Esercizi di Calcolo e Biostatistica

1. Calcolare, nel punto $x = 1$, le derivate delle funzioni seguenti:

$$f_1(x) = \sqrt{x^4 + 1}, \qquad f_2(x) = 1 - e^{x^2}, \qquad f_3(x) = (2x^4 + 1)^5;$$

Soluzione. Si ha $f_1(x) = \sqrt{x^4 + 1} = (x^4 + 1)^{1/2}$, quindi

$$f_1'(x) = \frac{1}{2}(x^4 + 1)^{-1/2}(4x^3) = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + 1}}$$

quindi $f_1'(1) = 4/(2\sqrt{2})$.
Inoltre

$$f_2'(x) = -(e^{x^2})(2x)$$

quindi $f_2'(1) = -2e$.
Infine

$$f_3'(x) = 5(2x^4 + 1)^4(8x^3)$$

quindi $f_3'(1) = 5(81)(8) = 3240$.

2. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_0^x 4x^5 dx, \qquad \int_0^x \frac{6}{x^3} dx, \qquad \int_0^x \frac{2 + 7x}{x^2} dx, \qquad \int_0^x -e^{2x} dx.$$

Soluzione: $\int_0^x 4x^5 dx = 4\frac{x^5}{5} + c$
$\int_0^x \frac{6}{x^3} dx = 6\int_0^x x^{-3} dx = -6\frac{x^{-2}}{2} + c = -\frac{3}{x^2} + c$
$\int_0^x \frac{2+7x}{x^2} dx = \int_0^x (\frac{2}{x^2} + \frac{7}{x}) dx = \int_0^x 2x^{-2} dx + \int_0^x \frac{7}{x} dx = -2x^{-1} + 7 \ln x + c$
$\int_0^x -e^{2x} dx = -\frac{e^{2x}}{2} + c.$
In tutti casi verificare che i risultati sono corretti calcolando le derivate.

3. Calcolare le derivate delle funzioni seguenti

$$f_1(x) = \frac{x^2}{(3x^3)^5}, \qquad f_2(x) = \frac{e^{2+\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}, \qquad f_3(x) = x^2(1 - 4x^3)^2.$$

Calcolare le primitive di $f_1(x)$ e di $f_3(x)$ passanti per il punto $P = (1, 1)$.

Soluzione. DERIVATE. Si ha

$$f_1'(x) = \frac{2x[(3x^3)^5] - x^2[5(3x^3)^4(9x^2)]}{[(3x^3)^5]^2} = \frac{-13x}{(3x^3)^5}.$$

$$f_2'(x) = \frac{(e^{2+\sqrt{x}})(2\sqrt{x})^{-1}(2\sqrt{x}) - e^{2+\sqrt{x}}[(x)^{-1/2}]}{4x} = e^{2+\sqrt{x}}[\frac{1 - (x)^{-1/2}}{4x}]$$

$$f_3'(x) = 2x[(1 - 4x^3)^2] + x^2[2(1 - 4x^3)(-12x^2)].$$

PRIMITIVE. Visto che $f_1(x) = \frac{x^2}{(3x^3)^5} = \frac{1}{3^5}(x^{-13})$, si ha

$$F_1(x) = -\frac{1}{3^5(12)}(x^{-12}) + c$$

(verificare che il risultato e' corretto calcolando la derivata di $F_1(x)$). Se $P = (1, 1)$ deve appartenere al grafico di F_1 si deve avere

$$-\frac{1}{3^5(12)}+c=1 \quad \Rightarrow c=\frac{1}{3^5(12)}$$

quindi

$$F_1(x)=-\frac{1}{3^5(12)}(x^{-12})+\frac{1}{3^5(12)}.$$

Visto che $f_3(x)=x^2(1+16x^6-8x^3)=x^2+16x^8-8x^5$, si ha

$$F_3(x)=\frac{x^3}{3}+16\frac{x^9}{9}-8\frac{x^6}{6}+c$$

(verificare che il risultato e' corretto calcolando la derivata di $F_3(x)$). Se $P=(1,1)$ deve appartenere al grafico di F_3 si deve avere

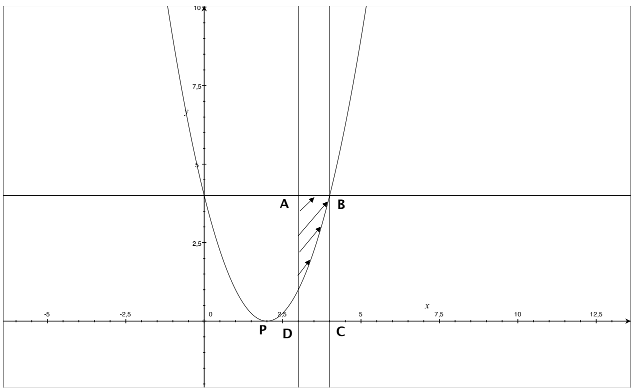
$$\frac{1}{3}+16\frac{1}{9}-8\frac{1}{6}+c=\frac{7}{9}+c=1 \quad \Rightarrow c=\frac{2}{9}$$

quindi

$$F_3(x)=\frac{x^3}{3}+16\frac{x^9}{9}-8\frac{x^6}{6}+\frac{2}{9}.$$

4. Disegnare la regione del piano delimitata dalle rette di equazione $x=3$ ed $x=4$ e dai grafici delle funzioni $f(x)=4$ e $g(x)=(x-2)^2$. Calcolare l'area di questa regione piana.

