, senza guardare, una pallina da ogni scatola, quanto vale la probabilità di estrarre una pallina bianca e una nera? Quanto vale la probabilità di estrarre due palline bianche oppure due palline nere?

Soluzione. Se le palline non sono truccate, la probabilità di estrarre una pallina bianca (B) vale $p(B) = 3/5$, mentre quella di estrarre una pallina nera (N) vale $p(N) = 2/5$. La probabilità di estrarre una pallina bianca da una scatola non influenza l'estrazione della seconda pallina, quindi possiamo supporre che le estrazioni siano eventi siano **indipendenti**. Quindi la probabilità di estrarre una pallina bianca da una scatola e una nera dall'altra, che è l'evento $B \cap N$, vale $p(B \cap N) = p(B)p(N) = (3/5)(2/5) = 6/25 = 0.24$: questo evento ha il 24% di probabilità di realizzazione.
La probabilità di estrarre una pallina bianca da ogni scatola, che è l'evento $B \cap B$, vale invece $p(B \cap B) = p(B)p(B) = (3/5)^2 = 9/25 = 0.36$, mentre quella di estrarre una pallina nera da ogni scatola, che è l'evento $N \cap N$, vale $p(N \cap N) = p(B)p(N) = (2/5)^2 = 4/25 = 0.16$. Per l'assioma della somma, la probabilità di estrarre due palline bianche oppure due palline nere e' quindi

$$p[(B \cap B) \cup (N \cap N)] = p(B \cap B) + p(N \cap N) = (9/25) + (4/25) = 13/25 = 0.52 :$$

c'è il 52 percento di probabilità di di estrarre due palline bianche oppure due palline nere.

2. Andate con un amico al bar e con lui decidete che il conto sarà pagato da quello che pesca la carta più bassa da un mazzo formato solo da tutte le carte di cuori. Il vostro amico pesca un 5 e non rimette la carta nel mazzo: che probabiltà avete di non pagare il conto? Motivare la risposta.

Soluzione. Le carte di cuori sono 13. Se il vostro amico ha estratto un 5 e non rimette la carta nel mazzo, per vincere voi dovete estrarre una carta maggiore di 5 da un mazzo di 12. Le carte maggiori di 5 in questo mazzo sono 8, quindi la probabilià di non pagare il conto (l'evento NP=non pago) vale $p(NP) = 8/12 = 2/3 \approx 0.67$.

3. Si lanciano due dadi. Con che probabilità il 6 non compare su nessuno dei due dadi? Con che probabilità sui due dadi escono numeri diversi?

Soluzione. L'evento "*non esce 6*" è equivalente all'evento E="*esce 1, 2, 3, 4 oppure 5 nel lancio di un dado*". L'evento E ha probabilità $p(E) = 5/6(= 1 - 1/6)$ che è la probabilità che esca un risultato qualunque tranne 6. La realizzazione dell'evento E, non influenza il risultato del lancio dell'altro dado, quindi i due risultati sono eventi indipendenti. La probabilità che il 6 non esca su nessuno dei due dadi si calcola allora con la regola del prodotto

$$p(E \cap E) = (5/6)^2 = 25/36 \approx 0.69$$

Per rispondere alla seconda domanda, osserviamo che lo spazio degli eventi che ci interessano e' composto da 15 elementi (che sono tutte le coppie formate da due risultati diversi scelti da 1 a 6); ogni coppia ha probabilita' di realizzazione uguale a 1/6(1/6)=1/36, quindi la probabilita' con cui si hanno due risultati diversi sui due dadi vale 15/36=5/12.

4. Sulla moneta da 1 euro c'è un 1 su una faccia. Con che probabilità lanciando una moneta da 1 euro e un dado esce 1 su tutti e due?

Soluzione. Il risultato del lancio della moneta non influenza quello del lancio del dado, quindi, visto che la probabilità che lanciando una moneta da 1 euro esca 1 è $p(1_M) = 1/2$ mentre la probabilità che lanciando un dado esca 1 è $p(1_D) = 1/6$, si ha

$$p(1_M \cap 1_D) = (1/2)(1/6) = 1/12 \approx 0.08.$$

5. Si estraggono due carte in sequenza da un mazzo di 52, senza rimettere la prima nel mazzo dopo averla estratta. Con che probabilità si estraggono 2 assi?

