Esercizi di Calcolo e Biostatistica con soluzioni

1. Date le funzioni $f_1(x) = x/4 - 1$, $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$, $f_3(x) = x^4 - \sqrt{2x}$, scrivere a parole le operazioni che, dato x in modo opportuno, permettono di calcolare $f_1(f_2(x))$, e $f_3(f_2(x))$. Dopo aver scritto le due funzioni precedenti, dire dove sono definite e calcolarle nel punto $x = 1$.

Soluzione. La funzione $f_1(f_2(x))$ e' definita da

$$f_1(f_2(x)) = \frac{\sqrt[3]{x}}{4} - 1$$

quindi, dato x, per calcolare i valori di questa funzione bisogna

- scegliere $x \in \mathbf{R}$, che è il dominio, e calcolare la radice cubica di x,
- dividere questo numero per 4,
- sottrarre 1.

La funzione $f_3(f_2(x))$ e' definita da

$$f_3(f_2(x)) = (\sqrt[3]{x})^4 - \sqrt{2\sqrt[3]{x}}$$

quindi, dato x, per calcolare i valori di questa funzione bisogna

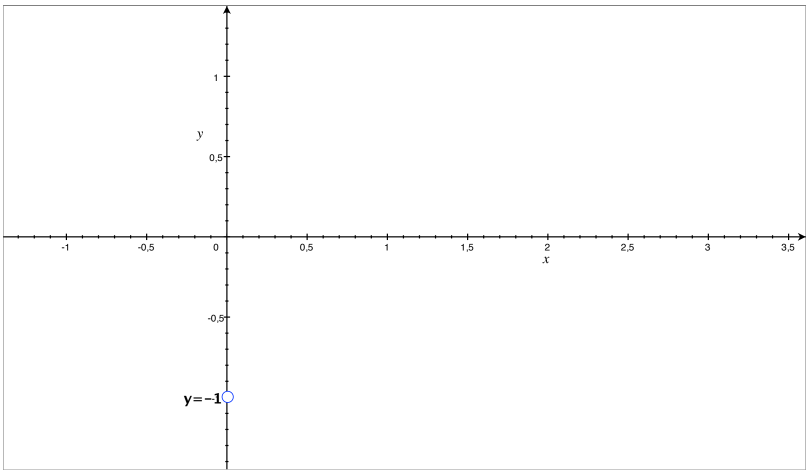
- scegliere $x \geq 0$ (la radice quadrata di $2\sqrt[3]{x}$ deve essere maggiore o uguale a zero) e calcolare la quarta potenza della radice cubica di x,
- sottrarre la radice quadrata di 2 volte la radice cubica di x.

Si ha

$$f_1(f_2(1)) = \frac{\sqrt[3]{1}}{4} - 1 = -\frac{3}{4}, \qquad f_3(f_2(1)) = (\sqrt[3]{1})^4 - \sqrt{2\sqrt[3]{1}} = 1 - \sqrt{2}.$$

2. Data la funzione $f(x) = x^{1/3} + 3x + 3$ calcolare $f(-1)$ e rappresentarlo sull'asse delle ordinate di un piano cartesiano. Quanto vale $f[27f(-1)]$?
Quali sono le coordinate del punto $P = (f(-1), f(f(-1)))$, appartenente al grafico della funzione f?

Soluzione. Si ha $f(-1) = -1 - 3 + 3 = -1$: questo valore è l'ordinata di un punto sull'asse verticale del piano cartesiano

