

Appendice A1

LA CONDIZIONE DI KUTTA E LA PORTANZA

A.1.1 EQUIVALENZA CILINDRO PROFILO: TRASFORMAZIONI DI JOUKOWSKI

Considerando nuovamente quanto esposto nel capitolo 6, si vuole cercare un'equivalenza tra la sezione del cilindro nel piano $z=(x_1, x_2)=x_1+ix_2$ (essendo i l'unità immaginaria) e la sezione di un profilo alare in un piano trasformato $\zeta=(\xi, \eta)=\xi+i\eta$. La trasformazione conforme di Joukowski permette di stabilire questa equivalenza

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z},$$

Sostituendo l'espressione della variabile z nella relazione precedente si ottiene l'espressione

$$\zeta = (x_1 + ix_2) + \frac{a^2}{(x_1+ix_2)} = \frac{(x_1^2+2ix_1x_2-x_2^2+a^2)(x_1-ix_2)}{x_1^2+x_2^2} = \frac{x_1(x_1^2+x_2^2+a^2)}{x_1^2+x_2^2} - i \frac{x_2(x_1^2-x_2^2+a^2)}{x_1^2+x_2^2} = \xi + i\eta,$$

e quindi le coordinate della trasformazione sui due assi saranno

$$\xi = \frac{x_1(x_1^2+x_2^2+a^2)}{x_1^2+x_2^2},$$
$$\eta = -\frac{x_2(-x_1^2-x_2^2+a^2)}{x_1^2+x_2^2}.$$

Nel caso in cui la circonferenza sia centrata nell'origine degli assi e abbia raggio pari ad a , è possibile verificare che la trasformazione di Joukowski genera una lastra piana di lunghezza (o meglio corda) pari a $4a$. Infatti, sostituendo le coordinate $z=(\pm a, 0)$ sul piano della circonferenza (intersezioni con l'asse x_1) si trova il punto sul piano trasformato di coordinate $\zeta=(\pm 2a, 0)$.

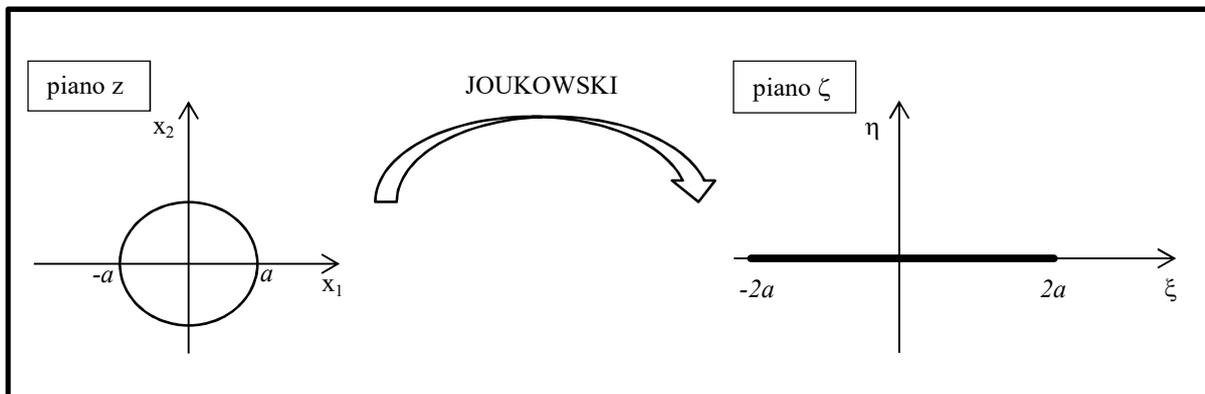


Figura A1. Trasformazione di Joukowski per la circonferenza fondamentale.

