

## Esercizi di Calcolo e Biostatistica

La soluzione di questo esercizio è, nelle parti qualitative, solo indicativa e serve a capire se le risposte date sono corrette.

### LIEVITI

Il vostro laboratorio si occupa di *Saccharomyces cerevisiae* (o "lievito della birra")

**1. Quali sono le caratteristiche dell'organismo in studio? Perché è interessante studiare questo organismo?**

*Saccharomyces cerevisiae* è un organismo unicellulare osmofilo, cioè adattato alla vita in ambienti ad alta pressione osmofila come quelli con alte concentrazioni di zuccheri semplici. Appartiene al regno dei funghi e una delle caratteristiche che lo contraddistinguono è la riproduzione per gemmazione in cui, sulla cellula madre, si forma una protuberanza, detta "gemma" che, dopo un certo tempo si stacca per dare origine ad una nuova cellula. In definitiva, in assenza di mortalità, il processo è di duplicazione. *Saccharomyces cerevisiae* è uno dei lieviti più importanti nell'alimentazione umana perché è responsabile di molti processi di fermentazione, ad esempio quello che si realizza nella preparazione del pane o nella produzione della birra e del vino.

(da Wikipedia)

**2. Tenendo conto delle caratteristiche riproduttive di *Saccharomyces c.* è corretto descrivere la numerosità delle colonie con la legge esponenziale  $C(t) = C_0 2^t$ , con  $t$  numero delle generazioni? Motivare la risposta.**

Visto che la riproduzione avviene per gemmazione (da una cellula viene prodotta un'altra cellula, da 2 vengono prodotte altre 2, per un totale di 4, da 4 vengono prodotte 4 cellule per un totale di 8 ecc.) la legge che governa la numerosità è di tipo "raddoppio" e quindi, in assenza di mortalità, la legge  $C(t) = C_0 2^t$  è adatta a descrivere l'evoluzione di questo organismo.

**3. In una colonia che inizia  $C_0 = 10^5$  cellule di *Saccharomyces c.*, quante cellule ci sono, in media, in 5 generazioni? Dopo quante generazioni il valore della numerosità è il valore medio?**

Per rispondere a questa domanda ricordiamo che il valore medio di una funzione si calcola nel modo seguente

$$C_M = (1/t) \int_0^t C(t) dt$$

Nel caso in cui  $C(t) = 10^5 2^t$  e  $t \in [0, 5]$  si ha

$$C_M = (10^5/5) \int_0^5 2^t dt = (10^5/5)(1/\ln 2) 2^t \Big|_0^5 = (10^5/5)(31/\ln 2) \approx 9 \cdot 10^5$$

Si può osservare che si ha  $C(t) = 10^5 (2^t) = C_M = 9(10^5)$  se  $2^t = 9$  e quindi se  $t = \log_2 9 = (\ln 9)/(\ln 2) \approx 3$ : la numerosità media è raggiunta alla terza generazione circa.

**4. In una colonia che inizia  $C_0 = 10^5$  cellule, alla fine della prima generazione si osservano, secondo la stima teorica,  $C(1) = 2 \cdot 10^5$  cellule, alla fine della seconda  $C(2) = 4 \cdot 10^5$ , alla fine della terza  $C(3) = 8 \cdot 10^5$ , alla fine della quarta  $C(4) = 16 \cdot 10^5$  e alla fine della quinta  $C(5) = 32 \cdot 10^5$ . Quante cellule si osservano in media in queste 6 osservazioni? Di quanto il risultato differisce da quello della risposta precedente? Come mai si osserva questa differenza? Motivare la risposta**

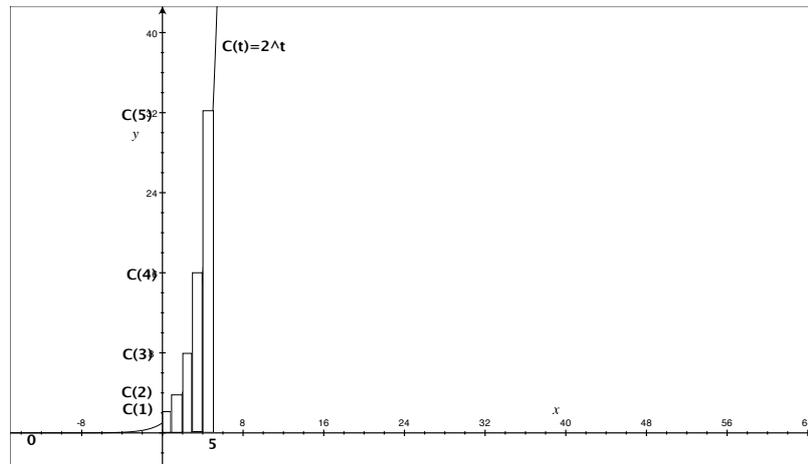
La media aritmetica dei dati precedenti vale

$$M = \frac{C(1) + C(2) + C(3) + C(4) + C(5)}{5} = \frac{(2 + 4 + 8 + 16 + 32)10^5}{5} = \frac{62}{5} 10^5 = 12.4(10^5)$$

Visto che

$$9(10^5) = (10^5)[12.4 - x/100(12.4)] = (10^5)(12.4)(1 - x/100)$$

si ricava che  $x/100 \approx 0.275$ : la media aritmetica è superiore del 27.5% circa rispetto alla media  $C_M$ . Il motivo per cui risultato è sovrastimato si comprende considerando la figura



La media  $C_M$  per l'ampiezza dell'intervallo di base, che vale 5, è l'area della parte di piano compresa tra la figura e il grafico della funzione, mentre  $5M$  è la somma delle aree delle parti rettangoli (più grandi) che hanno come altezza i valori  $C(1), \dots, C(5)$

5. Se la legge che descrive la variazione della numerosità nel tempo è  $C(t) = 10^5 a^t$ , con  $a = 1 + (1 - m) = 2 - m$  dove  $m$  = tasso di mortalità, e sapendo che dopo 3 generazioni osservate  $C(3) = 6 \cdot 10^5$  cellule (invece delle  $8 \cdot 10^5$  previste dalla legge di duplicazione), quanto vale  $a$  e quindi  $m$ ?

Per calcolare il tasso di mortalità si deve risolvere l'equazione

$$C(3) = 6 \cdot 10^5 = 10^5 a^3$$

cioè  $a^3 = 6$  e quindi  $a = \sqrt[3]{6} \approx 1.82$ . Visto che  $a = 2 - m = 1.82$  si ha che  $m = 0.18$ : il tasso di mortalità è del 18% circa.