ANALISI VETTORIALE
LT FISICA 30046 - A.A. 2024/25
SCHEDA 05 - 20241101

EUGENIO MONTEFUSCO
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA
PIAZZALE ALDO MORO 5 - 00185 ROMA

ESERCIZIO 1. *Verificare che l'equazione*

$$\cosh(x_1 - x_2 + x_3) - e^{x_3} + x_3^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$$

definisce implicitamente in un intorno di $(1,1,0)$ *una funzione* $x_3 = g(x_1,x_2)$. *Scrivere il piano tangente e la retta normale alla superficie del grafico della funzione* g *nel punto considerato.*

ESERCIZIO 2. *Sia* $F(x_1,x_2,x_3) = e^{x_3} + x_1^2 x_2^2 x_3 - e^{x_1 x_2} + x_1^4 - x_2^4$.
i. Dimostrare che l'equazione $F(x_1,x_2,x_3) = 0$ *determina una funzione implicita* $x_3 = g(x_1,x_2)$ *definita per* (x,y) *in un intorno dell'origine,*
ii. determinare il valore di $g(0,0)$,
iii. riconoscere che l'origine è un punto stazionario per la g,
iv. riconoscere la natura di tale punto.

ESERCIZIO 3. *Assegnato il seguente vincolo*

$$\mathfrak{S} = \left\{(x_1,x_2,x_3) : \left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right]^2 = 4x_3^2\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

i. si provi che $\mathfrak{S}$ *è chiuso e limitato,*
ii. si trovino tutti i punti critici, vincolati su $\mathfrak{S}$, *della funzione* $f(x) = f(x_1,x_2,x_3) = x_3$,
iii. si scriva il polinomio di Taylor del secondo ordine della funzione implicitamente definita da $\mathfrak{S}$ *intorno ai punti critici trovati in ii.*

ESERCIZIO 4. *Si consideri la superficie*

$$x(u,w) = \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uw^2, -w + \frac{1}{3}w^3 - u^2 w, u^2 - w^2\right)$$

con $(u,w) \in K = \overline{B(0,2)}$. *Si verifichi che*
i. (x,K) *è una superficie regolare,*
ii. $\partial_1 x(u,w)$ *è sempre ortogonale a* $\partial_2 x(u,w)$,
iii. $\Delta x_i(u,w) = 0$ *per* $i = 1,2,3$.
Infine si scriva il versore normale alla superficie.

ESERCIZIO 5. *Data la funzione*

$$x(u_1,u_2) = (u_2\cos(u_1), u_2\sin(u_1), u_1) \qquad \textit{con } u = (u_1,u_2) \in K = [0,2\pi]^2$$

si verifichi che
i. (x,K) *è una superficie regolare,*
ii. $\partial_1 x(u_1,u_2)$ *è sempre ortogonale a* $\partial_2 x(u_1,u_2)$.

Infine si calcoli la lunghezza della curva sulla superficie prodotta dalla composizione della parametrizzazione della superficie con la curva contenuta in K *di equazioni* $\{\phi(s) = (s, u_{0,2}) : s \in [0, 2\pi]\}$ *e* $\{\psi(s) = (u_{0,1}, s) : s \in [0, 2\pi]\}$.

ESERCIZIO 6. *Data l'applicazione*

$$x(u) = (u_1, u_2, au_1 + bu_2) \qquad \textit{con } u \in K = [0, \pi]^2$$

si provi che
i. (x, K) *è una superficie regolare,*
ii. Im(x) *è un piano affine in* $\mathbb{R}^3$.
Infine si calcoli la lunghezza della curva sulla superficie prodotta dalla composizione della parametrizzazione della superficie con la curva contenuta in K *di equazioni* $\{\phi(s) = (s, s) : s \in [0, \pi]\}$.

ESERCIZIO 7. *Data la curva* $\phi(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$, *con* $t \in [0, 2\pi]$ *ed* $a, b > 0$, *la cui immagine è contenuta in* $\mathbb{R}^2$, *si provi che la curva è regolare e che divide il piano in due aperti connessi, uno limitato e uno non limitato.*

ESERCIZIO 8. *Date le seguenti coppie di funzioni e domini*

$$y(u, w) = (\cos(w), \sin(w), u) \qquad (u, w) \in K = [0, 2\pi] \times [-1, 1]$$

$$z(u, w) = (u, w, u^2w^2) \qquad (u, w) \in K = [0, 1]^2$$

$$r(u, w) = (\cos(u), \sin(u)\cos(w), \sin(w)\sin(u)) \qquad (u, w) \in K = [0, \pi]^2$$

$$s(u, w) = (w\cos(u), w\sin(u), w) \qquad (u, w) \in [0, 2\pi]^2$$

dove $a, b \in (0, +\infty)$, *si risponda alle seguenti questioni*
i. si verifichi che si tratta di superfici regolari,
ii. si scriva esplicitamente il versore normale $n(u, w)$,
iii. si calcolino i coefficienti della prima forma quadratica fondamentale.

SVOLGIMENTI

ESERCIZIO 1. *Verificare che l'equazione*

$$\cosh(x_1 - x_2 + x_3) - e^{x_3} + x_3^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$$

definisce implicitamente in un intorno di $(1, 1, 0)$ *una funzione* $x_3 = g(x_1, x_2)$. *Scrivere il piano tangente e la retta normale alla superficie del grafico della funzione* g *nel punto considerato.*

DISCUSSIONE. Cominciamo verificando che $a = (1, 1, 0)$ appartiene la luogo delle soluzioni dell'equazione, infatti vale

$$\cosh(a_1 - a_2 + a_3) - e^{a_3} + a_3^2 + a_1^2 - a_2^2 = \cosh(1 - 1 + 0) - e^0 + 0^2 + 1^2 - 1^2 = 0$$

ricordando che $\cosh(s) = [e^s + e^{-s}]/2$. Ponendo $G(x_1, x_2, x_3) = \cosh(x_1 - x_2 + x_3) - e^{x_3} + x_3^2 + x_1^2 - x_2^2$ e osservando che $G \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e che

$$\partial_3 G(x) = \sinh(x_1 - x_2 + x_3) - e^{x_3} + 2x_3 \qquad \text{da cui} \qquad \partial_3 G(a) = \sinh(1 - 1 + 0) - e^0 + 2 \cdot 0 = -1 \neq 0$$

il teorema della funzione implicita di Dini garantisce l'esistenza di una funzione regolare $g : B((1, 1), \delta) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$g(1, 1) = 0$$

$$G(x_1, x_2, x_3) = 0 \quad \text{per} \quad (x_1, x_2, x_3) \in B(a, \delta) \qquad \text{se e solo se} \qquad x_3 = g(x_1, x_2)$$

