COMPITO di CALCOLO e BIOSTATISTICA

Questo compito permette di allenarsi per la prova di esonero.
Per capire a che punto si è con la preparazione è indispensabile:
(a) svolgere l'esercizio **in una sola volta**
(b) cercare di **non consultare** libri o quaderni di esercizi
(c) svolgere il compito in due ore **al massimo**
(d) nel caso non si riuscisse a completare lo svolgimento in due ore, si suggerisce di prendere nota di quello che si e' fatto in due ore e di proseguire nello svolgimento fino alla fine, prendendo nota del tempo impiegato.

---

1) Si consideri la funzione

$$y = f(x) = \frac{2}{x-2} + \frac{x}{4}.$$

Trovare il dominio, le coordinate dei punti di intersezione con gli assi cartesiani e le equazioni degli eventuali asintoti.
Scrivere l'equazione della retta $y = s(x)$ secante il grafico della funzione nei punti di ascissa $x = 1$ e $x = 4/3$. Calcolare $f(7/6)$ e valutare l'errore che si commette approssimando questo numero con il valore $s(7/6)$.

Svolgimento: il dominio della funzione è l'insieme dei punti della retta reale $D = \{x \in \mathbf{R},\ x \neq 2\}$.
La funzione interseca l'asse verticale nei punti di ascissa $x = 0$; ma $f(0) = -1$, quindi l'intersezione del grafico della funzione con questo asse si ha nel punto $P = (0, -1)$. I punti di intersezione con l'asse orizzontale hanno coordinata $y = 0$ e si ha $f(x) = 0$ se

$$\frac{2}{x-2} + \frac{x}{4} = 0 \ \Rightarrow\ \frac{8 + x(x-2)}{4(x-2)} = 0 \ \Rightarrow\ x^2 - 2x + 8 = 0$$

Questa equazione non ha radici reali, quindi il grafico non interseca l'asse orizzontale.
Se $x \to 2$, la prima delle due frazioni diverge, mentre la seconda converge a $1/2$, quindi complessivamente si ha

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \infty$$

quindi la retta verticale di equazione $x = 2$ è un asintoto (verticale) per il grafico della funzione.
Se $x \to \infty$ la prima frazione converge a zero mentre la seconda diverge, quindi non ci sono asintoti orizzontali per il grafico della funzione.

La retta richiesta interseca il grafico nei punti $A = (1, f(1)) = (1, -7/4)$ e $B = (4/3, f(4/3)) = (4/3, -8/3)$. L'inclinazione della retta e' data dal tasso di varizione

$$\frac{f(4/3) - f(1)}{4/3 - 1} = -11/4.$$

La secante ha dunque equazione $y = -(11/4)x + c$; per calcolare c ricordiamo che questa retta deve passare per A. Si ha quindi $-7/4 = -11/4 + c$ e quindi $c = 1$. La secante ha equazione $y = s(x) = -(11/4)x + 1$.
Si ha $s(7/6) = -53/24$ mentre e' $f(7/6) = -281/120$: l'errore che si commette e' uguale alla differenza $|f(7/6) - s(7/6)| = 16/120 \approx 0,13$.

2) Per quali valori di $k \in \mathbf{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2k & 1 \\ k+3 & 2 \end{pmatrix},$$

ha il determinante uguale a zero? Per quali valori di k si ha $A \times \mathbf{v} = \mathbf{w}$ con $\mathbf{v} = (2, -1)$ e $\mathbf{w} = (0, 9/2)$?
Nel caso in cui k ha il valore per cui risulta det$A$=0, se $\mathbf{v} = (x, y)$ é un generico vettore, quali sono le componenti di $\mathbf{u} = A \times \mathbf{v}$?