Soluzione. La probabiltà di estrarre un asso (A) da un mazzo di 52 carte è $p(A) = 4/52 = 1/13 \approx 0.08$ (nel mazzo ci sono 4 assi).

Alla seconda estrazione nel mazzo ci sono 51 carte, e ci sono 3 assi, se alla prima estrazione è uscito un asso, altrimenti gli assi sono 4. Quindi la probabilità di estrarre un asso la seconda volta (A_2) vale $p(A_2) = 3/51$ nel primo caso, $p(A_2) = 4/51$ nel secondo caso.
Ma l'evento a cui siamo interessati è E="*estraggo un asso la prima volta e un asso la seconda*", quindi

$$p(E) = (1/13)(3/51) = 1/221 \approx 0.005$$

6. Lanciate un dado due volte e qualcuno vi dice che la somma dei due risultati che avete ottenuto è maggiore di 7. Con che probabilità i risultati dei due lanci erano uguali?

Soluzione. Indichiamo con A l'evento "*la somma dei due risultati è maggiore di 7*" e con B l'evento "*i due risultati sono uguali*". La probabilità da calcolare è

$$p(B|_A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \tag{$*$}$$

La probabilità che lanciando un dado due volte la somma dei risultati superi 7 si può realizzare con le seguenti uscite

primo lancio	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
secondo lancio	**6**	**5 o 6**	**4 o 5 o 6**	**3 o 4 o 5 o 6**	**2 o 3 o 4 o 5 o 6**

Contando tutte le possibilità si vede che sono 15; ognuna ha probabilità 1/36 di realizzarsi (ad esempio la probabilità che esca 2 al primo lancio e 6 al secondo vale 1/36, quella che esca 3 al primo lancio e 5 al secondo oppure 6 vale 2/36 e così via). In definitiva $p(A) = 15/36 = 5/12 \approx 0.42$.
L'evento B invece si realizza in 6 modi distinti (1 al primo lancio e 1 al secondo, 2 al primo lancio e 2 al secondo ecc.), e ognuno di questi eventi ha probabilità 1/36, quindi $p(B) = 6/36 = 1/6 \approx 0.17$. Infine la realizzazione di A e **anche** di B ($A \cap B$) è l'evento esce 4 e 4 oppure 5 e 5 oppure 6 e 6, e questo evento si realizza in 3 modi su 36. Sostituendo nella (*) si ha

$$p(B|_A) = \frac{3/36}{5/12} = \frac{1}{5} = 0.2.$$

Ritroviamo lo stesso risultato ragionando nel modo seguente:
l'evento $B|_A$ significa che tra tutti i risultati che si devono ottenere lanciando un dado due volte solo i 15 della tabella. Dei 15, solo 3 sono quelli con uscite uguali, quindi $p(B|_A) = 3/15 = 1/5 = 0.2$, come abbiamo già ottenuto.

7. Da un mazzo di 40 carte formato dalle carte da 1 a 10 dei semi cuori, quadri, fiori e picche si estraggono 2 carte in successione. Se la prima carta estratta viene rimessa nel mazzo, con che probabilità entrambe le carte sono di fiori? Se la prima carta estratta non viene rimessa nel mazzo, con che probabilità entrambe le carte sono di fiori?

Soluzione. Nel mazzo ci sono 10 carte di fiori su 40, quindi una carta di fiori ha probabilità $p(F) = 1/4$ di essere estratta. Se la prima carta estratta viene rimessa nel mazzo, la probabilità che entrambe le carte siano di fiori è $p(F \cap F) = p(F)p(F) = 1/16$, visto che la prima estrazione non influenza la seconda.
Se invece la prima carta estratta non viene rimessa nel mazzo, la probabilità entrambe le carte siano di fiori è data da $p(F \cap F|F) = (1/4)(9/39) \approx 0.058$, visto che alla seconda estrazione nel mazzo rimangono 39 carte di cui 9 sono di fiori.