Inoltre è possibile provare che valgono le seguenti identità

$$\partial_1 g(x_1, x_2) = -\frac{\partial_1 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\partial_3 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))} \qquad \text{e} \qquad \partial_2 g(x_1, x_2) = -\frac{\partial_2 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\partial_3 G(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}$$

e poiché vale che

$$\partial_1 G(x) = \sinh(x_1 - x_2 + x_3) + 2x_1 \qquad \text{e} \qquad \partial_2 G(x) = -\sinh(x_1 - x_2 + x_3) - 2x_2$$

otteniamo

$$\partial_1 g(1,1) = -\frac{\partial_1 G(a)}{\partial_3 G(a)} = 2 \qquad \text{e} \qquad \partial_2 g(1,1) = -\frac{\partial_2 G(a)}{\partial_3 G(a)} = -2$$

da cui possiamo ricavare immediatamente l'equazione del piano tangente al grafico di g in a

$$x_3 = g(1,1) + \nabla g(1,1) \cdot ((x_1, x_2) - (1,1)) = 2(x_1 - 1) - 2(x_2 - 1) = 2x_1 - 2x_2$$

Il piano tangente può essere pensato come una superficie di livello di equazione $\{f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\}$, in questo caso $\nabla f(1,1,0) = (2, -2, -1)$ e la retta normale ha equazione parametrica

$$x(t) = \nabla f(1,1,0)t + (1,1,0) = (2t+1, -2t+1, -t) \qquad t \in \mathbb{R}$$

o equazione cartesiana

$$\{x_1 + 2x_3 - 1 = 0, x_2 - 2x_3 - 1 = 0\}$$

queste ultime espressioni concludono lo svolgimento dell'esercizio. ■

ESERCIZIO 2. *Sia* $F(x_1, x_2, x_3) = e^{x_3} + x_1^2 x_2^2 x_3 - e^{x_1 x_2} + x_1^4 - x_2^4$.
i. Dimostrare che l'equazione $F(x_1, x_2, x_3) = 0$ *determina una funzione implicita* $x_3 = g(x_1, x_2)$ *definita per* (x, y) *in un intorno dell'origine,*
ii. determinare il valore di $g(0,0)$*,*
iii. riconoscere che l'origine è un punto stazionario per la g*,*
iv. riconoscere la natura di tale punto.

DISCUSSIONE. i. Applichiamo il teorema delle funzioni implicite alla funzione F nel punto $(0, 0, x_3^*)$ con x_3^* tale che $F(0, 0, x_3^*) = 0$. Essendo $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \subseteq C^1(\mathbb{R}^3)$ e anche

$$\partial_3 F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 + e_3^x \qquad \partial_3 F(0, 0, x_3^*) = e^{x_3^*} \neq 0$$

sono verificate le ipotesi del teorema: quindi esiste un'unica funzione $g(x_1, x_2)$ definita in un intorno $B_\varepsilon = \{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \varepsilon\}$ dell'origine $(0,0)$ a valori in $(x_3^* - r, x_3^* + r)$, con $r > 0$, tale che

$$F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = 0 \qquad \text{per ogni } (x_1, x_2) \in B_\varepsilon$$

ii. Si ha $g(0,0) = x_3^*$. Il valore x_3^* è determinato dall'equazione

$$F(0, 0, x_3^*) = 0 \qquad \text{ovvero} \qquad e^{x_3^*} - 1 = 0$$

da cui $x_3^* = 0$.
ii. Dato che $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ allora $g \in C^\infty(B_\varepsilon)$. Derivando parzialmente rispetto a x_1 e x_2 la relazione $F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = 0$, usando la formula di derivazione delle funzioni composte, troviamo rispettivamente

$$\partial_1 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) + \partial_3 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) \partial_1 g(x_1, x_2) = 0 \qquad \text{da cui} \qquad \partial_1 g(x_1, x_2) = -\frac{\partial_1 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\partial_3 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}$$

$$\partial_2 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) + \partial_3 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) \partial_2 g(x_1, x_2) = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \partial_2 g(x_1, x_2) = -\frac{\partial_2 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}{\partial_3 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2))}$$

E poiché

$$\partial_1 F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^3 + 2x_1 x_2^2 x_3 - x_2 e^{x_1 x_2} \qquad \partial_2 F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 x_2 x_3 - x_1 e^{x_1 x_2} - 4x_2^3$$

si trova $\partial_1 F(0,0,0) = \partial_2 F(0,0,0) = 0$ da cui $\nabla g(0,0) = (0,0)$, quindi il punto $(0,0)$ è stazionario per la funzione g.
iv. Per studiare la natura del punto critico non ci resta che calcolare le derivate seconde di g. Dalle identità

$$\partial_{11} F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = \partial_1 \left(\partial_1 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) + \partial_3 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) \partial_1 g(x_1, x_2) \right) = 0$$
$$\partial_{22} F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = \partial_2 \left(\partial_2 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) + \partial_3 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) \partial_2 g(x_1, x_2) \right) = 0$$
$$\partial_{12} F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) = \partial_2 \left(\partial_1 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) + \partial_3 F(x_1, x_2, g(x_1, x_2)) \partial_1 g(x_1, x_2) \right) = 0$$

ricaviamo le seguenti relazioni

$$\partial_{11}F + 2\partial_{13}F\partial_1 g + \partial_{33}F|\partial_1 g|^2 + \partial_3 F\partial_{11}g = 0$$
$$\partial_{22}F + 2\partial_{23}F\partial_2 g + \partial_{33}F|\partial_2 g|^2 + \partial_3 F\partial_{22}g = 0$$
$$\partial_{12}F + \partial_{13}F\partial_2 g + \partial_{23}F\partial_1 g + \partial_{33}F\partial_1 g\partial_2 g + \partial_3 F\partial_{12}g = 0$$

