I ESONERO di CALCOLO e BIOSTATISTICA con SOLUZIONI can. A-E (15. 12. 2016) (I)

ESERCIZIO 1. Nello studio di un fenomeno ogni misura, calcolata in cm., elencata sulla prima riga viene rilevata con la frequenza riportata sulla seconda riga

□ $m_1 = 5.1$ $m_2 = 2.3$ $m_3 = 4$ $m_4 = 1.2$
$F_1 = 7$ $F_2 = 4$ $F_3 = 2$ $F_4 = 3$

□ $m_1 = 4.4$ $m_2 = 2.1$ $m_3 = 6.7$ $m_4 = 0.9$
$F_1 = 8$ $F_2 = 3$ $F_3 = 2$ $F_4 = 5$

(Cioe' nel primo caso la misura $m_1 = 5,1$cm viene osservata 7 volte, la misura $m_2 = 2,3$ cm. viene osservata 4 volte ecc. Analogamente per il secondo caso).
Con quali frequenze relative vengono osservate le misure?
Calcolare la media M e la moda m della collezione di misure. Di quanto differisce in percentuale la media dalla moda? Se alle precedenti quattro, vengono aggiunte altre tre misure m_5 m_6 e m_7, tutte rilevate una volta ed aventi media 3,3. Quanto vale la media di tutte le misure?
(Se necessario, approssimare tutti i valori alla seconda cifra decimale)

Soluzione. La frequenza relativa di una misura e' data dalla frequenza di quella misura diviso il numero totale delle misure eseguite. Nel primo caso le misure sono in totale N=16, quindi le frequenze relative, con un'approssimazione alla seconda cifra decimale, sono:

$$f_1 = F_1/N = 7/16 \approx 0,44, \quad f_2 = F_2/N = 4/16 = 0,25, \quad f_3 = 2/16 \approx 0,12, \quad f_4 = 3/16 \approx 0,19$$

(N.B. $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0,44 + 0,25 + 0,12 + 0,19 = 100/100 = 1$)

Nel secondo caso le misure sono in totale N=18, quindi le frequenze relative, con un'approssimazione alla seconda cifra decimale, sono:

$$f_1 = F_1/N = 8/18 \approx 0,44, \quad f_2 = F_2/N = 3/18 \approx 0,17, \quad f_3 = 2/18 \approx 0,11, \quad f_4 = 5/18 \approx 0,28$$

(N.B. $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 0,44 + 0,17 + 0,11 + 0,28 = 100/100 = 1$)

La media di una collezione di N dati e' data da

$$M = \frac{F_1m_1 + F_2m_2 + ... + F_km_k}{N}$$

dove $N = F_1 + F_2 + ... + F_k$.
Nel primo caso (a) si ha $N = 16$ e

$$M = \frac{7 \cdot 5.1 + 4 \cdot 2.3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1.2}{16} = \frac{56,5}{16} \approx 3.53\text{cm}$$

La moda di una collezione di dati e' il dato che appare il maggior numero di volte, quindi, in questo caso, la moda e' $5.1cm$.
La differenze in centimetri tra i due indici é di $5.1 - 3.5 = 1.6cm$. Visto che si puo' scrivere $5,1 = 3,53 + (x/100)3,53 = 3,53[1 + (x/100)]$, si ha $5,1/3,53 \approx 1,44$ e dunque $x/100 = 0,44$. Questo risultato permette di concludere che la media supera la moda del 44% circa.

Se alla precedente collezione vengono aggiunte tre misure m_5 m_6 e m_7, tutte rilevate una volta ed aventi media 3,3, questo vuol dire che

$$\frac{m_5 + m_6 + m_7}{3} = 3,3 \quad \Rightarrow \quad m_5 + m_6 + m_7 = 9,9.$$

La media totale si scrive quindi

$$M = \frac{7 \cdot 5.1 + 4 \cdot 2.3 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1.2 + m_5 + m_6 + m_7}{19} = \frac{56,5 + 9,9}{19} = \frac{66,4}{19} \approx 3,49.$$

Nel secondo caso, (b), del tutto analogo, si ha $N = 18$, $f_1 = 4/9 \approx 0,44$, $f_2 = 1/6 \approx 0,17$, $f_3 = 1/9 \approx 0,11$, $f_4 = 5/18 \approx 0,28$. La media vale $M = \frac{59,4}{18} = 3,3$ e la moda e' $m = 4,4$. La differenza tra media e moda vale $4,4 - 3,49 = 0,91$ e la moda supera la media del 26% circa.