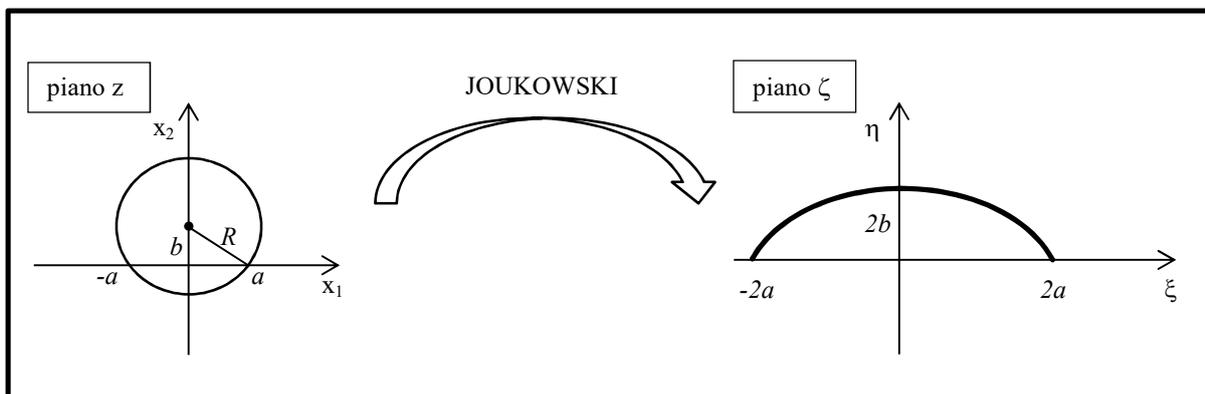


Figura A2. Trasformazione di Joukowski per la circonferenza traslata sull'asse verticale.

D'altra parte la stessa trasformazione fa corrispondere ai punti di coordinate $z=(0, \pm a)$ della circonferenza (intersezioni con l'asse x_2 positivo) il punto sul piano trasformato di coordinate $\zeta=(0, 0)$, cioè l'origine degli assi nel piano trasformato, mentre tutti gli altri punti della circonferenza si trovano sul segmento $(-2a, +2a)$ come rappresentato in figura A1. Questa circonferenza di raggio a , centrata nell'origine degli assi, è detta circonferenza fondamentale.

Per simulare l'effetto della curvatura di questa lastra è sufficiente spostare il centro della circonferenza lungo l'asse x_2 e aumentare il raggio in modo da richiedere sempre il passaggio per i punti $\pm a$ sull'asse x_1 . In particolare, indicando con R il raggio della circonferenza così ottenuta (tale raggio sarà maggiore di a) e con b lo spostamento lungo l'asse verticale, si otterrà una lastra piana di corda sempre pari a $4a$ e con ordinata massima pari a $2b$, come riportato in figura A2. Infatti i punti

lungo l'asse orizzontale, di coordinate $z=(\pm a, 0)$ si trasformeranno sempre nei punti $\zeta=(\pm 2a, 0)$ come in precedenza, mentre i punti lungo l'asse verticale di coordinate $z=(0, -R+b)$ e $z=(0, R+b)$ si trasformano entrambi nel punto $\zeta=(0, 2b)$ (quest'ultimo fatto può essere dimostrato applicando la trasformazione e ricordando che $R^2=a^2+b^2$):

$$\xi = \frac{x_1(x_1^2+x_2^2+a^2)}{x_1^2+x_2^2} = 0,$$

$$\eta = -\frac{x_2(x_1^2-x_2^2+a^2)}{x_1^2+x_2^2} = -\frac{(a^2-(b\pm R)^2)}{b\pm(a^2+b^2)^{1/2}} = 2b$$

Se invece trasliamo la circonferenza lungo l'asse orizzontale di una distanza c , richiedendo il passaggio per il punto $-a$ (come nel precedente, anche in questo caso il raggio della circonferenza sarà maggiore di a), potremo simulare l'effetto di spessore. Infatti, con riferimento alla figura A3, essendo $R=a+c$, risulterà $\pm(R^2-c^2)=\pm a(a+2c)$, e quindi i punti sulla circonferenza di coordinate $z=(0, \pm(R^2-c^2))$ si trasformeranno nei punti

$$\xi = \frac{x_1(x_1^2+x_2^2+a^2)}{x_1^2+x_2^2} = 0,$$

$$\eta = -\frac{x_2(x_1^2-x_2^2+a^2)}{x_1^2+x_2^2} = -\frac{(a^2-(R^2-c^2))}{\pm(R^2-c^2)^{1/2}} = \pm \frac{2ac}{(a^2+2ac)^{1/2}}$$

E quindi avremo un profilo simmetrico con spessore come in figura A3. Quindi con uno spostamento della circonferenza fondamentale sia lungo l'asse orizzontale che lungo quello verticale potremo simulare un profilo curvo non simmetrico con spessore come quello raffigurato in figura A4.