Dato che $\partial_1 g(0,0) = \partial_2 g(0,0) = 0$ si trova

$$\partial_{22}g(0,0) = -\frac{\partial_{11}F(0,0,0)}{\partial_3 F(0,0,0)} \qquad \partial_{12}g(0,0) = -\frac{\partial_{12}F(0,0,0)}{\partial_3 F(0,0,0)} \qquad \partial_{22}g(0,0) = -\frac{\partial_{22}F(0,0,0)}{\partial_3 F(0,0,0)}$$

e, con alcuni calcoli, ricaviamo che

$$\begin{array}{ll} \partial_{11}F(x_1,x_2,x_3) = 12x_1^2 - x_2^2 e^{x_1x_2y} + 2x_2^2x_3 & \partial_{11}F(0,0,0) = 0 \\ \partial_{12}F(x_1,x_2,x_3) = 4x_1x_2x_3 - x_1x_2e^{x_1x_2} - e^{x_1x_2} & \partial_{12}F(0,0,0) = -1 \\ \partial_{22}F(x_1,x_2,x_3) = -e^{x_1x_2}x_1^2 - 12x_2^2 + 2x_1^2x_3 & \partial_{22}F(0,0,0) = 0 \end{array}$$

da cui si ottiene

$$\partial_{11}g(0,0) = \partial_{22}g(0,0) = 0 \qquad \partial_{12}g(0,0) = 1$$

Il determinante della matrice hessiana vale $\det[Hg(0,0)] = -1 < 0$, per il test di Sylvester $Hg(0,0)$ è indefinita e, dal test dell'hessiano, segue che $(0,0)$ è un punto di sella per g. ■

Esercizio 3. *Assegnato il seguente vincolo*

$$\mathcal{S} = \left\{(x_1,x_2,x_3) : \left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right]^2 = 4x_3^2\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

i. si provi che $\mathcal{S}$ è chiuso e limitato,
ii. si trovino tutti i punti critici, vincolati su $\mathcal{S}$, della funzione $f(x) = f(x_1,x_2,x_3) = x_3$,
iii. si scriva il polinomio di Taylor del secondo ordine della funzione implicitamente definita da $\mathcal{S}$ intorno ai punti critici trovati in ii.

Discussione. i. L'insieme in questione è definito come

$$\mathcal{S} = \left\{H(x) = \left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right]^2 - 4x_3^2 = 0\right\}$$

essendo la funzione $H \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \subseteq C^0(\mathbb{R}^3)$ il nostro vincolo risulta chiuso, perché controimmagine di un chiuso in $\mathbb{R}$. La limitatezza dell'oggetto segue dall'osservazione che la disuguaglianza

$$x_3^4 \leq \left[x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right]^2 = 4x_3^2 \qquad \text{implica} \qquad |x_3| \leq 2$$

da cui possiamo ricavare

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 \leq 4x_3^2 \leq 16$$

Le precedenti disuguaglianze implicano la limitatezza del vincolo, visto che abbiamo provato che

$$\mathcal{S} \subseteq \overline{B(0,2)} \times [-2,2] \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

quindi possiamo concludere che il nostro insieme è chiuso e limitato.
ii. La funzione $f(x_1,x_2,x_3) = x_3$ ha gradiente costante (e non nullo) in tutto lo spazio (esattamente $\nabla f(x) = e_3$ in tutto $\mathbb{R}^3$), quindi la funzione non ha punti critici liberi, il teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza (almeno) del massimo e del minimo assoluto di f sul vincolo, per cui ricorriamo al metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Prima di tutto notiamo che vale

$$\nabla H(x) = (\partial_1 H(x), \partial_2 H(x), \partial_3 H(x)) = 4\left((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)x_1, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)x_2, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2)x_3\right)$$

Si noti che tale vettore può avere tutte le componenti nulle in alcuni punti di $\mathcal{S}$, cioè la superficie ha punti singolari, in cui non sembra possibile applicare il teorema delle funzioni implicite.
I punti critici vincolati di f su $\mathcal{S}$ sono punti in cui il vettore $\nabla H(x)$ è parallelo al vettore $\nabla f(x) = e_3$, quindi sono punti le cui coordinate, per qualche $c \in \mathbb{R}$, sono soluzioni del seguente sistema

$$\left((x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)x_1, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)x_2, (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2)x_3\right) = (0,0,c) \qquad x \in \mathcal{S}$$

È subito evidente che $x_1 = x_2 = 0$, quindi abbiamo

$$(x_3^2 - 2)x_3 = c \qquad \text{e} \qquad x_3^4 = 4x_3^2$$

quindi i punti critici vincolati sono solo i punti $A(0,0,2)$ e $B(0,0,-2)$ (oltre ad O, del quale non è possibile studiare la natura tramite il teorema di Dini).
iii. Nella precedente discussione abbiamo, di fatto, verificato che

$$\partial_3 H(A), \partial_3 H(A) > 0$$

quindi intorno a tutti e due i punti possiamo utilizzare il teorema delle funzioni implicite per affermare che esistono 2 funzioni $\phi_A(x_1,x_2)$ e $\phi_B(x_1,x_2)$ tali che

$$H(x_1,x_2,\phi_A(x_1,x_2)) = H(x_1,x_2,\phi_B(x_1,x_2)) = 0 \qquad \text{per ogni } (x_1,x_2) \in B(0,\delta) \subseteq \mathbb{R}^2$$

con $\phi_A(0) = 2$ e $\phi_B(0,0) = -2$. Nel resto dello svolgimento prendiamo in esame solo la funzione ϕ_A.
Per scrivere il polinomio di Taylor del secondo ordine della funzione $\phi_A(x_1,x_2)$ abbiamo bisogno del gradiente e della matrice hessiana di H. Avendo già calcolato $\nabla H(x_1,x_2,x_3)$ abbiamo che

$$\nabla\phi_A(x_1,x_2) = (\partial_1\phi_A(x_1,x_2), \partial_2\phi_A(x_1,x_2)) = -\left(\frac{\partial_1 H(x_1,x_2,\phi_A(x_1,x_2))}{\partial_2 H(x_1,x_2,\phi_A(x_1,x_2))}, \frac{\partial_3 H(x_1,x_2,\phi_A(x_1,x_3))}{\partial_2 H(x_1,x_2,\phi_A(x_1,x_2))}\right)$$

e sostituendo i valori $\nabla\phi_A(0,0) = (0,0)$, quindi O è un punto critico della funzione ϕ_A. Per determinarne la natura proviamo a scrivere la matrice hessiana, ricordando che l'hessiano è una matrice simmetrica (H è un polinomio, quindi di classe C^∞) e svolgendo qualche "agile" conto abbiamo

$$\begin{aligned}
&\nabla H(x) = \left(4x_1^3 + 4x_1x_2^2 + 4x_1x_3^2, 4x_1^2x_2 + 4x_2^3 + 4x_2x_3^2, 4x_1^2x_3 + 4x_2^2x_3 + 4x_3^3 - 8x_3\right)\\
&\partial_{11}H(x) = 12x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 \qquad \partial_{12}H(x) = \partial_{21}H(x) = 8x_1x_2 \qquad \partial_{13}H(x) = \partial_{31}H(x) = 8x_1x_3\\
&\partial_{22}H(x) = 4x_1^2 + 12x_2^2 + 4x_3^2 \qquad \partial_{23}H(x) = 8x_2x_3 \qquad \partial_{33}H(x) = 4\left(x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2\right)
\end{aligned}$$

