Esercizi di Calcolo e Biostatistica 11con soluzioni

1. Date le funzioni composte $f_1(x) = F(g(x)) = \ln(2 - 2x^2)$, $f_2(x) = H(h(x)) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$, dire come sono definite le funzioni F, g, H e h.
Qual è il dominio delle funzioni f_1 e f_2? Calcolare $f_1(0)$ e $f_2(0)$.
Scrivere le funzioni $g(F(x))$ e $h(H(x))$.

Soluzione. La funzione $f_1(x) = F(g(x)) = \ln(2 - 2x^2)$ è composta dalla funzione di secondo grado $g(x) = 2 - 2x^2$ e dalla funzione $F(x) = \ln x$; la funzione $f_2(x) = H(h(x)) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$ è composta dalle funzioni $h(x) = x^2 + 1$ e dalla funzione $H(x) = \sqrt[3]{x}$.

La funzione $g(x)$ è sempre definita, la funzione $F(x)$ è definita solo se il suo argomento è positivo, quindi $f_1(x) = F(g(x)) = \ln(2-2x^2)$ è definita per quei valori di x per cui si ha $2(1-x^2) > 0$ e quindi se $-1 < x < 1$.
La funzione $f_2(x)$ è sempre definita visto che sia $h(x)$ che $H(x)$ sono sempre definite.

Si ha $f_1(0) = \ln 2$ e $f_2(0) = 1$.

La funzione $g(F(x))$ è definita da $g(F(x)) = 2 - 2(\ln x)^2$, mentre è $h(H(x)) = (\sqrt[3]{x})^2 + 1 = x^{2/3} + 1$.

2. Nello studio di un gruppo di organismi presenti in un certo ambiente, si rileva che la numerosità di una popolazione varia con la legge

$$N(t) = \frac{54}{1 + 5e^{-t}},$$

dove t è misurato in anni. Quanti organismi ci sono al tempo $t = 0$? Quanti organismi ci sono in media nell'intervallo di tempo $[0, 4]$?
Aspettando un tempo molto lungo, da quanti organismi risulterebbe composta la popolazione? Quale andamento ha nel tempo la numerosità? Esiste un istante in cui la popolazione è raddoppiata rispetto al valore iniziale? Se la risposta è positiva, qual'è questo tempo? Esiste un istante in cui la popolazione raggiunge la numerosità massima possibile? Se la risposta è positiva, qual'è questo tempo?
Disegnare in un piano $(t, N(t))$ il grafico della funzione $N(t)$.

Soluzione. Si ha $N(0) = 54/(1 + 5) = 9$. Per conoscere la numerosità media nell'intervallo $[0, 4]$ bisogna calcolare il valore dell'intergrale

$$\int_0^4 \frac{54}{1 + 5e^{-t}} dt.$$

Si ha

$$\int_0^4 \frac{54}{1 + 5e^{-t}} dt = 54 \int_0^4 \frac{e^t}{e^t + 5} dt.$$

Se si osserva che la derivata di $f(t) = e^t + 5$ vale $f'(t) = e^t$, l'integrale da calcolare è del tipo $\int \frac{f'(t)}{f(t)} dt = \ln(f(t)) + c$, quindi si ha

$$54 \int_0^4 \frac{e^t}{e^t + 5} dt = 54[\ln(e^4 + 5) - \ln 6] \approx 54(4.12 - 1.79) \approx 126.$$

Il valore medio di $N(t)$ nell'intervallo $[0, 4]$ è

$$\frac{1}{4} \int_0^4 \frac{54}{1 + 5e^{-t}} dt \approx 31$$

(Tutti i risultati sono stati approssimati all'intero piu' vicino).

La numerosita' asintotica della popolazione è data da

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = 54$$

(il grafico della funzione $N(t)$ ha un asintoto orizzontale di equazione $N = 54$).

La numerosita' è raddoppiata per il valore di t per cui si ha $N(t) = \frac{54}{1+5e^{-t}} = 2N(0) = 18$. Bisogna risolvere, rispetto a t, l'equazione

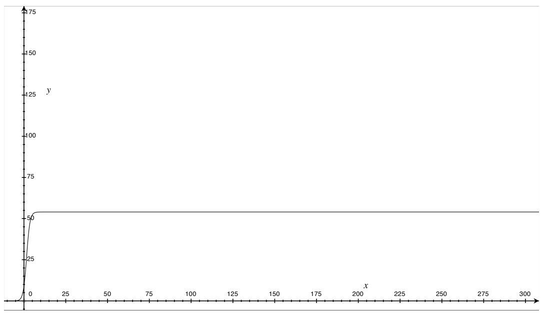
$$\frac{54}{1+5e^{-t}} = 18 \;\Rightarrow\; \frac{3}{1+5e^{-t}} = 1.$$

L'equazione si riscrive nella forma $3e^t = e^t + 5$, cioe' $2e^t = 5$, e la soluzione e' data da $t = \ln 5/2 \approx 0.92 \approx 1$: dopo un po' meno di un'ora la popolazione è raddoppiata.

