

Esercizi di Calcolo e Biostatistica 11

1. Date le funzioni composte $f_1(x) = F(g(x)) = \ln(2 - 2x^2)$, $f_2(x) = H(h(x)) = \sqrt[3]{x^2 + 1}$, dire come sono definite le funzioni F , f , H e h .

Qual è il dominio delle funzioni f_1 e f_2 ? Calcolare $f_1(0)$ e $f_2(0)$.

Scrivere le funzioni $g(F(x))$ e $h(H(x))$.

2. Nello studio di un gruppo di organismi presenti in un certo ambiente, si rileva che la numerosità di una popolazione varia con la legge

$$N(t) = \frac{54}{1 + 5e^{-t}},$$

dove t è misurato in anni. Quanti organismi ci sono al tempo $t = 0$? Quanti organismi ci sono in media nell'intervallo di tempo $[0, 4]$?

Aspettando un tempo molto lungo, da quanti organismi risulterebbe composta la popolazione? Quale andamento ha nel tempo la numerosità? Esiste un istante in cui la popolazione è raddoppiata rispetto al valore iniziale? Se la risposta è positiva, qual'è questo tempo? Esiste un istante in cui la popolazione raggiunge la numerosità massima possibile? Se la risposta è positiva, qual'è questo tempo?

Disegnare in un piano $(t, N(t))$ il grafico della funzione $N(t)$.

3. (a) Calcolare le derivate delle funzioni seguenti nel punto $x = 0$:

$$f_1(x) = e^{x^2+2}, \quad f_2(x) = x + e^{1-x}, \quad f_3(x) = (x^4 + 1)^6;$$

(b) calcolare le primitive delle funzioni seguenti

$$f_1(x) = \frac{x}{(3x^3)^2}, \quad f_2(x) = \frac{e^{x^2+x}}{\sqrt{2x}}, \quad f_3(x) = 2x^3(1 - x^3)^2$$

4. Calcolare i seguenti integrali

$$\int_0^1 \frac{2x + 3}{x^2 + 3x - 2} dx, \quad \int_3^5 \frac{1}{2x - 1} dx, \quad \int \cos(4x) dx, \quad \int x^2 e^{x^3+1} dx,$$

$$\int_1^2 \sqrt{x} \ln x dx, \quad \int_0^{\pi/2} e^x \cos x dx, \quad \int \frac{x^2}{\ln x} dx.$$

5. Trovare l'area della regione del piano delimitata da grafico della funzione $f(x) = xe^{x^2}$, dall'asse orizzontale e dalle rette verticali $x = 1/2$ e $x = 2$.

6. Disegnare la funzione $f(x) = \ln(3x + 1)$. Trovare l'area delimitata dal grafico della funzione f , dall'asse x di un riferimento cartesiano e dalle rette verticali $x = 0$ e $x = 1$.

7. Qual'è il valore medio F_M della funzione

$$F(x) = x^2 \sqrt{3x^3 + 1}$$

nell'intervallo $I = [1, 4]$? In quale punto x^* dell'intervallo I si ha $F(x^*) = F_M$?