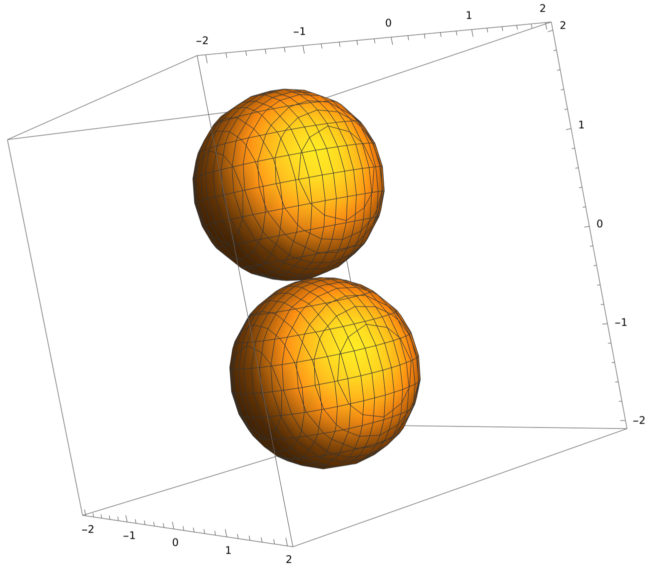
A questo punto dello svolgimento facciamo ricorso alla teoria, precisamente al teorema di derivazione delle funzioni composte, che ci permette di scrivere

$$\begin{aligned}
\partial_{11}\phi_A(x_1,x_2) &= -\left[\frac{(\partial_{11}H + \partial_{13}H\partial_1\phi_A)\partial_3 H - \partial_1 H[\partial_{31}H(x) + \partial_{33}H\partial_1\phi_A)}{[\partial_3 H]^2}\right](x_1,x_2,\phi_A(x_1,x_2))\\
&= -\left[\frac{(\partial_{11}H\partial_3 H - \partial_{13}H\partial_1 H)\partial_3 H - \partial_1 H[\partial_{31}H(x)\partial_3 H - \partial_{33}H\partial_1 H)}{[\partial_3 H]^3}\right](x_1,x_2,\phi_A(x_1,x_2))\\
&= -\left[\frac{\partial_{11}H[\partial_3 H]^2 - (\partial_{13}H + \partial_{31}H)\partial_1 H\partial_3 H + \partial_{33}H[\partial_1 H]^2}{[\partial_3 H]^3}\right](x_1,x_2\phi_A(x_1,x_2))\\
\partial_{12}\phi_A(x_1,x_2) &= -\left[\frac{\partial_{12}H[\partial_3 H]^2 - \partial_{13}H\partial_2 H\partial_3 H - \partial_{23}H\partial_1 H\partial_3 H + \partial_{33}H\partial_1 H\partial_2 H}{[\partial_3 H]^3}\right](x_1,x_2\phi_A(x_1,x_2))\\
\partial_{22}\phi_A(x_1,x_2) &= -\left[\frac{\partial_{22}H[\partial_3 H]^2 - 2\partial_{23}H\partial_2 H\partial_3 H + \partial_{33}H[\partial_2 H]^2}{[\partial_3 H]^3}\right](x_1,x_2\phi_A(x_1,x_2))
\end{aligned}$$

Ricordando lo sviluppo di Taylor (al secondo ordine) per funzioni in due variabili e le formule scritte sopra, troviamo

$$\begin{aligned}
\phi_A(x_1,x_2) &= \phi_A(0,0) + \nabla\phi_A(0,0)\cdot(x_1,x_2) + \frac{1}{2}\left[\partial_{11}\phi_A(0,0)x_1^2 + 2\partial_{12}\phi_A(0,0)x_1x_2 + \partial_{22}\phi_A(0,0)x_2^2\right] + o(x_1^2 + x_2^2)\\
&= \phi_A(0,0) - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial_{11}H(0,0,\phi_A(0,0))}{\partial_3 H(0,0,\phi_A(0,0))}x_1^2 + \frac{\partial_{22}H(0,0,\phi_A(0,0))}{\partial_3 H(0,0,\phi_A(0,0))}x_2^2\right] + o(x_1^2 + x_2^2)\\
&= 2 - \frac{1}{2}\left[x_1^2 + x_2^2\right] + o(x_1^2 + x_2^2)
\end{aligned}$$

e otteniamo che (0,0) è un punto di massimo (locale) per la funzione ϕ_A. Concludiamo con una rappresentazione grafica del vincolo $\mathcal{S}$



sottolineando il fatto che il punto di contatto tra le due sfere è O, ed è un punto singolare perché non è possibile descrivere il vincolo come un grafico in ogni intorno del punto... ■

ESERCIZIO 4. *Si consideri la superficie*

$$x(u,w) = \left(u - \frac{1}{3}u^3 + uw^2, -w + \frac{1}{3}w^3 - u^2w, u^2 - w^2\right)$$

con $(u,w) \in K = \overline{B(O,2)}$. *Si verifichi se*
i. (x,K) *è una superficie regolare,*
ii. $\partial_1 x(u,w)$ *è sempre ortogonale a* $\partial_2 x(u,w)$,
iii. $\Delta x_i(u,w) = 0$ *per* $i = 1,2,3$.
Infine si scriva il versore normale alla superficie.

DISCUSSIONE. i. iniziamo osservando che K è la chiusura di una palla, che è un aperto connesso e che le funzioni $x_j(u,w)$ sono di classe C^∞ essendo polinomi. Cosa possiamo dire riguardo all'iniettivtà dell'applicazione? Dovremmo studiare il sistema

$$x(u_1,w_1) = x(u_2,w_2) \qquad \text{cioè}$$

$$\left(u_1 - \frac{1}{3}u_1^3 + u_1w_1^2, -w_1 + \frac{1}{3}w_1^3 - u_1^2w_1, u_1^2 - w_1^2\right) = \left(u_2 - \frac{1}{3}u_2^3 + u_2w_2^2, -w_2 + \frac{1}{3}w_2^3 - u_2^2w_2, u_2^2 - w_2^2\right)$$

ed è evidente che non sia facile da analizzare, proviamo a ridiscutere questa uguaglianza utilizzando le variabili polari nel piano (u,w), cioè $(u,w) = r(\cos(\theta),\sin(\theta))$, da cui otteniamo