La media di tutte e 22 le misure vale infine $M = \frac{59,4+9,9}{21} \approx 3,3$.

ESERCIZIO 2. Dato il numero reale $k \neq 0$, e dati i vettori

☐ $\mathbf{v} = (2, k), \mathbf{u} = (k, u_2)$ ☐ $\mathbf{v} = (k, 1), \mathbf{u} = (-1, u_2)$

trovare u_2, la seconda componente di $\mathbf{u}$, in modo che $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ siano vettori perpendicolari.
Dopo aver sostituito al posto di u_2 il valore trovato, dire se esistono valori di k reali per i quali la combinazione lineare $x\mathbf{v} + y\mathbf{u}$ dà il vettore $\mathbf{w} = (1, 1)$. Scrivere esplicitamente, in funzione di k, i valori di x e y. Calcolare x e y per $k = 3$.

Soluzione. (a) I vettori $\mathbf{v}$=(2,k) e $\mathbf{u}$=(k,u_2) sono perpendicolari se il loro prodotto scalare e' zero, cioe' se

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = 2k + ku_2 = k(2 + u_2) = 0$$

e quindi, visto che $k \neq 0$, il prodotto scalare e' nullo se $u_2 = -2$. Le componenti di $\mathbf{u}$ sono quindi $(k, -2)$.

La combinazione lineare $x\mathbf{v}+y\mathbf{u}$ da' il vettore $\mathbf{v}^*$ di componenti $(2x+ky, kx-2y)$ e si ha $\mathbf{v}^* = \mathbf{w} = (1, 1)$ se il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x + ky = 1 \\ kx - 2y = 1 \end{cases}$$

nelle incognite x e y ammette una sola soluzione (che dipende da k). Visto che la matrice A dei coefficienti del sistema e'

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ k & -2 \end{pmatrix}$$

e ha determinante $\det A = -4 - k^2 = -(4 + k^2)$, che non si annulla per nessun valore di $k \in \mathbf{R}$, il sistema ha sempre una sola soluzione. In funzione di k la soluzione e'

$$x(k) = \frac{2-k}{k^2+4}, \quad y(k) = \frac{k-2}{k^2+4}$$

che per $k = 3$ diventa in particolare $x = -1/13$ $y = 1/13$.

(b) I vettori $\mathbf{v}$=(k,1) e $\mathbf{u}$=(-1,u_2) sono perpendicolari se il loro prodotto scalare e' zero, cioe' se

$$\mathbf{v} \times \mathbf{u} = -k + u_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_2 = k.$$

Le componenti di $\mathbf{u}$ sono quindi $(-1, k)$.
La combinazione lineare $x\mathbf{v} + y\mathbf{u}$ da' il vettore $\mathbf{v}^*$ di componenti $(kx - y, x + ky)$ e $\mathbf{v}^* = \mathbf{w} = (1, 1)$ se il sistema lineare

$$\begin{cases} kx - y = 1 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

nelle incognite x e y, ammette una sola soluzione (che dipende da k). Visto che la matrice A dei coefficienti del sistema e'

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

e ha determinante $\det A = k^2 + 1$, che non si annulla per nessun valore di $k \in \mathbf{R}$, il sistema ha sempre una sola soluzione. In funzione di k la soluzione e'

$$x(k) = \frac{1+k}{1+k^2}, \quad y(k) = \frac{k-1}{k^2+1}$$

che, per $k = 3$, diventa in particolare $x = 2/5$ $y = 1/5$.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$\square \quad f(x) = -\frac{(\ln x)^2}{x} \qquad\qquad \square \quad f(x) = \frac{\ln(x^2)}{(x+1)^2}.$$

dire qual e' il dominio della funzione e trovare, se esistono, i punti del dominio in cui si ha $f(x) \geq 0$. Calcolare il tasso di variazione della funzione nell'intervallo $[1, 2]$ e interpretare il risultato ottenuto. Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $A = (1, f(1))$ e $B = (2, f(2))$. Il punto $P = (3/2, \ln 4/4)$ appartiene alla retta passante per A e B?