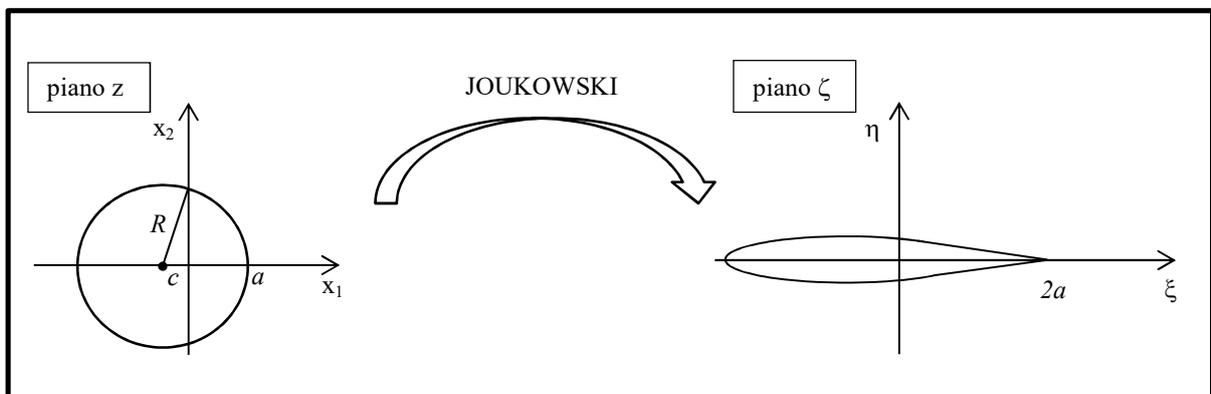


Figura A3. Trasformazione di Joukowski per la circonferenza traslata sull'asse orizzontale.

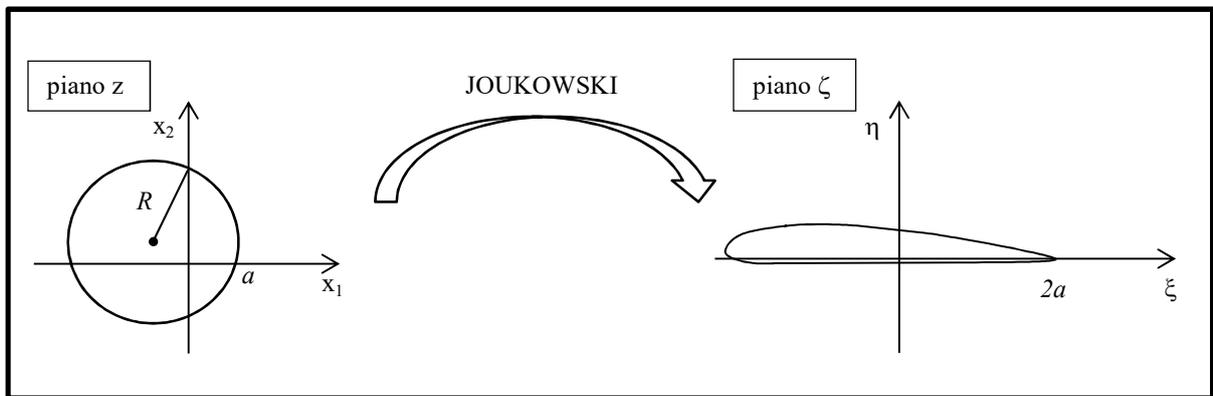


Figura A4. Trasformazione di Joukowski per la circonferenza traslata su entrambi gli assi.