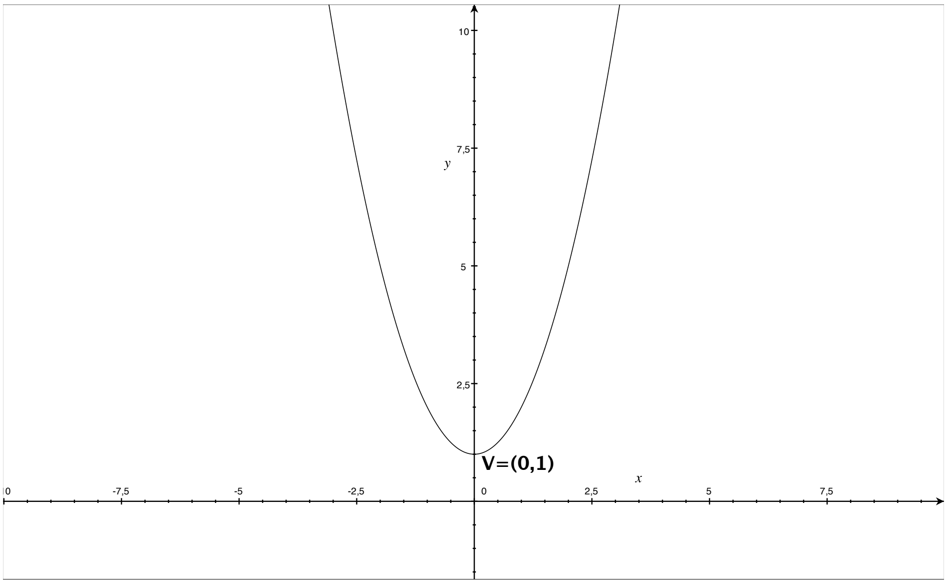


Si ha $f(-1) = -1$, quindi $27f(-1) = -27$ e $f[27f(-1)] = f(-27) = -3 - 3(27) + 3 = -81$.
Visto che $f(-1) = -1$ e $f(f(-1)) = f(-1) = -1$, le coordinate del punto sono $P = (-1, -1)$.

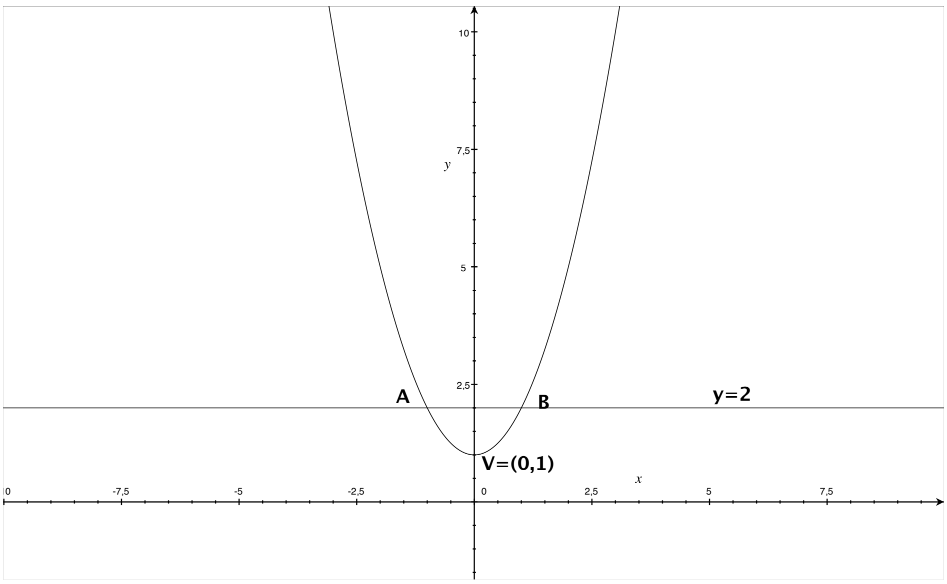
3. Data la funzione $f(x) = y = x^2 + 1$, disegnarne il grafico in un piano cartesiano. Scelto $y = 2$, qual'è il significato geometrico del problema $x^2 + 1 = 2$ (che è un'equazione di secondo grado)?

Per quali valori di x l'equazione è soddisfatta? Spiegare a parole perchè risolvere l'equazione precedente è lo stesso che calcolare $f^{-1}(2)$, dove $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$ è la funzione inversa di f.

Soluzione. Il grafico della funzione $f(x) = y = x^2 + 1$ e' quello di una parabola con concavita' rivolta verso l'alto, simmetrica rispetto all'asse verticale del riferimento cartesiano e intersezione con questo asse nel punto $P = (0,1)$. Tenendo conto del fatto che per ogni $x \neq 0$ $f(x) > 1$, il punto P e' il vertice della parabola.
Il grafico della funzione e' quindi



La funzione $y = f(x) = 2$ ha come grafico una retta orizzontale; l'equazione di secondo grado $x^2+1 = 2$ permette di individuare le ascisse delle intersezioni della retta orizzontale $y = 2$ con il grafico della parabola



Le soluzioni dell'equazione $x^2 + 1 = 2$, cioe' $x^2 = 1$, sono $x = -1$ e $x = 1$, quindi i punti A e B hanno coordinate $A = (-1, 2)$ e $B = (1, 2)$.

Risolvere l'equazione $x^2+1=2$ è lo stesso che calcolare la funzione inversa f^{-1}, in un intervallo in cui la funzione e' crescente oppure decrescente. Infatti se $x \geq 0$ (la funzione e' crescente), oppure se $x < 0$ (la funzione e' decrescente), si ha $f(x)=2$ per quei valori di x che verificano $x = f^{-1}[f(x)] = f^{-1}(2)$. In altre parole risolvere l'equazione significa proprio effettuare i seguenti passi: 1) calcolare la funzione inversa, applicarla alla relazione $f(x)=2$, ottenendo x a primo membro e $f^{-1}(2)$ a secondo membro: il/i valori $f^{-1}(2)$ danno proprio le soluzioni dell'equazione.