Soluzione. (a) La funzione $\ln x$ al numeratore e' definita se $x > 0$ (e quindi anche $(\ln x)^2$ lo e'), il denominatore e' definito per ogni $x \neq 0$, quindi il dominio della funzione e' l'insieme $D = \{x \in \mathbf{R}, x > 0\}$. Il numeratore $(\ln x)^2$, dove e' definito, ha sempre segno positivo, quindi la funzione e' positiva solo se il denominatore e' negativo, ma cio' si realizza fuori dal dominio, quindi non esistono punti nel dominio in cui si abbia $f(x) > 0$. Se $x = 1$ si ha pero' $\ln 1 = 0$, quindi si ha $f(x) = 0$ se $x = 1$.

Si ha $f(2) = -\frac{(\ln 2)^2}{2}$ e $f(1) = 0$, quindi il tasso di variazione della funzione vale

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = -\frac{(\ln 2)^2}{2} < 0$$

questo risultato dice che, nel passaggio dal valore $x = 1$ al valore $x = 2$ i corrispondenti valori della funzione sono diminuiti.

Il coefficiente di inclinazione della retta per i punti $A = (1, f(1))$ e $B = (2, f(2))$ vale $a = -\frac{(\ln 2)^2}{2}$, quindi l'equazione della retta e' $y = (-\frac{(\ln 2)^2}{2})x + c$.
Per calcolare c imponiamo il passaggio della retta per il punto A. Si ha $0 = -\frac{(\ln 2)^2}{2} + c$, quindi la retta ha equazione

$$y = (-\frac{(\ln 2)^2}{2})(x - 1).$$

Visto che se $x = 3/2$ si ha $y = -\frac{2}{3}(\ln 3/2)^2$, la retta non passa per P.

(b) La funzione $\ln x^2$ al numeratore e' definita se $x \neq 0$ (anche se $x < 0$ si ha $x^2 > 0$).
Il denominatore e' definito per ogni $x \neq -1$, quindi il dominio della funzione e' l'insieme $D = \{x \in \mathbf{R}, x \neq -1, x \neq 0\}$.
Il denominatore $(x + 1)^2$, dove e' definito, ha sempre segno positivo, quindi la funzione e' positiva solo se il numeratore e' positivo. Se osserviamo che il numeratore e' una funzione di funzione $h(g(x))$ con $g(x) = x^2$ e $h(x) = \ln x$, $\ln(x^2) > 0$ se $0 < x^2 < 1$, quindi se $-1 < x < 1$. Se $x = 1$ si ha pero' $\ln 1 = 0$, quindi si ha $f(x) \geq 0$ se $-1 < x \leq 1$ (ricordando che $x \neq 0$).

Si ha $f(2) = \frac{\ln 4}{9}$ e $f(1) = 0$, quindi il tasso di variazione della funzione vale

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{\ln 4}{9} > 0$$

questo risultato dice che, nel passaggio dal valore $x = 1$ al valore $x = 2$ i corrispondenti valori della funzione sono aumentati.

Il coefficiente di inclinazione della retta per i punti $A = (1, f(1))$ e $B = (2, f(2))$ vale $a = \frac{(\ln 4)}{9}$, quindi l'equazione della retta e' $y = \frac{(\ln 4)}{9}x + c$.
Per calcolare c imponiamo il passaggio della retta per il punto A. Si ha $0 = \frac{(\ln 4)}{9} + c$, quindi la retta ha equazione

$$y = \frac{(\ln 4)}{9}(x - 1).$$

Visto che se $x = 3/2$ si ha $y = \frac{4}{9}(\ln 9/4)$, la retta non passa per P.

