Esercizi 8 di Calcolo e Biostatistica

Es. 1. Rispondere alle seguenti sette domande **nel tempo massimo** di 30 minuti, senza usare strumenti elettronici

(a) sapendo che $\log_{10} 2 \approx 0.3$ e $\log_{10} 3 \approx 0.48$, i valori dei numeri $\log_3 20$ e $\log_2(8\sqrt{2})$ sono, rispettivamente,

(A) 1.95 e 3 **(B)** circa 2,71 e 3.5 **(C)** esattamente 10 e 2 **(D)** circa 6 e 1 **(E)** 3.6 e 0.4 **(F)** circa 8 e 4 **(G)** 5.2 e 0.2 **(H)** 3.4 e 8

(b) La disequazione seguente $4^{1-2x} < 4$ è soddisfatta se

(A) $0 < x < 1$ **(B)** $x < 0$ **(C)** $x < 4$ **(D)** $x > 2$ **(E)** $x > 0$ **(F)** $x < -1/2$

(c) Il tasso di variazione della funzione $f(x) = \sqrt{x+2}$ nell'intervallo $[0, 2]$ vale

(A) $\sqrt{2}$ **(B)** 4 **(C)** $2 + \sqrt{2}$ **(D)** $1 - (1/\sqrt{2})$ **(E)** $(1/\sqrt{2}) - 1$ **(F)** $\sqrt{2}/2$

(d) La funzione inversa della funzione $f(x) = x/2 + 1$ è la funzione

(A) $f^{-1}(x) = x + 2$ **(B)** $f^{-1}(x) = x - 1$ **(C)** $f^{-1}(x) = 2x + 2$ **(D)** $f^{-1}(x) = x - 2$ **(E)** $f^{-1}(x) = 2x - 2$ **(F)** $f^{-1}(x) = x$

(e) La soluzione dell'equazione $e^{3x+1} = 2$ è

(A) $x = 3/2$ **(B)** $x = \ln 2$ **(C)** $x = [\ln 2 - 1]/3$ **(D)** $x = [1 + \ln 3]/2$ **(E)** $x = 2 - \ln 3$ **(F)** $x = 3 - \ln 2$

(f) Il periodo della funzione $f(x) = \cos(x/2 + 1)$ è

(A) 2π **(B)** $\pi - 1$ **(C)** $2\pi + 1$ **(D)** 4π **(E)** $\pi/2$ **(F)** $1/2$

(g) Se $f(x) = \sqrt{2x-2}$ e $g(x) = x^3 + 1$ allora

(A) $f(g(x) = (2x-2)^3$ **(B)** $g(f(x)) = \sqrt{2x-2} + x^3$ **(C)** $f(g(x)) = x\sqrt{2x}$ **(D)** $g(f(x)) = \sqrt{x^3} + 2x - 1$ **(E)** $f(g(x) = \sqrt{x^3 - 2}$ **(F)** $g(f(x)) = (\sqrt{(2x-2)^3} + 1)$

Soluzioni. (a) (ATTENZIONE: la risposta (B) e' corretta nella versione attuale e non in quella messa in rete la settimana scorsa).
Il numero $\log_3 20$ si puo' riscrivere nella forma $\log_3(2 \cdot 10) = \log_3 2 + \log_3 10$. Per valutare i due termini della somma esprimiamo i logaritmi nella base 10. Tenendo conto del fatto che $\log_{10} 2 \approx 0.3$ e $\log_{10} 3 \approx 0.48$, si ha

$$\log_3 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 3} \approx \frac{0.3}{0.48} = 0.625$$

inoltre

$$\log_3 10 = \frac{\log_{10} 10}{\log_{10} 3} \approx \frac{1}{0,48} \approx 2,08$$

quindi $\log_3 20 = 0,625 + 2,08 \approx 2,71$

Il numero $\log_2(8\sqrt{2})$ si puo' invece scrivere nella forma

$$\log_2(2^3 \cdot 2^{1/2}) = \log_2(2^3) + \log_2(2^{1/2}) = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$$

La risposta giusta e' quindi la (B).

(b) Alla domanda si puo' rispondere in due modi del tutto equivalenti: possiamo osservare che, visto che il primo e secondo membro sono esponenziali con la stessa base (che e' 4) si ha $4^{1-2x} < 4$ se gli esponenti soddisfano la richiesta $1 - 2x < 1$. Quindi deve essere $-2x < 0$ e cioe' $x > 0$.
Oppure si puo' osservare che $4^{1-2x} = 4/(4^{2x})$ e quindi

$$4^{1-2x} < 4 \;\Rightarrow\; \frac{4}{4^{2x}} < 4 \;\Rightarrow\; \frac{1}{4^{2x}} < 1 \Rightarrow\; 4^{2x} > 1$$

e questo e' vero se $x > 0$.
La risposta giusta e' la (E).