Per sapere se la funzione $N(t)$ ha un massimo bisogna:
(a) calcolare $N'(t)$,
(b) risolvere rispetto a t l'equazione $N'(t) = 0$,
(c) detta T^* la soluzione dell'equazione, verificare che per $t < T^*$ si ha $N'(t) > 0$ (la funzione $N(t)$ cresce) e che per $t > T^*$ si ha $N'(t) < 0$ (la funzione $N(t)$ decresce).
Calcoliamo la derivata. Si ha

$$N'(t) = 54\frac{5e^{-t}}{[1+5e^{-t}]^2};$$

quindi si ha sempre $N'(t) > 0$ e la funzione $N(t)$ cresce sempre. Si conclude che non esiste un nessun istante in cui la numerosita' raggiunge un valore massimo. Partendo inizialmente dal valore $N(0) = 9$ la numerosita' cresce sempre, tendendo asintoticamente al valore $N = 54$.
Il grafico di $N(t)$ e' di "tipo logistico"



3. (a) Calcolare le derivate delle funzioni seguenti nel punto $x = 0$:

$$f_1(x) = e^{x^2+2}, \qquad f_2(x) = x + e^{1-x}, \qquad f_3(x) = (x^4+1)^6;$$

(b) calcolare le primitive delle funzioni seguenti

$$f_1(x) = \frac{x}{(3x^3)^2}, \qquad f_2(x) = \frac{e^{x^2+x}}{\sqrt{2x}}, \qquad f_3(x) = 2x^3(1-x^3)^2$$

Soluzione. Si ha

(a) $f_1'(x) = e^{x^2+2}(2x)$, quindi $f_1'(0) = 0$;

$f_2'(x) = 1 + e^{1-x}(-1) = 1 - e^{1-x}$, quindi $f_2'(0) = 1 - e$;

$f_3'(x) = 6(x^4+1)^5(4x^3)$, quindi $f_3'(0) = 0$.

(b) La funzione $f_1(x)$ si puo' riscrivere nella forma $f_1(x) = \frac{x(x^{-6})}{9} = \frac{x^{-5}}{9}$, quindi le primitive sono

$$\frac{x^{-4}}{-36} + c = -\frac{1}{36x^4} + c$$

La funzione $f_2(x) = \frac{e^{x^2+x}}{\sqrt{2x}}$ è stata aggiunta per errore, quindi la primitiva NON SI DEVE CALCOLARE.

La funzione $f_3(x)$ si puo' riscrivere nella forma $f_3(x) = 2x^3(1 + x^6 - 2x^3) = 2x^3 + 2x^{18} - 4x^9$, quindi le primitive sono

$$2x^4/4 + 2x^{19}/19 - 4x^{10}/10 + c = x^4/2 + 2x^{19}/19 - 2x^{10}/5 + c.$$

4. Calcolare i seguenti integrali

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx, \quad \int_3^5 \frac{1}{2x-1}dx, \quad \int cos(4x)dx, \quad \int x^2 e^{x^3+1}dx,$$

$$\int_1^2 \sqrt{x}\ln x dx, \quad \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx, \quad \int x^2 \ln x dx.$$

Soluzione. Se si osserva che derivando la funzione $f(x) = x^2 + 3x + 2$ (al denominatore) si ha $f'(x) = 2x + 3$, si puo' riconoscere che il primo integrale ha la forma

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx = \int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx.$$

L'integrale vale quindi $\ln(f(x))$ e cioe'

$$\ln(x^2 + 3x + 2)\Big|_0^1 = \ln 6 - \ln 2 = \ln 3.$$

Il secondo integrale si risolve osservando che se $f(x) = \ln(2x-1)$, allora $f'(x) = [1/(2x-1)]2$. Quindi

$$\int_3^5 \frac{1}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\int_3^5 \frac{2}{2x-1}dx = \frac{1}{2}\ln(2x-1)\Big|_3^5 = \frac{1}{2}[\ln 9 - \ln 5] = \frac{\ln(9/5)}{2}.$$