ESERCIZIO 4. La numerosità di una colonia di cellule in cui si e' inserito un medicinale varia nel tempo t, $t \geq 0$, contato in ore, con la legge

$$\square\ C(t) = 10^2 \frac{e^{2-t}}{t+1} \qquad \square\ C(t) = 2 \cdot 10^3 \frac{e^{-(3t+1)}}{3t+1/3}$$

Quante cellule compongono la colonia all'istante iniziale $t = 0$? Quante ce ne sono dopo 3 ore? Che cosa e' accaduto alla numerosita' delle cellule nelle prime 3 ore? Qual'è il destino della colonia per $t \to \infty$? Con ragionamenti basati solo sulle proprieta' elementari delle funzioni coinvolte, dire se puo' esistere un istante, in cui la numerosità della colonia è dimezzata rispetto all'istante iniziale.

Soluzione. (a) La funzione $C(t) = 10^2 \frac{e^{2-t}}{t+1}$ per $t = 0$ vale $C(0) = 10^2 e^2$ mentre per $t = 3$ si ha $C(3) = 10^2 \frac{e^{-1}}{4} = \frac{10^2}{4e}$. Visto che $e^2 > 1/4e$ la numerosita', nelle prime 3 ore e' diminuita.
Per capire cosa accade alla colonia su tempi lunghi possiamo scrivere

$$C(t) = 10^2 \frac{e^{2-t}}{t+1} = 10^2 \frac{e^2 e^{-t}}{t+1} = 10^2 \frac{e^2}{e^t(t+1)}$$

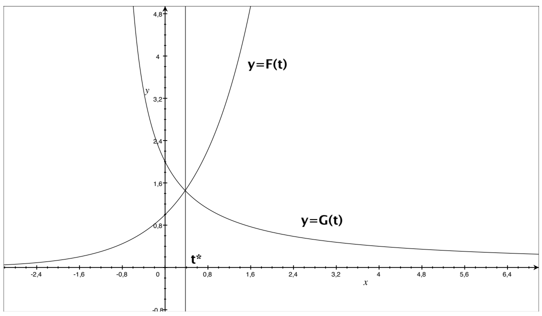
Il numeratore della funzione e' costante, il denominatore diverge per $t \to \infty$ visto che divergono sia e^t che $t + 1$, quindi

$$\lim_{t\to\infty} C(t) = 0 :$$

la colonia si estingue.
Per rispondere all'ultima domanda si deve risolvere l'equazione

$$10^2 \frac{e^{2-t}}{t+1} = 10^2 \frac{e^2 e^{-t}}{t+1} = 10^2 \frac{e^2}{e^t(t+1)} = \frac{10^2 e^2}{2}$$

cioe' $e^t(t + 1) = 2$, quindi $e^t = 2/(t + 1)$: la soluzione, se esiste, e' il punto di intersezione tra il grafico di $F(t) = e^t$ e $G(t) = 2/(t + 1)$. I due grafici sono



Per $t = 0$ il primo membro dell'uguaglianza precedente vale 1. Abbiamo gia' osservato che al crescere di t il prodotto $e^t(t+1)$ aumenta. Si conclude che un istante in cui $C(t) = (1/2)C(0)$ esiste certamente.

(b) La funzione $C(t) = 2 \cdot 10^3 \frac{e^{-(3t+1)}}{3t+1/3}$ per $t = 0$ vale $C(0) = 6(10^3)/e$ mentre per $t = 3$ si ha $C(3) = 6(10^3)\frac{e^{-10}}{28} \approx 0,03$: dopo 3 ore la colonia si e' estinta.
Per capire cosa accade alla colonia su tempi lunghi possiamo scrivere