Soluzione. La funzione $f(x)$ ha come grafico la retta orizzontale di equazione $y=4$. La funzione $g(x)$ ha come grafico una parabola con apertura verso l'alto. Visto che per $x=2$ si ha $g(2)=0$ la parabola interseca l'asse orizzontale del riferimento nel punto $P=(2,0)$. Visto che per $x\neq 2$ i valori di $g(x)$ sono maggiori di zero, P e' il vertice della parabola.
Si puo' osservare che le intersezioni tra $f(x)$ e $g(x)$ si trovano nei punti $A=(3,4)$ e $B=(4,4)$.
La regione richiesta e' quella indicata con le frecce



L'area da calcolare e' data dall'area del rettangolo ABCD a cui si deve sottrarre l'area A* della parte di piano al di sotto del grafico della parabola.
L'area del rettangolo ABCD vale 4.
Per il teorema fondamentale del calcolo l'area A* e' data da

$$F(4)=\int_2^4 g(x)dx$$

(area al di sotto del grafico della parabola limitata dalle rette verticali $x=2$ e $x=4$), cui bisogna sottrarre

$$F(3)=\int_2^3 g(x)dx$$

(area al di sotto del grafico della parabola limitata dalle rette verticali $x=2$ e $x=3$).

In definitiva l'area A* si calcola come $F(4) - F(3)$ dove F e' la primitiva della funzione $g(x)$.
Visto che $g(x) = x^2 - 4x + 4$, la funzione primitiva $F(x)$ e' data da

$$F(x) = x^3/3 - 4x^2/2 + 4x + c = x^3/3 - 2x^2 + 4x + c$$

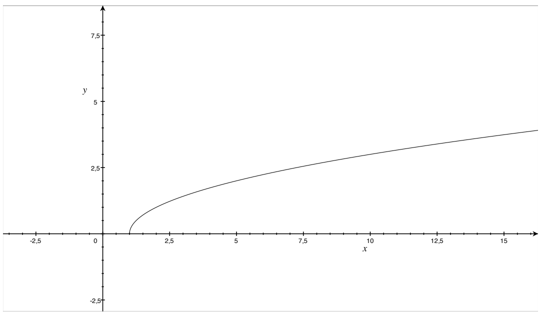
con c qualunque costante. Quindi $F(4) = 64/3-2(16)+16+c = 16/3+c$ e $F(3) = 9-18+12+c = 3+c$.
In definitiva A* = 16/3 - 3 = 7/3.
L'area da calcolare vale 4 - 7/3 = 5/3.

5. Disegnare il grafico della funzione

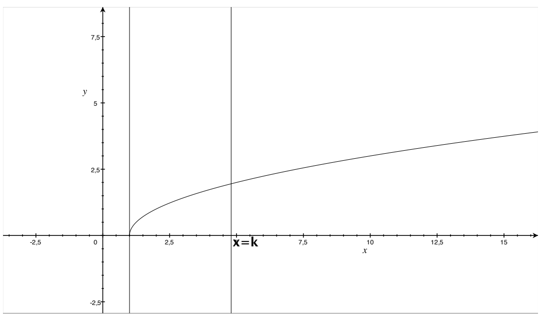
$$F(x) = \sqrt{x-1}.$$

Per quale valore di $k > 0$ l'area delimitata dal grafico della funzione $F(x)$, dall'asse x del riferimento cartesiano e dalle rette verticali $x = 1$ e $x = k$, $(k > 1)$ vale 2/3?

Soluzione: La funzione data e' una funzione di funzione. E' definita per i valori di x per cui si ha $x - 1 \geq 0$ (altrimenti la radice quadrata non e' un numero reale). Quindi il dominio della funzione e' $D = \{x \in \mathbf{R}, x \geq 1\}$.
Se $x = 1$ si ha $F(1) = 0$; per $x > 1$ la funzione e' positiva. Non esistono asintoti per il grafico della funzione perche' $F(1) = 0$ e $F(x) \to \infty$ per $x \to \infty$.
Si ha $F'(x) = 1/[2\sqrt{x-1}]$, quindi $F'(x) > 0$ per ogni $x > 1$: la funzione F cresce sempre. Il grafico e'



L'area delimitata dal grafico della funzione $F(x)$, dall'asse x del riferimento cartesiano e dalle rette verticali $x = 1$ e $x = k$ $(k > 1)$ e' quella in figura



e si calcola come

$$\int_1^k F(x)dx.$$

Visto che $F(x) = \sqrt{x-1} = (x-1)^{1/2}$, la primitiva e' $G(x) = (x-1)^{3/2}/(3/2) = (2/3)(x-1)^{3/2}$. Si ha quindi

$$\int_1^k F(x)dx = G(k) - G(1) = (2/3)(k-1)^{3/2}$$

$(G(1) = c)$. Per rispondere bisogna quindi risolvere, rispetto a k, l'equazione $(2/3)(k-1)^{3/2} = 2/3$, cioe' $(k-1)^{3/2} = 1$.