$$x(r_1,\theta_1) = x(r_2,\theta_2) \qquad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} r_1\cos(\theta_1)\left(1 - \frac{1}{3}r_1^2\cos^2(\theta_1) + r_1^2\sin^2(\theta_1)\right) = r_2\cos(\theta_2)\left(1 - \frac{1}{3}r_2^2\cos^2(\theta_2) + r_2^2\sin^2(\theta_2)\right) \\ -r_1\sin(\theta_1)\left(1 - \frac{1}{3}r_1^2\sin^2(\theta_1) + r_1^2\cos^2(\theta_1)\right) = -r_2\sin(\theta_2)\left(1 - \frac{1}{3}r_2^2\sin^2(\theta_2) + r_2^2\cos^2(\theta_2)\right) \\ r_1^2\left(\cos^2(\theta_1) - \sin^2(\theta_1)\right) = r_2^2\left(\cos^2(\theta_2) - \sin^2(\theta_2)\right) \end{cases}$$

il precedente sistema può essere rielaborato nel seguente modo

$$\begin{cases} r_1\cos(\theta_1) - \frac{1}{3}r_1^3\cos(3\theta_1) = r_2\cos(\theta_2) - \frac{1}{3}r_2^3\cos(3\theta_2) \\ -r_1\sin(\theta_1) - \frac{1}{3}r_1^3\sin(3\theta_1) = -r_2\sin(\theta_2) - \frac{1}{3}r_2^3\sin(3\theta_2) \\ r_1^2\cos(2\theta_1) = r_2^2\cos(2\theta_2) \end{cases}$$

Poiché, per $k = 1, 2$, vale che

$$\begin{aligned} x_1^2(r_k, \theta_k) + x_1^2(r_k, \theta_k) &= r_k^2 \cos^2(\theta_k) - \frac{2}{3} r_k^4 \cos(\theta_k)\cos(3\theta_k) + \frac{1}{9} r_k^6 \cos^2(3\theta_k) + r_k^2 \sin^2(\theta_k) \\ &\quad + \frac{2}{3} r_k^4 \sin(\theta_k)\sin(3\theta_k) + \frac{1}{9} r_k^6 \sin^2(3\theta_k) \\ &= r_k^2 + \frac{1}{9} r_k^6 - \frac{2}{3} r_k^4 \left[\cos(\theta_k)\cos(3\theta_k) - \sin(\theta_k)\sin(3\theta_k)\right] \\ &= r_k^2 + \frac{1}{9} r_k^6 - \frac{2}{3} r_k^4 \cos(4\theta_k) = r_k^2 \left[1 + \frac{r_k^2}{3}\right]^2 - \frac{4}{3} r_k^4 \cos^2(2\theta_k) \end{aligned}$$

e il sistema diventa

$$\begin{cases} r_1^2 \cos(2\theta_1) = r_2^2 \cos(2\theta_2) \\ r_1^2 \left[1 + \frac{r_1^2}{3}\right]^2 - \frac{4}{3}\left[r_1^2 \cos(2\theta_1)\right]^2 = r_2^2 \left[1 + \frac{r_2^2}{3}\right]^2 - \frac{4}{3}\left[r_2^2 \cos(2\theta_2)\right]^2 \end{cases}$$

che ci permette di affermare che

$$\left[r_1 + \frac{r_1^3}{3}\right]^2 = \left[r_2 + \frac{r_2^3}{3}\right]^2 \qquad \text{da cui ricaviamo} \qquad r_1 = r_2$$

visto che $r \geq 0$ e la funzione $s \longmapsto (s + s^3/3)$ è monotona strattemente crescente e quindi iniettiva. Allora abbiamo mostrato che due punti hanno la stessa immagine tramite l'applicazione x se e soltanto se $\cos(2\theta_1) = \cos(2\theta_2)$, che fornisce le alternative

$$\text{o} \quad \theta_1 = \theta_2 \quad \text{o} \quad \theta_1 = \pi - \theta_2 \quad \text{o} \quad \theta_1 = \pi + \theta_2 \quad \text{o} \quad \theta_1 = 2\pi - \theta_2$$

le varie possibilità provano che x, in generale, non è iniettiva: è possibile rendere l'applicazione iniettiva solo cambiando opportunamente K in modo da escludere le alternative precedenti (per esempio prendendo $K \subseteq \{u, w \geq 0\}$. Proseguiamo in ogni caso la discussione delle richieste dell'esercizio calcolando i vettori tangenti

$$\partial_1 x(u, w) = \left(1 - u^2 + w^2, -2uw, 2u\right) \qquad \text{e} \qquad \partial_2 x(u, w) = \left(2uw, -1 + w^2 - u^2, -2w\right)$$

e ricaviamo il loro prodotto vettoriale

$$\partial_1 x(u, w) \wedge \partial_2 x(u, w) = \left(2u(1 + u^2 + w^2), 2w(1 + u^2 + w^2), (u^2 + w^2)^2 - 1\right)$$

da cui possiamo ottenere il versore normale (rispondendo così alla domanda), infatti vale che

$$\begin{aligned} n(u, w) &= \frac{\partial_1 x(u, w) \wedge \partial_2 x(u, w)}{\|\partial_1 x(u, w) \wedge \partial_2 x(u, w)\|_2} = \frac{\left(2u(1 + u^2 + w^2), 2w(1 + u^2 + w^2), (u^2 + w^2)^2 - 1\right)}{\left((u^2 + w^2) + 1\right)^2} \\ &= \left(\frac{2u}{(1 + u^2 + w^2)}, \frac{2w}{(1 + u^2 + w^2)}, \frac{(u^2 + w^2)^2 - 1}{(1 + u^2 + w^2)^2}\right) \end{aligned}$$

ii. Eseguiamo la richiesta del testo per ottenere che

$$\begin{aligned} \partial_1 x(u, w) \cdot \partial_2 x(u, w) &= \left(1 - u^2 + w^2, -2uw, 2u\right) \cdot \left(2uw, -1 + w^2 - u^2, -2w\right) \\ &= 2uw - 2u^3 w + 2uw^3 + 2uw - 2uw^3 + 2u^3 w - 4uw = 0 \end{aligned}$$

come speravamo.