8. In una famiglia con 4 figli di entrambi i sessi, con che probabilità al più uno dei figli è maschio? (Assumere che la probabilità della nascita di un maschio sia la stessa di quella della nascita di una femmina).

Soluzione. L'affermazione "*al più uno dei figli è maschio* significa che i figli sono o tutti e 4 di sesso femminile oppure uno è maschio e gli altri 3 sono femmine.
Se la probabilità di trovare un maschio in una famiglia è la stessa di quella con cui si trova una femmina, si ha $p(M) = p(F) = 1/2$ e quindi la probabilità di trovare 4 femmine vale $p(FFFF) = p(F \cap F \cap F \cap F) = 1/16$.

L'evento E="*un figlio è maschio e gli altri 3 sono femmine*" si realizza in 4 modi: FFFM (il maschio è nato per ultimo dopo 3 femmine), FFMF (il maschio è nato per penultimo dopo 2 femmine), FMFF ((il maschio è nato per secondo dopo 1 femmina), MFFF (il maschio è nato per primo). Ognuno di questi eventi ha probabilità 1/16, quindi si ha $p(E) = 4/16 = 1/4$. In definitiva l'evento A="*al più uno di 4 figli è maschio* ha probabilità

$$p(A) = 1/16 + 1/4 = 5/16 \approx 0.31$$

9. In una scatola, che contiene 10 pezzi di ricambio di un apparecchio, scoprite che 2 sono difettosi. Se estraete a caso, e insieme, 2 pezzi dalla scatola, con che probabilità al più uno dei due è difettoso?

Soluzione. Se indichiamo con D l'evento "*uno dei 10 pezzi della scatola è difettoso*", visto che di pezzi difettosi ce ne sono 2 si ha $p(D) = 1/5$ (mentre se ND e' l'evento *il pezzo non e' difettoso*" si ha $p(ND) = 1 - 1/5 = 4/5$).
Estraendo 2 pezzi dalla scatola avete varie possibilità:

$E_1 = D \cap ND$="*uno è difettoso, l'altro funziona*"
$E_2 = D \cap D$="*uno è difettoso, l'altro anche*"
$E_3 = ND \cap ND$="*uno funziona, l'altro anche*"

Visto che il fatto che un pezzo sia difettoso (o funzioni) non ha influenza sulla qualità dell'altro pezzo, si ha $p(E_1) = (1/5)(4/5) = 4/25$, $p(E_2) = (1/5)(1/5) = 1/25$, $p(E_3) = (4/5)(4/5) = 16/25$.
L'evento di cui dobbiamo calcolare la probabilità è l'evento E="*al più uno dei due è difettoso* che si realizza se si realizza E_3 oppure E_1, quindi

$$p(E) = p(E_1 \cup E_3) = (4/25) + (16/25) = 20/25 = 0.8$$

(Come cambiano i valori di probabilità se i due pezzi sono estratti in successione dalla scatola?)

10. Un amico vi propone di scommettere su uno dei due giochi seguenti:
GIOCO 1: lanciate un dado e, se il risultato è pari, lanciate una moneta: Si vince se esce pari/testa
GIOCO 2: lanciate un dado e, se il risultato supera 4, dovete estrarre una carta da un mazzo di 52. Si vince se il risultato del lancio supera 4 e se la carta è rossa.
A quale gioco vi conviene giocare?

Soluzione. GIOCO 1. Nel lancio di un dado i risultati pari (P) sono 3 su 6, quindi $p(P) = 1/2$. Nel lancio di una moneta l'uscita di testa (T) ha probabilità $p(T) = 1/2$. A questo gioco si vince (V) con probabilità $p(V) = (1/2)(1/2) = 1/4 = 0.25$.
GIOCO 2. Nel lancio di un dado i risultati maggiori di 4 sono 5 oppure 6. Se E è questo evento, $p(E) = 2/6 = 1/3$. In un mazzo di 52 carte ce ne sono 26 rosse (R), quindi $p(R) = 1/2$. A questo gioco si vince con probabilità $p(E)p(R) = (1/3)(1/2) = 1/6 \approx 0.17$.
In definitiva conviene giocare al primo gioco: c'è più probabilità di vincere.