A.1.2 LA CONDIZIONE DI KUTTA

In un flusso potenziale, come visto nel capitolo 6, è possibile collegare in maniera diretta la circolazione intorno ad un cilindro al seno dell'angolo rispetto alla direzione indisturbata, tramite il fattore $4\pi U_0 R$, essendo U_0 la velocità della corrente indisturbata e R il raggio del cilindro. Con riferimento alla figura A5 a sinistra, immaginiamo una corrente fluida che investe il cilindro da sinistra con un angolo α rispetto alla direzione x_1 .

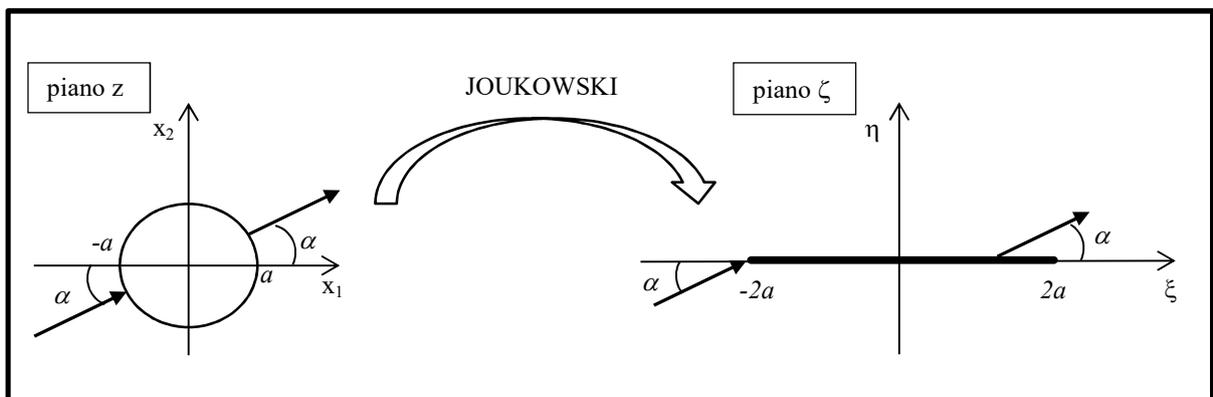


Figura A5. La condizione di Kutta per la circonferenza fondamentale.

Il punto di ristagno anteriore si troverà proprio in corrispondenza di questa direzione sulla superficie del cilindro e, in assenza di circolazione, il punto di ristagno posteriore si troverà esattamente dalla parte opposta del cilindro. Nel piano trasformato della lastra piana questa situazione corrisponderebbe a quella indicata nella figura A5 a destra, nella quale il punto di ristagno posteriore si troverà sul dorso della lastra. Questa situazione non corrisponde però alla realtà fisica, in quanto gli effetti della viscosità, pur essendo trascurabili in quasi tutto il campo, non lo sono in corrispondenza dello spigolo posteriore della lastra. Infatti, a causa dello spessore quasi infinitesimo, in questa zona i gradienti della velocità sono così elevati che non sarà più possibile trascurare i termini viscosi nelle equazioni della fluidodinamica e quindi non sarà valida l'approssimazione di flusso potenziale. Il flusso tenderà quindi a rallentare la sua velocità di aggiramento dello spigolo finché la velocità non sarà uguale a zero proprio in corrispondenza di questo. Il punto di ristagno posteriore si verrà quindi a posizionare nel punto sull'asse ξ di coordinata $2a$. Nel piano di partenza z , questo corrisponderà ad uno spostamento del punto di ristagno posteriore di un angolo α , fino al punto a sull'asse x_1 . Per quanto detto all'inizio del paragrafo, la circolazione necessaria ad effettuare questo spostamento di un angolo α sarà quindi data da

$$-\Gamma' = 4\pi R \rho U_0 \text{sen} \alpha ,$$

avendo assunto come verso positivo della circolazione quello anti-orario. Dal teorema di Kutta-Joukowski è possibile calcolare la portanza per unità di apertura alare

$$L = -\rho U_0 \Gamma' = 4\pi \rho R U_0^2 \text{sen} \alpha ,$$

e quindi il coefficiente di portanza (per unità di apertura alare) sarà uguale a

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U_0^2 l} = 2\pi \text{sen} \alpha ,$$

avendo assunto $l=4a=4R$ come dimensione caratteristica della lastra, facendo riferimento alla trasformazione di Joukowski in cui la dimensione caratteristica del cilindro R , corrisponde alla lunghezza della lastra piana $4R$.