Il terzo integrale si risolve osservando che se $f(x) = \sin(4x)$, allora $f'(x) = \cos(4x)4$. Quindi

$$\int \cos(4x)dx = \frac{1}{4}\int 4\cos(4x)dx = \frac{\sin(4x)}{4} + c.$$

Anche il successivo integrale si risolve osservando che se $f(x) = e^{x^3+1}$ si ha $f'(x) = e^{x^3+1}(3x^2)$. Allora

$$\int x^2 e^{x^3+1}dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3+1}dx = \frac{e^{x^3+1}}{3} + c$$

Il successivo integrale si risolve integrando per parti. Se si pone $f(x) = \ln(x)$ e $g'(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ e quindi $f'(x) = 1/x$ e $g(x) = x^{3/2}/(3/2) = (2/3)x\sqrt{x}$, si ha

$$\int_1^2 f(x)g'(x)dx = \int_1^2 \ln x(\sqrt{x})dx = \ln(x)[(2/3)x\sqrt{x}]\Big|_1^2 - (2/3)\int_1^2 (1/x)(x\sqrt{x})dx =$$

$$= (2/3)[2\sqrt{2}\ln 2] - (2/3)\int_1^2 x^{1/2}dx = (4/3)\sqrt{2}\ln 2 - (4/9)x\sqrt{x}\Big|_1^2 =$$

$$= (4/3)\sqrt{2}\ln 2 - (4/9)[2\sqrt{2} - 1] = (4/3)\sqrt{2}[\ln 2 - 2/3] + 4/9.$$

Anche il sesto integrale si risolve per parti. Se si pone $f(x) = e^x$ e $g'(x) = \cos x$ e quindi $f'(x) = e^x$ e $g(x) = -\sin x$, si ha

$$\mathcal{I} = \int_0^{\pi/2} f(x)g'(x)dx = \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = -e^x \sin x\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} e^x \sin x dx.$$

Risolviamo l'integrale di nuovo per parti ponendo $f(x) = e^x$ e $g'(x) = \sin x$ e quindi $f'(x) = e^x$ e $g(x) = \cos x$. Si ha

$$\mathcal{I} = -e^{\pi/2} + [e^x \cos x\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx] = -e^{\pi/2} - 1 - \mathcal{I}$$

Quindi $2\mathcal{I} = -(e^{\pi/2} + 1)$ e infine

$$\mathcal{I} = \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx = -\frac{e^{\pi/2} + 1}{2}.$$

L'ultimo integrale si risolve per parti. Se si pone $f(x) = \ln(x)$ e $g'(x) = x^2$, e quindi $f'(x) = 1/x$ e $g(x) = x^3/3$ si puo' scrivere

$$\int x^2 \ln x dx = \ln x(x^3/3) + c - \int (1/x)(x^3/3)dx = \ln x(x^3/3) + c - \frac{1}{3}\int x^2 dx =$$

$$= \ln x(x^3/3) + c - \frac{1}{3}(x^3/3) + c' = \frac{x^3}{3}[\ln x - \frac{1}{3}] + C,$$

dove $C = c + c'$.

5. Trovare l'area della regione del piano delimitata dal grafico della funzione $f(x) = xe^{x^2}$, dall'asse orizzontale e dalle rette verticali $x = 1/2$ e $x = 2$.

Soluzione. L'area da calcolare e'

$$A = \int_{1/2}^2 xe^{x^2} dx.$$

Se si osserva che se $f(x) = e^{x^2}$, si ha $f'(x) = 2xe^{x^2}$ e si puo' scrivere

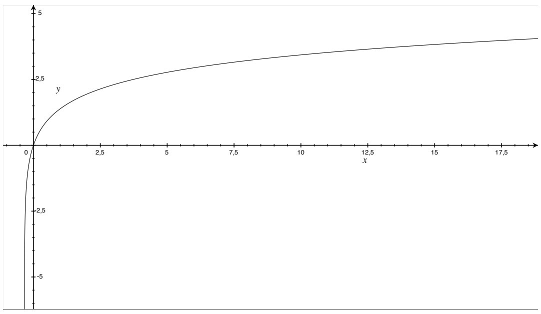
$$\frac{1}{2}\int_{1/2}^2 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2}\Big|_{1/2}^2 = \frac{1}{2}[e^4 - e^{1/4}].$$

6. Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \ln(3x + 1)$. Trovare l'area delimitata dal grafico della funzione f, dall'asse x di un riferimento cartesiano e dalle rette verticali $x = 0$ e $x = 1$.

