Corso di Calcolo e Biostatistica – (Esame del 05.02.14)

COMPITO A

1) Studiare il grafico della funzione

$$y = f(x) = \frac{1}{x-2} + \frac{x}{4} \ ,$$

indicando in particolare: il dominio di definizione, gli eventuali asintoti, gli intervalli di crescenza e decrescenza e gli eventuali punti di massimo e minimo relativo ed assoluto. Si scriva inoltre l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x = 1$.

Soluzione: il dominio della funzione è l'insieme della retta reale $D = \{x \in \mathbf{R}, \ x \neq 2\}$.
Se $x \to 2$, la prima delle due frazioni diverge, mentre la seconda converge a $1/2$, quindi complessivamente si ha

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$$

e la retta verticale di equazione $x = 2$ è un asintoto (verticale) per il grafico della funzione.
Se $x \to \infty$ la prima frazione converge a zero mentre la seconda diverge, quindi non ci sono asintoti orizzontali per il grafico della funzione.

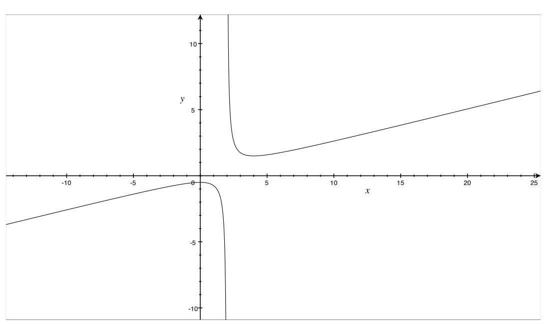
Per studiare l'andamento della funzione nel dominio calcoliamo la derivata prima. Si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} + \frac{1}{4} = \frac{x^2 - 4x}{4(x-2)^2}$$

e il segno di $f'(x)$ dipende solo da quello del numeratore, visto che il denominatore è positivo. In particolare si ha

- $f'(x) = 0$ e la funzione non cresce nè decresce se $x = 0$ oppure se $x = 4$;
- $f'(x) > 0$ e la funzione cresce se $x < 0$ oppure se $x > 4$;
- $f'(x) < 0$ e la funzione decresce se $0 < x < 4$.

Dalle ultime due affermazione si deduce anche che il punto $A = (0, -1/2)$ è un punto di massimo, mentre $B = (4, 3/2)$ è di minimo.
Tenendo conto di tutti i risultati, il grafico della funzione è



Nel punto di ascissa $x = 1$ si ha $f(1) = -1/4$ mentre si ha $f'(1) = -3/4$ e quest'ultimo valore è il coefficiente di inclinazione della retta tangente il grafico di $f(x)$ nel punto di ascissa 1. La retta ha quindi equazione $y = -3x/4 + c$. per calcolare c imponiamo che passi per $P = (1, -1/4)$. In definitiva la retta ha equazione

$$y = -\frac{3x}{4} + \frac{1}{2}$$

2) Sono assegnati i vettori del piano $\mathbf{u} = (2, 1)$, $\mathbf{v} = (3, 2)$, $\mathbf{w} = (1, 1)$.
i) Scrivere l'equazione della retta ortogonale a $\mathbf{u}$ e passante per il punto P di coordinate $(0, 1)$.
ii) Trovare (se esistono) due numeri reali x e y tali che $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} = \mathbf{w}$.
iii) Trovare (se esiste) il valore del parametro reale λ per il quale $\mathbf{k} = \mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ è parallelo a $\mathbf{w}$.

Soluzione: *i)* la retta ortogonale (o perpendicolare) a quella che contiene il vettore $\mathbf{u}$ ha inclinazione uguale a -2.
Per convincersi di questo fatto basta ricordare che l'inclinazione della retta che contiene $\mathbf{u}$ è $1/2$, e se $\mathbf{u}^{\perp} = (x, y)$ deve essere ortogonale a $\mathbf{u}$ si deve avere $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^{\perp} = 2x + y = 0$ (il prodotto scalare deve essere 0) e quindi deve essere $y = -2x$. Allora il vettore $\mathbf{u}^{\perp}$ deve avere componenti $(x, -2x)$ e la sua direzione è -2.
La retta richiesta ha equazione $y = -2x + c$ e per trovare c basta imporre che questa retta passi per $P = (0, 1)$. Si ha quindi $y = -2x + 1$.