Il coefficiente di portanza per una lastra piana è quindi uguale proporzionale al seno dell'angolo di incidenza, che per piccoli angoli di incidenza è equivalente all'angolo stesso, secondo un fattore 2π . Lo stesso valore può essere ottenuto per un profilo alare simmetrico con spessore diverso da zero, quale quello ottenuto dalla trasformazione di Joukowski raffigurata in figura A3.

Nel caso in cui la lastra sia incurvata, facendo riferimento alla figura A2, gli effetti viscosi sposteranno il punto di ristagno sempre nel punto $-a$ e questo renderà necessaria una nuova circolazione proporzionale al seno dell'angolo $(\alpha+\beta)$, essendo $\beta=\text{tg}(b/a)$

$$-\Gamma'' = 4\pi R U_o \text{sen}(\alpha + \beta) ,$$

e quindi, ripetendo il ragionamento precedente si otterrà un coefficiente di portanza

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U_o^2 l} = 2\pi \text{sen}(\alpha + \beta) ,$$

valido per una lastra piana con curvatura e anche per un profilo alare non-simmetrico con spessore differente da zero, quale quello raffigurato in figura A4. Per questo tipo di profili quindi esiste una portanza anche ad angolo di incidenza $\alpha=0$ e la portanza si annulla solo per angolo di incidenza negativo $\alpha=-\beta$ (la lastra piana e il profilo simmetrico si riferiscono al caso particolare $\beta=0$). Il coefficiente di proporzionalità è sempre quello della lastra piana o del profilo simmetrico, pari a 2π .

La teoria potenziale può quindi essere applicata anche nel caso di oggetti differenti da un cilindro con la precisazione che nel caso di oggetti affusolati, quali la lastra piana o i profili alari, è necessario introdurre una condizione aggiuntiva, la condizione di Kutta, che fa intervenire una circolazione aggiuntiva (potenziale) per giustificare lo spostamento del punto di ristagno. Il risultato ottenuto è molto vicino a quello osservato nel caso di un flusso viscoso, anche se il coefficiente di proporzionalità è solitamente inferiore a 2π e comunque dipendente dal numero di Reynolds. Questo è raffigurato nelle figure nella parte terminale del capitolo 8.

A.1.3 LA RESISTENZA INDOTTA

Consideriamo infine cosa accade nel caso in cui il corpo esaminato abbia dimensione trasversale finita e non infinita come nei profili. In pratica stiamo considerando cosa accade per un'ala finita. Senza entrare in dettagli, per i quali si rimanda a testi specifici, quali ad esempio Anderson – *Fundamentals of Aerodynamics* (Mc Graw-Hill), consideriamo che nel caso di flusso ideale (potenziale) è possibile dimostrare che la circolazione si conserva e non varia né nel tempo, né nello spazio (teoremi di Kelvin e di Helmholtz). Di conseguenza, in un'ala finita, non è possibile che la circolazione che si genera intorno all'ala possa improvvisamente annullarsi in corrispondenza delle estremità. D'altra parte, con riferimento alla figura A6, in presenza di portanza e quindi di circolazione differente da zero sull'ala, il campo di pressione intorno all'ala sarà tale da generare un flusso che va verso l'esterno nella parte inferiore dell'ala (essendo la pressione locale maggiore della pressione di riferimento) e verso l'interno dell'ala nella parte superiore (essendo la pressione minore della pressione di riferimento). Si verrà quindi a generare uno schema di circolazione (detto del vortice a staffa) nel quale la circolazione si ripiega nella scia con due vortici di estremità aventi circolazione con verso opposto. Tali vortici inducono sull'ala una velocità W (schema a destra in figura A6) che da origine alla così detta resistenza indotta (che si somma a quelle di forma e di attrito eventualmente presenti nel caso di viscosità non nulla).