Elevando al quadrato ambo i membri si ha $(k-1)^3 = 1$: se $k = 2$ al primo membro si ha $(2-1)^3 = 1$ quindi la soluzione e' $k = 2$.

6. Disegnare il grafico della funzione $f(x) = \ln(x^2+1)$. Disegnare la regione del piano delimitata dalle rette di equazione $x = 0$ ed $x = 2$ e dal grafico della funzione $f(x)$.
Senza calcolare l'integrale, dire perche' la stima seguente è corretta

$$0 \leq \int_0^2 \ln(x^2+1)dx \leq 2\ln 5$$

Soluzione. La funzione $f(x) = \ln(x^2+1)$ e' definita per ogni valore di x per cui si ha $x^2+1 > 0$, ma questa disequazione e' soddisfatta per ogni x: il dominio della funzione e' $D = \mathbf{R}$. Se $x = 0$ si ha $f(0) = 0$. Visto che per ogni $x \neq 0$ si ha $x^2+1 > 1$ la funzione e' sempre positiva.

Visto che

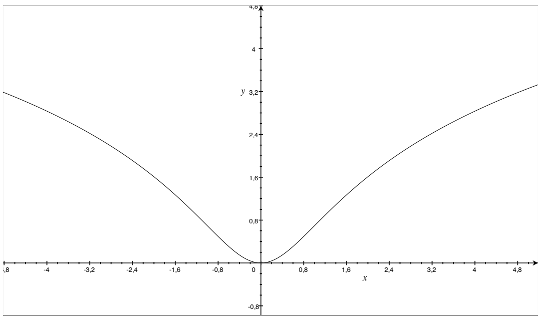
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

il grafico della funzione non ha asintoti.

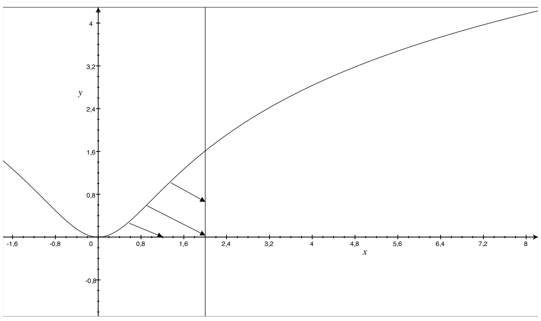
Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1}(2x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

quindi se $x < 0$ la funzione decresce visto che si ha $f'(x) < 0$, se $x > 0$ la funzione cresce perche' $f'(x) > 0$, infine in $x = 0$ si ha $f'(x) = 0$ (tangente orizzontale) e $O = (0,0)$ e' un punto di minimo. Il grafico e'



Visto che $\int_0^2 \ln(x^2+1)dx$ rappresenta l'area della parte di piano indicata con le frecce



Si puo' osservare subito che $0 \leq \int_0^2 \ln(x^2+1)dx$. Dato inoltre che il punto $P = (2, \ln(5))$ corrisponde al massimo della funzione nell'intervallo $[0,2]$, si ha anche $\int_0^2 \ln(x^2+1)dx \leq 2\ln 5$ perche' questo numero e' l'area del rettangolo circoscritto di base 2 e altezza $h = \ln 5$ (ordinata di P).

7. Tenendo presente il teorema fondamentale del calcolo, si puo' dire per quale valore di $x > 0$ la funzione

$$F(x) = \int_0^x x^2(x-1)e^{x-1}dx$$

assume il valore minimo?

Soluzione. La funzione $F(x)$ ha un minimo in un punto $x*$ in cui si ha $F'(x*) = 0$ (tangente orizzontale) e $F'(x) < 0$ per $x < x*$ e $F'(x) > 0$ per $x > x*$.
Ma per il teorema fondamentale del calcolo si ha $F'(x) = f(x)$ con $f(x) = x^2(x-1)e^{x-1}$ in questo caso. Quindi $F'(x) = 0$ se $x = 0$ e $x = 1$. Se $0 < x < 1$ si ha $F'(x) < 0$ e la funzione $F(x)$ decresce, se $x > 1$ si ha $F'(x) > 0$ e F cresce. Quindi $x = 1$ e' un punto di minimo.