iii. Per concludere dobbiamo calcolare l'operatore di Laplace (anche detto laplaciano), rispetto alle variabili u e w, delle tre componenti dell'applicazione x

$$\Delta x_1(u, w) = \partial_{11}\left[u - \frac{1}{3}u^3 + uw^2\right] + \partial_{22}\left[u - \frac{1}{3}u^3 + uw^2\right] = 2u - 2u = 0$$

$$\Delta x_2(u, w) = \partial_{11}\left[-w + \frac{1}{3}w^3 - u^2 w\right] + \partial_{22}\left[-w + \frac{1}{3}w^3 - u^2 w\right] = -2w + 2w = 0$$

$$\Delta x_3(u, w) = \partial_{11}\left[u^2 - w^2\right] + \partial_{22}\left[u^2 - w^2\right] = 2 + (-2) = 0$$

dunque le tre componenti dell'applicazione x sono funzioni armoniche. ■

ESERCIZIO 5. *Data la funzione*

$$x(u_1,u_2) = (u_2\cos(u_1), u_2\sin(u_1), u_1) \qquad \textit{con } u = (u_1,u_2) \in K = [0,2\pi]^2$$

si verifichi che
i. (x,K) *è una superficie regolare,*
ii. $\partial_1 x(u_1,u_2)$ *è sempre ortogonale a* $\partial_2 x(u_1,u_2)$.
Infine si calcoli la lunghezza della curva sulla superficie prodotta dalla composizione della parametrizzazione della superficie con la curva contenuta in K *di equazioni* $\{\phi(s) = (s, u_{0,2}) : s \in [0,2\pi]\}$ *e* $\{\psi(s) = (u_{0,1}, s) : s \in [0,2\pi]\}$.

DISCUSSIONE. i. verificare che (x,K) è una superficie regolare significa controllare che K sia la chiusura di un aperto connesso (il che è vero, visto che K è un rettangolo chiuso), osservare se x sia di classe C^1 e iniettiva in int(K) e controllare il rango della matrice jacobiana di x. Controlliamo l'iniettività dell'applicazione studiando cosa possiamo dire di due punti che hanno la stessa immagine

$$x(u_1,u_2) = x(w_1,w_2) \qquad \text{significa} \qquad (u_2\cos(u_1), u_2\sin(u_1), u_1) = (w_2\cos(w_1), w_2\sin(w_1), w_1)$$

La terza componente dei vettori ci dà immediatamente l'informazione che $u_1 = w_1$, da cui segue che, se $u_1 = w_1 \neq 0$, $u_2 = w_2$ visto che le funzioni trigonometriche producono lo stesso output. Si noti che $u_1 = w_1 = 0$ descrive punti sul bordo di K, quindi due punti hanno la stessa immagine solo se sono lo stesso punto e questo significa che x è iniettiva.
A questo punto possiamo osservare che

$$\partial_1 x(u) = (-u_2\sin(u_1), u_2\cos(u_1), 1) \qquad \partial_2 x(u) = (\cos(u_1), \sin(u_1), 0)$$
$$[\partial_1 x \wedge \partial_2 x](u) = (-\sin(u_1), \cos(u_1), -u_2)$$

e il fatto che $\|\partial_1 x \wedge \partial_2 x\|^2 = 1 + u_2^2$ per ogni $(u_1,u_2) \in K$ conclude la verifica.
ii. L'ortogonalità richiesta consiste nella seguente semplice verifica

$$\partial_1 x(u)\cdot\partial_2 x(u) = (-u_2\sin(u_1), u_2\cos(u_1), 1)\cdot(\cos(u_1), \sin(u_1), 0) = -u_2\sin(u_1)\cos(u_1) + u_2\sin(u_1)\cos(u_1) = 0$$

Per calcolare la lunghezza delle curve ricorriamo alla caratterizzazione tramite integrale del modulo del vettore tangente. Poiché

$$\frac{d}{ds}x(\phi(s)) = (-u_{0,2}\sin(s), u_{0,2}\cos(s), 1)$$

abbiamo che

$$L(\phi) = \int_0^\pi \left\|\frac{d}{ds}x(\phi(s))\right\| ds = \int_0^\pi \left[u_{0,2}^2\sin^2(s) + u_{0,2}^2\cos^2(s) + 1\right]^{1/2} ds = \int_0^\pi \sqrt{u_{0,2}^2 + 1}ds = \pi[u_{0,2}^2 + 1]^{1/2}$$

e analogamente

$$L(\psi) = \int_0^\pi \left\|\frac{d}{ds}x(\psi(s))\right\|_2 ds = \int_0^\pi \left\|(\cos(u_{0,1}), \sin(u_{0,1}), 0)\right\|_2 ds = \pi$$

Come era da aspettarsi le due curve hanno lunghezze differenti, pur essendo prodotte da curve di ugual lunghezza nel piano delle variabili u, questo perché la superficie curva differentemente le linee con u_1 o u_2 costante. ■

ESERCIZIO 6. *Data l'applicazione*

$$\phi(u) = (u_1, u_2, au_1 + bu_2) \qquad \textit{con } u \in K = [0,\pi]^2$$

si provi che
i. (ϕ, K) *è una superficie regolare,*
ii. Im(ϕ) *è un(a porzione di) piano affine in* $\mathbb{R}^3$.
Infine si calcoli la lunghezza della curva sulla superficie prodotta dalla composizione della parametrizzazione della superficie con la curva contenuta in K *di equazioni* $\{u(s) = (s,s) : s \in [0,\pi]\}$.

DISCUSSIONE. i. K è un quadrato, chiusura dell'aperto connesso $(0,\pi)^2$, mentre la prametrizzazione ϕ è iniettiva (lo è considerando le sue prime due componenti) e di classe C^∞, essendo descritta tramite funzioni polinomiali, quindi dobbiamo verificare la condizione di indipendenza lineare dei suoi vettori tangenti

$$\partial_1\phi(u) = (1,0,a) \qquad \partial_2\phi(u) = (0,1,b) \qquad \text{da cui} \qquad [\partial_1\phi \wedge \partial_2\phi](u) = (-a,-b,1) \neq 0$$

quindi possiamo concludere che $(\phi.K)$ è una superficie regolare per ogni valore dei parametri reali a e b.
ii. $\mathrm{Im}(\phi)$ è una porzione di un piano. Questa affermazione è suggerita dal fatto che i vettori tangenti sono indipendenti dal punto della superficie che si consideri, in ogni caso osserviamo che $0 \in \mathrm{Im}(\phi)$, e che $\mathrm{Im}(\phi) \subseteq \{\lambda(1,0,a)+\mu(0,1,b) : (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$ quindi la nostra superficie è una parte del piano (sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$) generato dai vettori $\partial_1\phi$ e $\partial_2\phi$.
iii. La cura (regolare) che si ottiene componendo le due parametrizzazioni ha equazioni

$$x(s) := \phi(u(s)) = (s,s,as+bs) \quad \text{con } s \in [0,\pi] \qquad \text{e vale} \qquad x'(s) = (1,1,a+b)$$

da cui ricaviamo che

$$L = \int_0^\pi \|x'(s)\|ds = \int_0^\pi \sqrt{2+(a+b)^2}ds = \pi\sqrt{2+(a+b)^2}$$

ricordando la caratterizzazione della lunghezza di una curva. ■

ESERCIZIO 7. *Data la curva* $\phi(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$, *con* $t \in [0,2\pi]$ *ed* $a,b > 0$, *la cui immagine è contenuta in* $\mathbb{R}^2$, *si provi che la curva è regolare e che divide il piano in due aperti connessi, uno limitato e uno non limitato.*