(c) Il tasso di variazione di una funzione $f(x)$ nell'intervallo $[0, 2]$ e'

$$\frac{f(2) - f(0)}{2}$$

Si ha $f(2)) = 2$ e $f(0) = \sqrt{2}$ quindi

$$\frac{f(2) - f(0)}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La risposta giusta e' la (D).

(d) La funzione inversa prescrive le operazioni che servono a risolvere l'equazione $x/2 + 1 = k$ con k fissato (cioe' a ricavare x).
Per ricavare x bisogna: 1. sottrarre 1 da ambo i membri e 2. moltiplicare per 2 il risultato ottenuto.
La funzione inversa e' quindi

$$f^{-1}(x) = 2x - 2$$

La risposta giusta e' la (C).

(e) Per risolvere l'equazione $e^{3x+1} = 2$ si calcola il logaritmo in base e (logaritmo naturale) di ambo i membri:

$$\ln(e^{3x+1}) = \ln(2) \;\Rightarrow\; (3x + 1)\ln e = \ln 2 \;\Rightarrow\; x = [\ln 2 - 1]/3$$

La risposta giusta e' la (C).

(f) Per definizione di periodo T si ha

$$\cos(x/2 + 1) = \cos[(x + T)/2 + 1]$$

D'altra parte il coseno e' una funzione periodica di 2π, quindi

$$\cos(x/2 + 1) = \cos(x/2 + 1 + 2\pi)$$

I secondi membri delle due relazioni precedenti sono uguali se gli argomenti del coseno sono uguali: $(x + T)/2 + 1 = x/2 + 1 + 2\pi$ cioe' se $T = 4\pi$.
La risposta giusta e' la (D).

(g) Se $f(x) = \sqrt{2x - 2}$ e $g(x) = x^3 + 1$, per calcolare $f(g(x))$ si devono eseguire sull'argomento $g(x)$ le operazioni prevista dalla funzione f. Quindi si ha

$$f(g(x)) = \sqrt{2(x^3 + 1) - 2} = \sqrt{2x^3} = x\sqrt{2x}$$

Per calcolare invece $g(f(x))$ si devono eseguire sull'argomento $f(x)$ le operazioni prevista dalla funzione g. Quindi si ha

$$g(f(x)) = (\sqrt{2x - 2})^3 + 1 = (2x - 2)\sqrt{2x - 2} + 1$$

Guardando alle possibili risposte si scopre che l'unica giusta e' la (C).

(Se le risposte giuste sono in numero minore o uguale a 3 e' necessario procedere ad una revisione attenta degli argomenti trattati a lezione.)

---

2. Dati i vettori $v = (4, 1)$, $w = (1, 1)$ e $u = (-1, 2)$, determinare valori del parametro k tali che il vettore $u + kv$ sia parallelo a w e sia applicato nel punto $P = (1, 0)$.
Scrivere l'equazione di una retta passante per $P = (1, 0)$ e perpendicolare al vettore v.

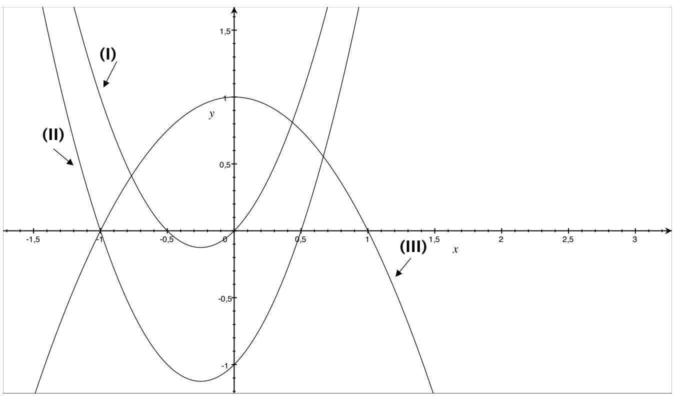
Soluzione. Il vettore $W = u + kv$ ha componenti $(-1 + 4k, 2 + k)$ e la sua direzione è data da $m_W = (2 + k)/(-1 + 4k)$. Il vettore w ha direzione $m_w = 1$ e w e W sono paralleli se $m_W = m_w$, quindi deve essere

$$\frac{2+k}{-1+4k} = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 + k = -1 + 4k.$$

L'equazione di primo grado in k $\quad 2 + k = -1 + 4k$ che si scrive anche nella forma $3k = 3$ ha soluzione $k = 1$: per questo valore w e W sono paralleli.
Per $k = 1$ il vettore W ha componenti $W = (3, 3)$. W è applicato in $P = (1, 0)$ se l'estremo Q del vettore si trova nel punto $Q = (4, 3)$.