Svolgimento: Si ha det$A = 2(2k) - (k+3) = 3k - 3$, quindi det$A = 0$ se $k = 1$.
Si ha

$$A \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2k & 1 \\ k+3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k-1 \\ 2k+6-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4k-1 \\ 2k+4 \end{pmatrix}$$

Questo vettore e' uguale a $\mathbf{w} = (0, 9/2)$ se $4k - 1 = 0$ e $2k + 4 = 9/2$. Tutte e due le equazioni sono soddisfatte se $k = 1/4$.
Se $k = 1$ il prodotto $A \times \mathbf{v}$ diventa

$$\mathbf{u} = A \times \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 4x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ 2(2x+y) \end{pmatrix}.$$

Fissato $\mathbf{v} = (x, y)$, il vettore $\mathbf{u}$ ha componenti $(2x + y, 2(2x + y))$ ed ha sempre direzione 2, come i vettori riga (o colonna) della matrice A.

3) Uno studente ha sostenuto 6 esami riportando i seguenti voti

23 18 25 20 27 20

Qual'e la mediana dei voti ottenuti? Se nei successivi 2 esami lo studente prende 21 e 23 la media aumenta o diminuisce? Se lo studente volesse ottenere la media del 23 quanto dovrebbe prendere nei due esami successivi ai primi 6?

Svolgimento. Per calcolare la mediana sui primi 6 esami bisogna riordinare i voti in ordine crescente: 18 20 20 23 25 27. La mediana é data da (20+23)/2 = 21.5

La media sui primi 6 é invece

$$M = \frac{23 + 18 + 25 + 20 + 27 + 20}{6} \approx 22.17$$

quindi se lo studente prende 21 e 23 la media diventa $M' = (23 + 18 + 25 + 20 + 27 + 20 + 21 + 23)/8 = 22.125 < 22.17$
Detti x e y i voti dei due esami successivi ai primi 6 si avrebbe

$$23 = M' = \frac{23 + 18 + 25 + 20 + 27 + 20 + x + y}{8}$$

e quindi $x + y = 51$ cioé la somma dei voti dei due successivi esami dovrebbe dare 51 (ad esempio $x = 25$ e $y = 26$ oppure $x = 24$ e $y = 27$ eccetera).

4) La legge con cui varia nel tempo la lunghezza l, misurata in μm, di un microrganismo é lineare in t, per $t \in [0, 10]$ (t é misurato in ore). Si osserva che il tasso di variazione e il valore iniziale della lunghezza sono, rispettivamente 0.25 e $l(0) = 1\mu m$. Scrivere la legge funzionale che descrive il fenomeno e dire qual e' la lunghezza del microrganismo dopo 10 ore.
Se invece $l(t)$ fosse descritta da una legge quadratica in t con i valori $l(0)$ e $l(10)$ uguali a quelli del caso lineare e se inoltre nell'intervallo $[0, 5]$ il tasso di variazione della lunghezza del microrganismo fosse 3, quale funzione si dovrebbe scrivere?

Svolgimento. Una legge lineare ha la forma $l(t) = at + c$ con a che indica il tasso di variazione e c che é il valore iniziale ($c = l(0)$). La legge che descrive il fenomeno é in questo caso $l(t) = 0.25t + 1$. Consegue da questa legge che $l(10) = 3.5\mu m$

Se la legge é quadratica, ha la forma $l(t) = at^2 + bt + c$. Visto che deve essere $l(0) = 1\mu m$ anche in questo caso si ha $c = 1$; inoltre si deve avere $l(10) = 100a + 10b + 1 = 3.5\mu m$.
La condizione che il tasso di variazione della lunghezza del microrganismo in $[0, 5]$ vale 3 si scrive

$$\frac{l(5) - l(0)}{5} = \frac{l(5) - 1}{5} = 3$$

e quindi $l(5) = 14$, cioe' $l(5) = 25a + 5b + 1 = 14$.
Risolvendo il sistema di 2 equazioni nelle due incognite a e b dato dalle condizioni

$$\begin{cases} 100a + 10b = 2,5 \\ 25a + 5b = 13 \end{cases}$$

si trova $a = -0,47$, $b = 4,95$: l'equazione della parabola é $l(t) = -0.471t^2 + 4,95t + 1$.