DISCUSSIONE. Verificare che l'applicazione definisce una curva regolare è relativamente semplice: le componenti della funzione vettoriale sono di classe C^∞, inoltre vale

$$\phi'(t) = (-a\sin(t), b\cos(t)) \qquad \text{e} \qquad \|\phi'(t)\|_2^2 = a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t) \geq \min\{a^2,b^2\} > 0 \qquad \text{per ogni } t$$

Inoltre l'applicazione ϕ è iniettiva per $t \in (0,2\pi)$ e vale $\phi(0) = \phi(2\pi) = (1,0)$, quindi abbiamo a che fare con una curva semplice e chiusa. Possiamo anche mostrare che il sostegno della curva è esattamente l'ellisse di semiassi a e b con centro di simmetria in 0, infatti le componenti di ϕ soddisfano la relazione

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1 \qquad \text{per ogni } t$$

e per ogni $x \in E = \{x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$ si ha che esiste un unico t_0 tale che

$$\left(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{b}\right) = (y_1,y_2) = (\cos(t_0), \sin(t_0)) \qquad \text{con } t_0 \in [0,2\pi)$$

Quindi possiamo introdurre la funzione $H \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ definita come

$$H(x) = H(x_1,x_2) = \left[\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - 1\right] \qquad \text{tale che} \qquad E = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) = 0\right\}$$

A questo punto abbiamo che i due seguenti insiemi

$$A := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) < 0\right\} = H^{-1}((-\infty,0)) \qquad \text{e} \qquad B := \left\{x \in \mathbb{R}^2 : H(x) > 0\right\} = H^{-1}((0,+\infty))$$

sono aperti (in quanto controimmagine, tramite una funzione continua, di una semiretta aperta).
L'insieme A è connesso perché è un insieme convesso (si tratta della regione racchiusa dell'ellisse E), inoltre è limitato visto che

$$x \in A \qquad \text{se e solo se} \qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} < 1 \qquad \text{e poiché} \qquad 0 \leq \frac{x_1^2}{a^2}, \frac{x_2^2}{b^2} \leq \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} < 1$$

segue che $A \subseteq B(0,r)$, per esempio, con $r = (a+b)$.
Per quanto riguarda B è facile vedere che non è limitato, infatti i punti della successione $\{(k,0)\}$ appatengono definitivamente a B e la loro norma diverge. Per verificare che B è connesso è possibile ragionare come segue: siano $x,y \in B$ e si consideri il percorso costituito dal segmento che unisce x al punto $\overline{x} = (a+b)x/\|x\|_2$, unito all'arco di circonferenza che unisce $\overline{x}$ a $\overline{y} = (a+b)y/\|y\|_2$ per poi percorrere il segmento di estremi $\overline{y}$ e y, tale percorso è contenuto in B e i punti x e y sono generici, questo prova che B è connesso. ■

Esercizio 8. *Date le seguenti coppie di funzioni e domini*

$$x(u,w) = (u,w,au+bw) \qquad (u,w) \in K = \overline{B(0,1)}$$
$$y(u,w) = (\cos(w),\sin(w),u) \qquad (u,w) \in K = [0,2\pi] \times [-1,1]$$
$$z(u,w) = (u,w,u^2w^2) \qquad (u,w) \in K = [0,1]^2$$
$$r(u,w) = (\cos(u),\sin(u)\cos(w),\sin(w)\sin(u)) \qquad (u,w) \in K = [0,\pi]^2$$
$$s(u,w) = (w\cos(u),w\sin(u),w) \qquad (u,w) \in [0,2\pi]^2$$

dove $a,b \in (0,+\infty)$*, si risponda alle seguenti questioni*
i. si verifichi che si tratta di superfici regolari,
ii. si scriva esplicitamente il versore tangente $n(u,w)$*,*
iii. si calcolino i coefficienti della prima forma quadratica fondamentale.

Discussione. Lo svolgimento dell'esercizio non sarà particolarmente corto, quindi risponderemo alle tre questioni affrontando le parametrizzazioni nell'ordine proposto dal testo.
Osserviamo subito che x è iniettiva, visto che le prime due componenti dell'immagine sono esattamente le componenti dell'input, è anche facile sincerarsi che tali componenti sono funzioni C^∞, in quanto polinomi, quindi provare che (x,K) descrive una superficie regolare significa mostrare che il seguente prodotto vettoriale non è mai nullo (almeno) in $\mathrm{int}(K)$

$$\partial_1 x(u,w) = (1,0,a) \qquad \partial_2 x(u,w) = (0,1,b)$$
$$\partial_1 x(u,w) \wedge \partial_2 x(u,w) = (-a,-b,1) \neq 0$$

dunque x è una superficie regolare. Il versore normale indotto dalla parametrizzazione è

$$n(u,w) = \frac{(\partial_1 x \wedge \partial_2 x)(u,w)}{\|\partial_1 x \wedge \partial_2 x\|_2} = \frac{(-a,-b,1)}{[a^2+b^2+1]^{1/2}}$$

mentre i coefficienti della prima forma quadratica fondamentale sono

$$E(u,w) = \partial_1 x(u,w) \cdot \partial_1 x(u,w) = 1 + a^2 \qquad F(u,w) = \partial_1 x(u,w) \cdot \partial_2 x(u,w) = ab$$
$$G(u,w) = \partial_2 x(u,w) \cdot \partial_2 x(u,w) = 1 + b^2$$