$$C(t) = 2(10^3) \frac{e^{-3t}}{e(3t+1/3)} = \frac{2(10^3)}{e(3t+1/3)e^{3t}}$$

Il numeratore della funzione e' costante, il denominatore diverge per $t \to \infty$ visto che divergono sia e^{3t} che $3t + 1/3$, quindi $C(t) \to 0$: la colonia si estingue.
Per rispondere all'ultima domanda si deve risolvere l'equazione

$$2(10^3) \frac{e^{-(3+t)}}{3t+1/3} = \frac{2(10^3)}{e(3t+1/3)e^{3t}} = \frac{3(10^3)}{e}$$

cioe' $\frac{e^{3t}(3t+1/3)}{2} = 1/3$. Per $t = 0$ il primo membro dell'uguaglianza precedente vale $1/6(<1/3)$. Abbiamo gia' osservato che al crescere di t il prodotto $e^{3t}(3t + 1/3)$ aumenta . Si conclude che un istante in cui $C(t) = (1/2)C(0)$ esiste certamente.

I ESONERO di CALCOLO e BIOSTATISTICA can. A-E (5. 12. 2016) (II)

ESERCIZIO 1. In uno studio ecologico bisogna analizzare quanti individui di una specie S sono presenti in una certa area. L'area viene divisa in 10 parti (dette "zone") tutte uguali e le osservazioni fatte sono riassunte come segue:

☐ $\begin{array}{ccc} n_1 = 0 & n_2 = 2 & n_3 = 8 \\ F_1 = 6 & F_2 = 3 & F_3 = 1 \end{array}$ ☐ $\begin{array}{ccc} n_1 = 4 & n_2 = 9 & n_3 = 0 \\ F_1 = 2 & F_2 = 2 & F_3 = 6 \end{array}$

I numeri n_1, n_2, n_3 indicano quanti esemplari dell'organismo in studio sono stati trovati in una certa zona e F_1, F_2, F_3 sono le frequenze, cioe' il numero di zone, in cui quel numero di organismi e' stato trovato (ad esempio, nel primo caso, 0 organismi sono stati trovati in 6 zone, 2 organismi sono stati trovati in 3 zone ecc. Il significato di n_i e F_i, $i = 1, 2, 3$ e' del tutto analogo nel secondo caso).
Qual'è il numero totale degli esemplari trovati in tutta l'area? Quanti esemplari ci sono in media in ogni zona?
In un successivo studio nuove osservazioni segnalano che in 4 delle 6 zone in cui la prima volta non sono stati trovati individui ora ce ne sono n_1, con $n_1 \neq 0$. Se, in questo secondo caso, il numero medio degli esemplari per zona è 5, quanto vale n_1?

Soluzione (a) L'area e' stata divisa in $N = 10$ zone; in 3 ci sono 2 individui, in 1 ce ne sono otto, in totale il numero degli organismi trovati e' 14.
Il numero medio di organismi trovati in ogni zona e'

$$M = \frac{14}{10} = 1,4.$$

Se in 4 delle 6 zone prima vuote ci sono n_1 individui, il numero totale degli individui trovati e' $112 + 4n_1$ e la media diventa

$$M = \frac{14 + 4n_1}{10} = 5$$

da cui si ricava $14 + 4n_1 = 50$ e $n_1 = 9$.

(b) L'area e' stata divisa in $N = 10$ zone; in 2 ci sono 4 individui, in altre 2 ce ne sono 9, in totale il numero degli organismi trovati e' 26.
Il numero medio di organismi trovati in ogni zona e'

$$M = \frac{26}{10} = 2,6.$$

Se in 4 delle 6 zone prima vuote ci sono n_1 individui, il numero totale degli individui trovati e' $126 + 4n_1$ e la media diventa

$$M = \frac{26 + 4n_1}{10} = 5$$

da cui si ricava $26 + 4n_1 = 50$ e $n_1 = 6$.