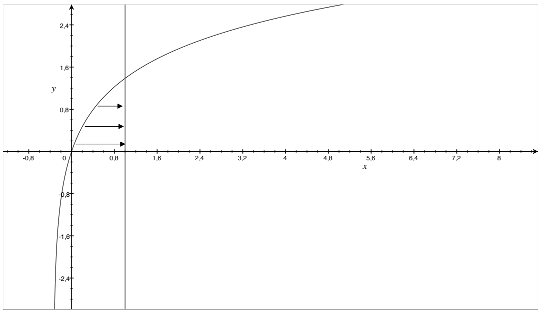
Soluzione. La funzione $f(x) = \ln(3x + 1)$ è definita per tutti gli x per cui si ha $3x + 1 > 0$, e quindi se $x > -1/3$. Se $3x + 1 = 1$ e quindi se $x = 0$ si ha $f(0) = 0$; se $x > 0$ si ha $f(x) > 0$ se $-1/3 < x < 0$ si ha $f(x) < 0$.
Per $x \to -1/3$ si ha

$$\lim_{x\to -1/3} f(x) = -\infty$$

quindi il grafico della funzione ha come asintoto verticale la retta $x = -1/3$. Non ci sono asintoti orizzontali.
Se $f(x) = \ln(3x + 1)$, la derivata vale $f'(x) = \frac{3}{3x+1}$ e nel dominio si ha sempre $f'(x) > 0$, quindi $f(x)$ cresce sempre. Il grafico e'



e l'area da calcolare e' quella in figura



ed ha il valore di $\int_0^1 \ln(3x+1)dx$.
L'integrale si risolve per parti ponendo $f(x) = \ln(3x+1)$ e $g'(x) = 1$ e quindi $f'(x) = 3/(3x+1)$ e $g(x) = x$. Si ha

$$\int_0^1 \ln(3x+1)dx = x\ln(3x+1)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{3x}{3x+1}dx = \ln 4 - \int_0^1 \frac{3x}{3x+1}dx.$$

Per risolvere l'ultimo integrale osserviamo che

$$\frac{3x}{3x+1} = \frac{3x+1-1}{3x+1} = 1 - \frac{1}{3x+1}$$

quindi

$$\int_0^1 \frac{3x}{3x+1}dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{1}{3x+1} = x\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\ln(3x+1)\Big|_0^1 = 1 - \frac{\ln 4}{3}.$$

In definitiva l'area vale

$$\int_0^1 \ln(3x+1)dx = \ln 4 - 1 + \frac{\ln 4}{3} = \frac{4\ln 4}{3} - 1.$$

7. Qual'e' il valore medio F_M della funzione

$$F(x) = x^2\sqrt{3x^3+1}$$

nell'intervallo $I = [1, 4]$? In quale punto x^* dell'intervallo I si ha $F(x^*) = F_M$?

Soluzione. Per calcolare il valore medio della funzione data bisogna calcolare

$$\int_1^4 x^2\sqrt{3x^3+1}dx = \int_1^4 x^2(3x^3+1)^{1/2}dx.$$

Se si osserva che, data $f(x) = 3x^3 + 1$ si ha $f'(x) = 9x^2$, si puo' scrivere

$$\frac{1}{9}\int_1^4 9x^2(3x^3+1)^{1/2}dx = \frac{1}{9}\int_1^4 F(f(x))f'(x)dx$$

e quindi

$$\int_1^4 x^2\sqrt{3x^3+1}dx = \frac{1}{9}(3x^3+1)^{3/2}(\frac{2}{3})\Big|_1^4 = \frac{2}{27}[(193)^{3/2} - 4^{3/2}].$$

Il valore medio della funzione e' quindi

$$F_M = \frac{1}{3}\{\frac{2}{27}[(193)^{3/2} - 4^{3/2}]\} = \frac{2}{81}[(193)^{3/2} - 4^{3/2}].$$

Il valore x^* e' la soluzione dell'equazione $F(x^*) = F_M$, cioe'

$$x^2\sqrt{3x^3+1} = \frac{2}{81}[(193)^{3/2} - 4^{3/2}] \ \Rightarrow x^4(3x^3+1) = \{\frac{2}{81}[(193)^{3/2} - 4^{3/2}]\}^2.$$