4. Disponiamo di g_1 grammi della sostanza S_1 e di g_2 grammi della sostanza S_2. Mescolando il 30 per cento dei g_1 grammi e il 5 per cento dei g_2 grammi si ottengono 5 grammi di composto, mentre aggiungendo il 10 per cento dei g_1 grammi al 3 per cento dei g_2 grammi si ottengono 2.5 grammi di composto.
Scrivere il sistema lineare che permette di calcolare g_1 e g_2 e dire, senza risolvere il sistema, se é possibile calcolare un ben preciso valore di g_1 e g_2; se la risposta é positiva, trovare questi valori.

Se per formare le stesse quantita' di composto del caso precedente si usa, nel primo caso il k per cento di g_1 e il 5 per cento di g_2 e nel secondo caso il 10 per cento di g_1 e il $2k$ per cento di g_2, per quali valori di k il composto non si riesce a formare?

Soluzione. Il sistema lineare che descrive quantitativamente i composti e'

$$\begin{cases} 0.3g_1 + 0.05g_2 = 5 \\ 0.1g_1 + 0.03g_2 = 2.5 \end{cases} \tag{1}$$

La matrice dei coefficienti del sistema e'

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.05 \\ 0.1 & 0.03 \end{pmatrix}$$

Il determinante di A vale $0.3 \cdot 0.03 - 0.1 \cdot 0.05 \neq 0$, quindi il sistema ammette una sola soluzione. Risolviamolo con il metodo di sostituzione. Si ha

$$\begin{cases} g_1 = \frac{5-0.05g_2}{0.3} \\ 0.1[\frac{5-0.05g_2}{0.3}] + 0.03g_2 = 2.5 \end{cases} \tag{2}$$

La seconda equazione si scrive

$$\frac{4g_2}{300} = \frac{2.5}{3}$$

e quindi $g_2 = 62.5$ gr. Sostituendo questo valore nella prima equazione di (2) si trova $g_1 = 6.25$ gr.

Per quel che riguarda la seconda parte del problema, possiamo riscrivere il sistema nella forma

$$\begin{cases} kg_1 + 0.05g_2 = 5 \\ 0.1g_1 + 2kg_2 = 2.5 \end{cases}$$

La matrice dei coefficienti di questo sistema e'

$$B = \begin{pmatrix} k & 0.05 \\ 0.1 & 2k \end{pmatrix}$$

e il determinante di B vale $2k^2 - 0.005$. Se il composto non si puo' fare, il sistema non ha soluzione e cio' si realizza se $detB = 0$ quindi se $k = \pm 0.05$.
In conclusione mescolando una percentuale del 5 per cento dei g_1 grammi con il 5 per cento dei g_2 grammi e il 10 per cento dei g_1 grammi con il 10 per cento dei g_2 grammi non si possono ottenere rispettivamente 5 e 2.5 grammi di composto. Se si mescola una qualunque altra percentuale di g_1 il composto si puo' realizzare.

5. Nello studio di un gruppo di popolazioni di organismi presenti in un certo ambiente, si rileva che la numerosità di un popolazione varia con la legge

$$N(t) = \frac{54}{1+5e^{-t}},$$

dove t è misurato in anni. Quanti organismi ci sono al tempo $t=0$? Aspettando un tempo molto lungo, da quanti organismi risulterebbe composta la popolazione? Quale andamento ha nel tempo la

numerosità? Esiste un istante in cui la popolazione è raddoppiata rispetto al valore iniziale? Se la risposta è positiva, qual'è questo tempo? Esiste un istante in cui la popolazione raggiunge la numerosità massima possibile? Se la risposta è positiva, qual'è questo tempo?
Disegnare in un piano $(t, N(t))$ il grafico della funzione $N(t)$.