ESERCIZIO 2. Dato il numero reale $k > 0$, e dati i vettori
☐ $\mathbf{v} = (-1, k), \mathbf{u} = (k, 2k)$ ☐ $\mathbf{v} = (k, 1), \mathbf{u} = (-k, k)$
dire se esistono valori di k reali per i quali la combinazione lineare $x\mathbf{v} + y\mathbf{u}$ dà il vettore $\mathbf{w} = (-2, 1)$.
Per questi valori, scrivere esplicitamente, in funzione di k, le espressioni di x e y.
Calcolare x e y per $k = 1$.
Dire, motivando la risposta, se esistono valori di k per i quali il vettore $\mathbf{u}$ è parallelo al vettore $\mathbf{v}^* = (1, 3)$.

Soluzione. (a) La combinazione lineare $x\mathbf{v} + y\mathbf{u}$, scritta per componenti è il vettore $(-x + ky, kx + 2ky)$ e questo è il vettore $\mathbf{w}$ se

$$\begin{cases} -x + ky = -2 \\ kx + 2ky = 1 \end{cases}$$

Il sistema ammette una sola soluzione (che dipende da k) se la matrice dei coefficienti del sistema

$$A = \begin{pmatrix} -1 & k \\ k & 2k \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da zero. Si ha det$A = -2k - k^2 = -k(2+k)$, che non si annulla per nessun valore di $k > 0$, quindi il sistema ha sempre una sola soluzione. In funzione di k la soluzione è

$$x(k) = \frac{5}{k+2}, \quad y(k) = \frac{1-2k}{k^2+2k}$$

che per $k = 1$ diventa in particolare $x = 5/3$ $y = -1/3$.

Il vettore $\mathbf{v}^* = (1,3)$ ha direzione $m_{v^*} = 3$, il vettore $\mathbf{u} = (k, 2k)$ ha per ogni k direzione $m_u = 2$ quindi non esiste nessun valore di k per il quale i due vettori sono paralleli.

(b) La combinazione lineare $x\mathbf{v} + y\mathbf{u}$, scritta per componenti è il vettore $(kx - y, kx + ky)$ e questo è il vettore $\mathbf{w}$ se

$$\begin{cases} kx - ky = -2 \\ x + ky = 1 \end{cases}$$

Il sistema ammette una sola soluzione (che dipende da k) se la matrice dei coefficienti del sistema

$$A = \begin{pmatrix} k & -k \\ 1 & k \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da zero. Si ha det$A = k^2 + k$, che non si annulla per nessun valore di $k > 0$, quindi il sistema ha sempre una sola soluzione. In funzione di k la soluzione è

$$x(k) = \frac{-1}{k+1}, \quad y(k) = \frac{2+k}{k^2+k}$$

che per $k = 1$ diventa in particolare $x = -1/2$ $y = 3/2$.

Il vettore $\mathbf{v}^* = (1,3)$ ha direzione $m_{v^*} = 3$, il vettore $\mathbf{u} = (-k, k)$ ha, per ogni k, direzione $m_u = -1$ quindi non esiste nessun valore di k per il quale i due vettori sono paralleli.

ESERCIZIO 3. Trovare il dominio della funzione

☐ $f(x) = \frac{(x-1)^2}{e^{1-x}}$ ☐ $f(x) = \frac{(x-1)^2}{e^{-2x}}$

e trovare, se esistono, i punti del dominio in cui si ha $f(x) \leq 0$.
Calcolare il tasso di variazione della funzione nell'intervallo $[1, 2]$ e interpretare il risultato ottenuto. Scrivere l'equazione della retta passante per i punti $A = (1, f(1))$ e $B = (2, f(2))$. Il punto $P = (3/2, e/4)$ appartiene alla retta passante per A e B?

Soluzione. (a) Il dominio della funzione $f(x) = \frac{(x-1)^2}{e^{1-x}}$ è tutto l'asse reale, $D = \mathbf{R}$, dato che il denominatore si annulla mai e il numeratore e' sempre definito.
La funzione è positiva se il numeratore e il denominatore hanno lo stesso segno, altrimenti è negativa. Visto che il numeratore è sempre maggiore o uguale a zero (si annulla solo per $x = 1$) e il denominatore è sempre positivo, in definitiva la funzione, è positiva e si annulla (quindi è $f(x) = 0$) solo per $x = 1$. Non esistono valori di x per i quali si ha $f(x) < 0$.