Riguardo a y osserviamo che

$$y(u_1,w_1) = y(u_2,w_2) \qquad \text{significa} \qquad \begin{pmatrix} \cos(w_1) \\ \sin(w_1) \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(w_2) \\ \sin(w_2) \\ u_2 \end{pmatrix}$$

dalla terza equazione otteniamo che $u_1 = u_2$, mentre la prima implica l'alternativa o $w_1 = w_2$ o $w_1 = 2\pi - w_2$. Poiché la seconda equazione ci fornisce l'alternativa o $w_1 = w_2$ o $w_1 = \pi - w_2$, possiamo concludere che $w_1 = w_2$ e questo significa che l'applicazione y produce la stessa immagine solo se i punti in partenza sono uguali, e questo significa che y è iniettiva. Che le componenti di y siano funzioni di classe C^∞ è evidente, per cui calcoliamo subito il prodotto vettoriale dei vettori tangenti

$$\partial_1 y(u,w) = (0,0,1) \qquad \partial_2 y(u,w) = (-\sin(w),\cos(w),0)$$
$$\partial_1 y(u,w) \wedge \partial_2 x(u,w) = (-\cos(w),-\sin(w),0) \neq 0$$

e possiamo concludere che (y,K) definisce una superficie regolare il cui versore normale è

$$n(u,w) = \frac{(\partial_1 y \wedge \partial_2 y)(u,w)}{\|\partial_1 y \wedge \partial_2 y\|_2} = \frac{(-\cos(w),-\sin(w),0)}{[\cos^2(w)+\sin^2(w)]^{1/2}} = (-\cos(w),-\sin(w),0)$$

mentre i coefficienti della sua prima forma quadratica fondamentale sono

$$E(u,w) = \partial_1 y(u,w) \cdot \partial_1 y(u,w) = 1 \qquad F(u,w) = \partial_1 y(u,w) \cdot \partial_2 y(u,w) = 0$$
$$G(u,w) = \partial_2 y(u,w) \cdot \partial_2 y(u,w) = 1$$

L'applicazione z ha tutte le componenti polinomiali ed è iniettiva per lo stesso motivo per cui è iniettiva x, inoltre abbiamo

$$\partial_1 z(u,w) = (1,0,2uw^2) \qquad \partial_2 z(u,w) = (0,1,2u^2w)$$
$$\partial_1 z(u,w) \wedge \partial_2 x(u,w) = (-2uw^2, -2u^2w, 1) \neq 0$$

quindi (z,K) definisce una superficie regolare, il suo versore normale è

$$n(u,w) = \frac{(-2uw^2, -2u^2w, 1)}{[1+4u^2w^4+4u^4w^2]^{1/2}} = \frac{(-2uw^2, -2u^2w, 1)}{[1+4u^2w^2(u^2+w^2)]^{1/2}}$$

i coefficienti della prima forma quadratica fondamentale della superficie sono

$$E(u,w) = \|\partial_1 z(u,w)\|_2^2 = 1+4u^2w^4 \qquad F(u,w) = \partial_1 y(u,w)\cdot\partial_2 y(u,w) = 4u^3w^3$$
$$G(u,w) = \|\partial_2 y(u,w)\|_2^2 = 1+4u^4w^2$$

Le componenti di r sono prodotti di funzioni C^∞, quindi la regolarità delle funzioni non è un problema, mostriamo (come sopra) l'iniettività dell'applicazione provando che due punti che hanno la stessa immagine devono essere lo stesso punto.

$$r(u_1,w_1) = r(u_2,w_2) \qquad \text{equivale a} \qquad \begin{pmatrix} \cos(u_1) \\ \sin(u_1)\cos(w_1) \\ \sin(u_1)\sin(w_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(u_2) \\ \sin(u_2)\cos(w_2) \\ \sin(u_2)\sin(w_2) \end{pmatrix}$$

Essendo la funzione cos strettamente decrescente in $(0,\pi)$, segue subito che $u_1 = u_2$, per mostrare che $w_1 = w_2$ si ragiona come abbiamo fatto per la superficie y. Calcoliamo i vettori tangenti della parametrizzazione per studiare il rango della matrice jacobiana di r

$$\partial_1 r(u,w) = (-\sin(u), \cos(u)\cos(w), \cos(u)\sin(w)) \qquad \partial_2 r(u,w) = (0, -\sin(u)\sin(w), \sin(u)\cos(w))$$
$$[\partial_1 r \wedge \partial_2 r](u,w) = (\sin(u)\cos(u), \sin^2(u)\cos(w), \sin^2(u)\sin(w)) \neq 0$$

poiché $(u,w) \in \mathrm{int}(K) = (0,\pi)^2$ possiamo affermare che $\sin(u), \sin(w) \neq 0$ in $\mathrm{int}(K)$ e non è possibile che $\sin(w)$ e $\cos(w)$ siano nulli contemporaneamente, quindi (r,K) definisce una superficie regolare. Calcoliamo il versore normale all'immagine $r(K)$

$$n(u,w) = \frac{(\sin(u)\cos(u), \sin^2(u)\cos(w), \sin^2(u)\sin(w))}{[\sin^2(u)]^{1/2}} = (\cos(u), \sin(u)\cos(w), \sin(u)\sin(w))$$

ricordando che $\sin(u) > 0$ per ogni $u \in (0,\pi)$. I coefficienti della prima forma quadratica fondamentale della superficie $r(K)$ si calcolano come nei casi precedenti

$$E(u,w) = \|\partial_1 r(u,w)\|_2^2 = 1 \qquad F(u,w) = \partial_1 r(u,w)\cdot\partial_2 r(u,w) = 0$$
$$G(u,w) = \|\partial_2 r(u,w)\|_2^2 = \sin^2(u)$$

Concludiamo studiando l'applicazione s. Notiamo subito che la funzione ha omponenti regolarissime ed è iniettiva, visto che

$$s(u_1,w_1) = s(u_2,w_2) \qquad \text{è} \qquad \begin{pmatrix} w_1\cos(u_1) \\ w_1\sin(u_1) \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2\cos(u_2) \\ w_2\sin(u_2) \\ w_2 \end{pmatrix}$$

e subito otteniamo $w_1 = w_2$, l'uguaglianza della variabile u segue (per ogni $w \neq 0$) dall'osservazione sulle funzioni trigonometriche fatta nell'analisi di y. Riguardo ai vettori tangenti possiamo scrivere

$$\partial_1 r(u,w) = w(-\sin(u), \cos(u), 0) \qquad \partial_2 r(u,w) = (\cos(u), \sin(u), 1)$$
$$[\partial_1 r \wedge \partial_2 r](u,w) = w(\cos(u), \sin(u), -1) \neq 0$$

per $w \neq 0$. Calcoliamo il versore normale alla superficie

$$n(u,w) = \frac{w(\cos(u), \sin(u), -1)}{[2w^2]^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos(u), \sin(u), -1)$$

Terminiamo calcolando i coefficienti della prima forma quadratica fondamentale della superficie

$$E(u,w) = w^2 \qquad F(u,w) = 0 \qquad G(u,w) = 2$$

Queste superfici ritorneranno in esercizi futuri... ∎