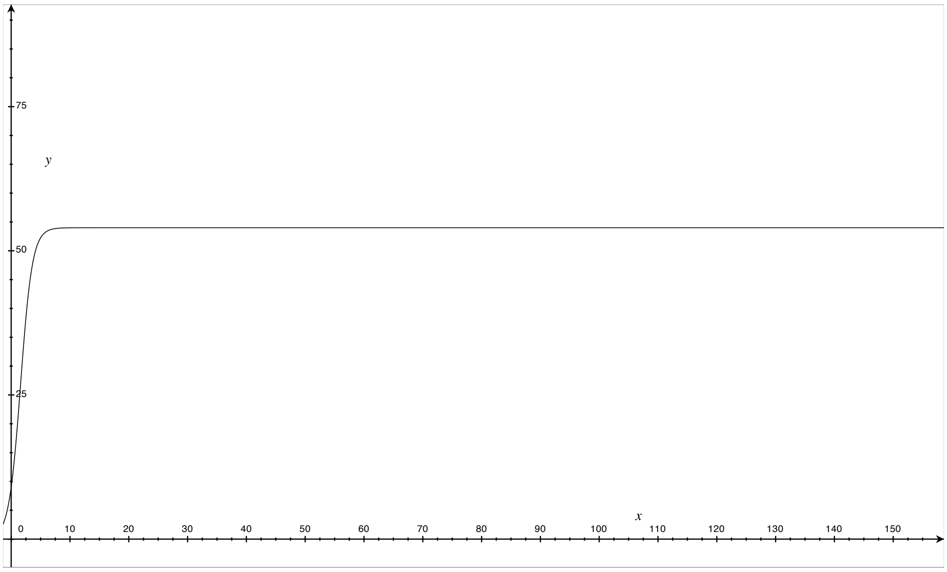
Soluzione. Se $t = 0$, visto che $e^0 = 1$, la funzione vale $N(0) = 54/6 = 9$: questa e' la numerosita' iniziale. Per sapere quanti organismi si avranno asintoticamente bisogna calcolare

$$\lim_{t\to\infty} N(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{54}{1+5e^{-t}} = 54$$

(abbiamo tenuto conto del fatto che $\lim_{x\to\infty} e^{-t} = 0$). Questo risultato dice che il grafico della funzione $N(t)$ ha un asintoto orizzontale di equazione $N = 54$.
Per studiare l'andamento della funzione si puo' osservare che il grafico non ha asintoti verticali, visto che $N(t)$ e' definita per ogni $t \geq 0$.
Per ogni scelta di $t > 0$ il tasso di variazione della funzione vale

$$\frac{N(t) - N(0)}{t} = \frac{\frac{54}{1+5e^{-t}} - 54/6}{t} = \frac{54}{t}[\frac{1}{1+5e^{-t}} - \frac{1}{6}]$$

questo valore e' sempre positivo perche' $e^{-t} < 1$ per $t > 0$. Concludiamo che la funzione deve aumentare sempre. Il grafico e'



Per sapere in quale istante la numerosita' e' doppia rispetto al valore iniziale bisogna risolvere, rispetto a t, l'equazione

$$N(t) = \frac{54}{1+5e^{-t}} = 2N(0) = 18$$

cioe'

$$\frac{3}{1+5e^{-t}} = 1 \quad \Rightarrow \quad 3 = 1 + 5e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{5} = e^{-t}$$

La soluzione e' $t = \ln(5/2) \approx 0.92$: la popolazione raddoppia un po' prima di un anno.
Dallo studio precedente abbiamo ottenuto che la funzione e' sempre crescente, quindi non esiste un valore di numerosita' che sia il massimo possibile: i valori di $N(t)$, aumentando sempre piu' lentamente, si avvicinano al valore asintotico $N = 54$, senza mai raggiungerlo.

6. (a) Calcolare le derivate delle funzioni seguenti nel punto $x = 1$:

$$f_1(x) = x^3 + 2, \qquad f_2(x) = (x^2)^{1/5}, \qquad f_3(x) = 2/(x)^{3/2};$$

(b) per tutte le funzioni al punto (a), scrivere l'equazione della retta tangente il grafico in $x = 1$.

Soluzione. Si ha $f_1'(x) = 3x^2$ e quindi $f_1'(1) = 3$.

Si ha $f_2'(x) = (2/5)(x)^{-3/5} = \frac{2}{5(x^3)^{1/5}}$, quindi $f_2'(1) = 2/5$.

Infine $f_3(x) = 2(x)^{-3/2}$, quindi $f_3'(x) = 2(-3/2)(x)^{-3/2-1} = -3(x)^{-5/2} = -3/(x^{5/2})$.
Quindi $f_3'(1) = -3$.

Si ha $f_1(1) = 3$, $f_2(1) = 1$ e $f_3(1) = 2$, quindi le tre rette sono tangenti i grafici nei punti $A = (1, 3)$, $B = (1, 1)$ e $C = (1, 2)$.
Le tre tangenti hanno, rispettivamente, inclinazione 3, 2/5 e -3 quindi le equazioni sono $y = 3x$, $y = (2/5)x + 3/5$ e $y = -3x + 5$.