La funzione passa per $A = (1, f(1) = 0)$ e per $Q = (2, f(2) = e)$ e in questo intervallo il tasso di variazione e'

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = e > 0$$

quindi se x varia dal valore 1 al valore 2, corrispondentemente i valori della funzione aumentano.
La retta passante per A e B (secante il grafico) ha equazione $y = mx + c$ con $m = e$, tasso di variazione della funzione. Per trovare c si puo' imporre il passaggio per A. Si ha $0 = e + c$, quindi $c = -e$ e la retta ha equazione $y = ex - e$.

Se $x = 3/2$ un punto sulla retta ha ascissa $y = 3e/2 - e = e/2$ quindi il punto P non appartiene alla retta.

(b) Il dominio della funzione $f(x) = \frac{(x-1)^2}{e^{-2x}}$ è tutto l'asse reale, $D = \mathbf{R}$, dato che il denominatore si annulla mai e il numeratore e' sempre definito.
La funzione è positiva se il numeratore e il denominatore hanno lo stesso segno, altrimenti è negativa. Visto che il denominatore è sempre maggiore di zero, il segno della funzione è dato dal numeratore. Ma $(x-1)^2$ è positivo, o nullo in $x = 1$, quindi non esistono valori di x per i quali la funzione è negativa; si ha invece $f(x) = 0$ per $x = 1$.
La funzione passa per $A = (1, f(1) = 0)$ e per $Q = (2, f(2) = e^4)$ e in questo intervallo il tasso di variazione e'

$$\frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = e^4 > 0$$

quindi se x varia dal valore 1 al valore 2, corrispondentemente i valori della funzione aumentano.
La retta passante per A e B (secante il grafico) ha equazione $y = mx + c$ con $m = e^4$, tasso di variazione della funzione. Per trovare c si puo' imporre il passaggio per A. Si ha $0 = e^4 + c$, quindi $c = -e^4$ e la retta ha equazione $y = e^4(x-1)$.
Se $x = 3/2$ un punto sulla retta ha ascissa $y = e^4/2$ quindi il punto P non appartiene alla retta.

ESERCIZIO 4. La funzione

$$\square\ C(t) = 2 \cdot 10^6 \frac{2^{t+1}}{t+1} \qquad \square\ C(t) = 2 \cdot 10^6 \frac{2^{(3t+3)}}{3t+3}$$

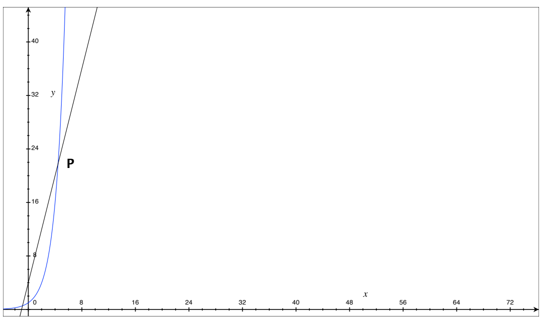
descrive un processo di crescita di una cultura di cellule, dove $C(t) =$ e' numero delle cellule al tempo t e t e' contato in minuti.
(a) Quali valori si possono dare a t? (qual'e' il dominio della funzione). Qual e' il valore minimo che la funzione assume nel dominio?
(b) Quante cellule si contano all'inizio ($t = 0$) e quante dopo 4 minuti? Esiste un tempo in cui si osservano piu' di $16 \cdot 10^6$ cellule? (Motivare la risposta anche con metodi grafici).
(c) Qual e' il comportamento asintotico della funzione $C(t)$ per $t \to \infty$?

