

### Esercizi di Calcolo e Biostatistica

1. Date le funzioni  $f_1(x) = x/4 - 1$ ,  $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $f_3(x) = x^4 - \sqrt{2x}$ , scrivere a parole le operazioni che, dato  $x$  in modo opportuno, permettono di calcolare  $f_1(f_2(x))$ , e  $f_3(f_2(x))$ . Dopo aver scritto le due funzioni precedenti, dire dove sono definite e calcolarle nel punto  $x = 1$ .

2. Data la funzione  $f(x) = x^{1/3} + 3x + 3$  calcolare  $f(-1)$  e rappresentarlo sull'asse delle ordinate di un piano cartesiano. Quanto vale  $f[27f(-1)]$ ?  
Quali sono le coordinate del punto  $P = (f(-1), f(f(-1)))$ , appartenente al grafico della funzione  $f$ ?

3. Data la funzione  $f(x) = y = x^2 + 1$ , disegnarne il grafico in un piano cartesiano. Scelto  $y = 2$ , qual'è il significato geometrico del problema  $x^2 + 1 = 2$  (che è un'equazione di secondo grado)? Per quali valori di  $x$  l'equazione è soddisfatta? Spiegare a parole perchè risolvere l'equazione precedente è lo stesso che calcolare  $f^{-1}(2)$ , dove  $f^{-1}(y) = \sqrt{y-1}$  è la funzione inversa di  $f$ .

4. Disponiamo di  $g_1$  grammi della sostanza  $S_1$  e di  $g_2$  grammi della sostanza  $S_2$ . Mescolando il 30 per cento dei  $g_1$  grammi e il 5 per cento dei  $g_2$  grammi si ottengono 5 grammi di composto, mentre aggiungendo il 10 per cento dei  $g_1$  grammi al 3 per cento dei  $g_2$  grammi si ottengono 2.5 grammi di composto.

Scrivere il sistema lineare che permette di calcolare  $g_1$  e  $g_2$  e dire, senza risolvere il sistema, se è possibile calcolare un ben preciso valore di  $g_1$  e  $g_2$ ; se la risposta è positiva, trovare questi valori.

Se per formare le stesse quantità di composto del caso precedente si usa, nel primo caso il  $k$  per cento di  $g_1$  e il 5 per cento di  $g_2$  e nel secondo caso il 10 per cento di  $g_1$  e il  $2k$  per cento di  $g_2$ , per quali valori di  $k$  il composto non si riesce a formare?

5. Nello studio di un gruppo di popolazioni di organismi presenti in un certo ambiente, si rileva che la numerosità di una popolazione varia con la legge

$$N(t) = \frac{54}{1 + 5e^{-t}},$$

dove  $t$  è misurato in anni. Quanti organismi ci sono al tempo  $t = 0$ ? Aspettando un tempo molto lungo, da quanti organismi risulterebbe composta la popolazione? Quale andamento ha nel tempo la numerosità? Esiste un istante in cui la popolazione è raddoppiata rispetto al valore iniziale? Se la risposta è positiva, qual'è questo tempo? Esiste un istante in cui la popolazione raggiunge la numerosità massima possibile? Se la risposta è positiva, qual'è questo tempo?

Disegnare in un piano  $(t, N(t))$  il grafico della funzione  $N(t)$ .

6. (a) Calcolare le derivate delle funzioni seguenti nel punto  $x = 1$ :

$$f_1(x) = x^3 + 2, \quad f_2(x) = (x^2)^{1/5}, \quad f_3(x) = 2/(x)^{3/2};$$

(b) per tutte le funzioni al punto (a), scrivere l'equazione della retta tangente al grafico in  $x = 1$ .