ii) Scritta per componenti la relazione $x\mathbf{u} + y\mathbf{v} = \mathbf{w}$ diventa

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \tag{1}$$

Questo sistema lineare, nelle incognite x e y, ha una sola soluzione se il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero. Visto che si ha

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$$

il sistema ha una sola soluzione. Risolvendo per sostituzione si trova che questa soluzione è $x = -1$ e $y = 1$.

iii) Scritta per componenti la relazione $\mathbf{k} = \mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ dice che il vettore $\mathbf{k}$ ha componenti

$$\mathbf{k} = (2 + 3\lambda, 1 + 2\lambda)$$

e la direzione di questo vettore è

$$m_k = \frac{1 + 2\lambda}{2 + 3\lambda}.$$

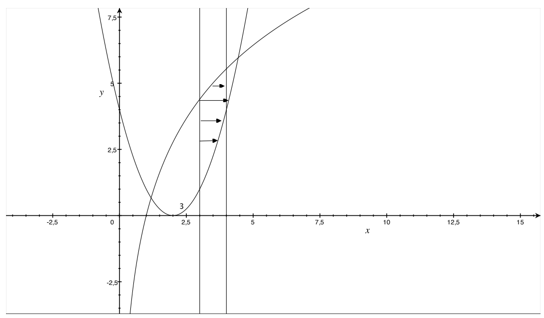
Il vettore $\mathbf{w}$ ha direzione 1 e $\mathbf{k}$ è parallelo a $\mathbf{w}$ se si ha

$$m_k = \frac{1+2\lambda}{2+3\lambda} = 1$$

e quindi se $\lambda = -1$.

3) Calcolare l'area della regione del piano delimitata dalle rette di equazione $x = 3$ ed $x = 4$ e dai grafici delle funzioni $f(x) = 4\log x$ e $g(x) = (x-2)^2$. (N.B. $f(x) = 4\log x = 4\ln x$)

Soluzione: i grafici delle funzioni assegnate sono



e l'area da calcolare è quella indicata con le frecce. L'area è

$$\int_3^4 [4\ln x - (x-2)^2]dx = \int_3^4 4\ln x dx - \int_3^4 (x-2)^2 dx = [4(x\ln x - x) - \frac{(x-2)^3}{3}]\Big|_3^4 =$$

$$= 4(\ln 4^4 - \ln 3^4) - \frac{19}{3}.$$

4) Una ditta produce un modello di lavatrice che è soggetta a due possibili difetti: un difetto C della centralina elettronica ed un difetto M del motore. Il difetto C si presenta nel 10% dei pezzi prodotti e, indipendentemente da questo, il difetto M si presenta nel 5% delle lavatrici.
Se si considera un campione di 1000 lavatrici, con quale frequenza si riscontreranno i difetti C e M?
Se si considera un campione di 500 lavatrici, quelle che non hanno il difetto C vengono vendute a 450 euro, quelle con il difetto C, dopo averle riparate, vengono vendute a 300 euro. A quanto viene venduto, in media ogni pezzo? Se la produzione di una lavatrice costa alla ditta 180 euro, quanto guadagna la ditta su 500 pezzi?

Soluzione: in un campione di 1000 lavatrici la frequenza con cui si troverà il difetto C è del 10%=1/10, quindi saranno danneggiati 100 pezzi. Il difetto M si troverà invece in 50 lavatrici.

In un campione di 500 lavatrici 50 hanno il difetto C mentre 450 non lo hanno. Quindi il prezzo medio in euro delle lavatrici di questo campione è

$$M = \frac{50(300) + 450(450)}{500} = \frac{15000 + 202500}{500} = 435$$

Su una lavatrice con il difetto C la ditta guadagna 120 euro, su una senza difetto guadagna 270 euro; quindi su un campione di 500 pezzi la ditta guadagna in media

$$G = \frac{120(50) + 270(450)}{500} = \frac{6000 + 121500}{500} = 255 \text{euro}$$

su ogni pezzo.