Soluzione (a) La funzione $C(t) = 2 \cdot 10^6 \frac{2^{t+1}}{t+1}$ e' definita per i valore reale di t per i quali risulta $t \neq -1$ Visto pero' che in questo caso particolare la variabile indipendente t rappresenta il tempo, possiamo assumere che il dominio sia l'insieme $D = \{t \in \mathbf{R}, \quad, t \geq 0\}$.
Per $t = 0$ la funzione vale $C(0) = 4 \cdot 10^6$ visto che $2^{0+1} = 2$. Per $t > 0$ i valori di $C(t)$ aumentano, quindi il valore minimo che la funzione prende nel dominio e' $4 \cdot 10^6$.

Come gia' osservato si ha $C(0) = 4 \cdot 10^6$, mentre e' $C(4) = \frac{2^6 \cdot 10^6}{5} = 2^7(10^5)$. Si osservano piu' di $16 \cdot 10^6$ cellule per quei valori di t per cui risulta $C(t) = 2 \cdot 10^6 \frac{2^{t+1}}{t+1} > 16 \cdot 10^6$ cioe'

$$2^t > 4(t+1).$$

Per $t \geq 0$ questa disequazione ha certamente una soluzione, infatti se disegniamo i grafici della funzione a primo membro e quello della funzione a secondo membro si ha



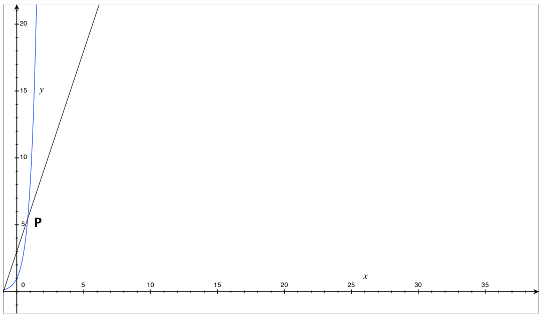
I due grafici si incontrano nel punto P e per $t > t_P$ si ha $2^t > 4(t+1)$.
La funzione si puo' scrivere nella forma $C(t) = 2 \cdot 10^6 \frac{2^{t+1}}{t+1} = 4(10^6)\frac{2^t}{t+1}$; per $t \to \infty$ il numeratore e il denominatore divergono ma il numeratore diverge molto piu' velocemente, quindi la funzione diverge e non esistono asintoti orizzontali per il grafico della funzione.

(b) La funzione $C(t) = 2 \cdot 10^6 \frac{2^{3t+3}}{3t+3}$ e' definita per i valore reale di t per i quali risulta $t \neq -1$ Visto pero' che in questo caso particolare la variabile indipendente t rappresenta il tempo, possiamo assumere che il dominio sia l'insieme $D = \{t \in \mathbf{R}, \quad , t \geq 0\}$.
Per $t = 0$ la funzione vale $C(0) = 2^4 \frac{10^6}{3}$ visto che $2^{0+3} = 2^3$. Per $t > 0$ i valori di $C(t)$ aumentano, quindi il valore minimo che la funzione prende nel dominio e' $C(0) = 2^4 \frac{10^6}{3}$.

Come gia' osservato si ha $C(0) = 2^4 \frac{10^6}{3}$, mentre e' $C(4) = \frac{2^{16} \cdot 10^6}{15}$. Si osservano piu' di $16 \cdot 10^6$ cellule per quei valori di t per cui risulta $C(t) = 2 \cdot 10^6 \frac{2^{3t+3}}{3t+3} > 16 \cdot 10^6$ cioe'

$$2^{3t} > 3(t+1).$$

Per $t \geq 0$ questa disequazione ha certamente una soluzione, infatti se disegniamo i grafici della funzione a primo membro e quello della funzione a secondo membro si ha



I due grafici si incontrano nel punto P e per $t > t_P$ si ha $2^{3t} > 3(t+1)$.
La funzione si puo' scrivere nella forma $C(t) = 2 \cdot 10^6 \frac{2^{3t+3}}{3(t+1)} = 2^4(10^6)\frac{2^{3t}}{3(t+1)}$; per $t \to \infty$ il numeratore e il denominatore divergono ma il numeratore diverge molto piu' velocemente, quindi la funzione diverge e non esistono asintoti orizzontali per il grafico della funzione.