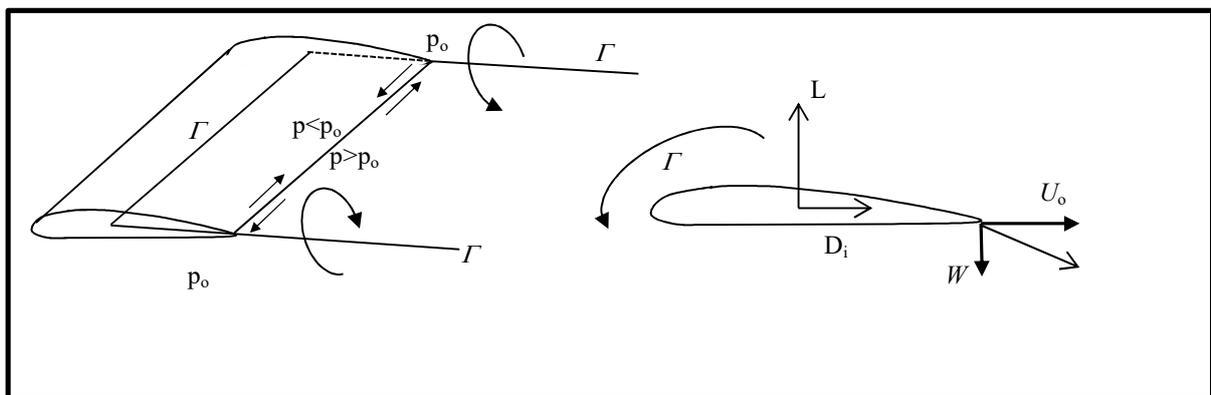


Figura A6. Schema di circolazione (a sinistra) e di forze (a destra) intorno ad un'ala finita.

Infatti, dal teorema di Kutta-Joukowski, la circolazione sull'ala, combinata vettorialmente con la velocità della corrente indisturbata, darà origine alla ben nota portanza

$$\underline{L} = -\rho \underline{U}_o \times \underline{\Gamma},$$

mentre la stessa circolazione, combinata vettorialmente con la velocità indotta dai vortici di estremità, che sull'ala è diretta verso il basso, darà origine ad una resistenza addizionale, detta resistenza indotta

$$\underline{D}_i = -\rho \underline{W} \times \underline{\Gamma},$$

Le forze sopra indicate sono entrambe per unità di apertura alare e quindi nel caso dell'ala finita vanno moltiplicate per l'apertura alare b . Utilizzando come circolazione quella definita nel paragrafo precedente e come lunghezza la dimensione della corda c ,

$$-\Gamma'' = 4\pi c U_o \text{sen}(\alpha + \beta),$$

considerando che la velocità indotta da un vortice a distanza $R=b$ dal suo centro è pari in modulo a $\Gamma''/4\pi b$ (capitolo 6), si può trovare che la resistenza indotta per unità di apertura alare è data da

$$D_i = \rho \frac{\Gamma''^2}{4\pi b} = \frac{\rho U_o^2 (4\pi c)^2 \text{sen}^2(\alpha + \beta)}{4\pi} = \frac{\rho 4\pi U_o^2 c^2 \text{sen}^2(\alpha + \beta)}{b} = \frac{c_L^2 \rho U_o^2 c^2}{\pi b},$$

e quindi il coefficiente della forza di resistenza indotta sarà, indicando con $S=bc$ la superficie dell'ala,

$$C_{D_i} = 2 \frac{c_L^2 c^2}{\pi S} = 2 \frac{c_L^2 c^2}{\pi bc} = 2 \frac{c_L^2}{\pi \lambda},$$

essendo $\lambda=b/c$ l'allungamento alare. Questo risultato indica che il coefficiente di resistenza indotta è proporzionale a quello di portanza (e infatti se non c'è portanza, non ci sarà circolazione e quindi non ci saranno vortici di estremità) e inversamente proporzionale all'allungamento alare (e infatti per minimizzare la resistenza indotta si dovranno costruire ali o pale con apertura molto maggiore della corda).