Un vettore $V = (a, b)$ è perpendicolare a $v = (4, 1)$ se il prodotto scalare $V \cdot v = 0$, cioe' se si ha $4a + b = 0$, quindi se $b = -4a$. In questo caso le componenti di V sono $V = (a, -4a)$ e la sua direzione è $m_V = -4a/a = -4$.
Una retta che contiene V ha la stessa direzione di V (coefficiente di inclinazione -4) ed è perpendicolare a v: l'equazione della retta è dunque $y = -4x + c$. Imponendo che la retta passi per $P = (1, 0)$ si ottiene c: la condizione è $0 = -4 + c$, quindi $c = 4$ e la retta ha equazione $y = -4x + 4$.

Es. 3. Si considerino le parabole rappresentate in figura



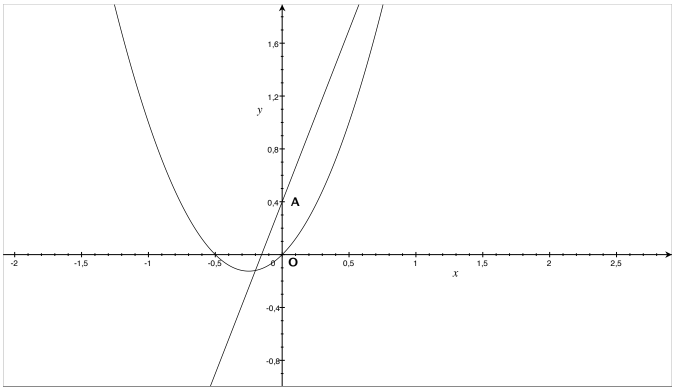
Dire, motivando la risposta, quale e' quella di equazione $y = f(x) = 2x^2 + x$.
Spiegare perche' i punti $P = (1, 3)$ e $Q = (-1, 1)$ appartengono al grafico di questa parabola.
Considerato il punto $V = (-1/4, f(-1/4))$, scrivere l'equazione della retta $y = r(x)$ che passa per P e V e le coordinate del punto $A = (0, r(0))$ appartenente alla retta. Se si stimasse $f(0)$ come $r(0)$, quale errore si commetterebbe, in percentuale?

Soluzione. Il grafico della curva $y = f(x) = 2x^2 + x$ ha le seguenti proprietà: è una parabola che ha la concavità verso l'alto perchè il coefficiente del termine di grado 2 in x è $2>0$; attraversa l'asse verticale nel punto $O = (0, 0)$ perchè nell'equazione manca il termine noto; osservando che $2x^2 + x = x(2x + 1)$, si ha $x(2x + 1) = 0$ se $x = 0$ e se $x = -1/2$, quindi la curva interseca l'asse orizzontale anche nel punto $A = (-1/2, 0)$ oltre che nell'origine degli assi. Da queste considerazioni segue che il grafico è (I).
I punti $P = (1, 3)$ e $Q = (-1, 1)$ appartengono al grafico della parabola perchè se si sceglie $x = 1$ e si sostituisce nell'equazione $y = f(x) = 2x^2 + x$ si ottiene proprio $y = 2 + 1 = 3$, e se si sceglie $x = -1$ si ha $y = 2 - 1 = 1$.

Visto che $f(-1/4) = -1/4$, il punto $V = (-1/4, f(-1/4))$ ha coordinate $(-1/4, -1/4)$. La retta generica che passa per $P = (1,3)$ e $V = (-1/4, -1/4)$ ha equazione $y = mx + q$ dove m e q devono essere soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} m + q = 3 \\ -\frac{m}{4} + q = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Risolvendo per sostituzione si trova $m = 13/5$ e $q = 2/5$ quindi l'equazione della retta è $y = 13x/5+2/5$. Il punto $A = (0, r(0))$ appartenente alla retta ha coordinate $A = (0, 2/5)$. I grafici della retta e della parabola sono



Valutando $f(0) = 0$ come $r(0) = 2/5$, l'errore che si commetterebbe è uguale alla distanza AO, che vale $2/5$ che in percentuale si scrive 0.4=40%.

Es. 4. La temperatura T_{ogg} di un oggetto caldo immerso in acqua fredda a temperatura T_{H2O} diminuisce fino a quando la temperatura dell'oggetto non ha raggiunto quella dell'acqua (Legge di raffreddamento di Newton). La legge con cui viene descritto questo fenomeno e'

$$T = T_{ogg}(t) = T_{H_2O} + (T_{ogg}(0) - T_{H_2O})e^{-t}(*)$$

dove T_{H2O} e' la temperatura dell'acqua, $T_{ogg}(0)$ é la temperatura dell'oggetto che viene immerso nell'acqua e $t = 1$ significa 15 minuti, $t = 2$ significa 30 minuti ecc..

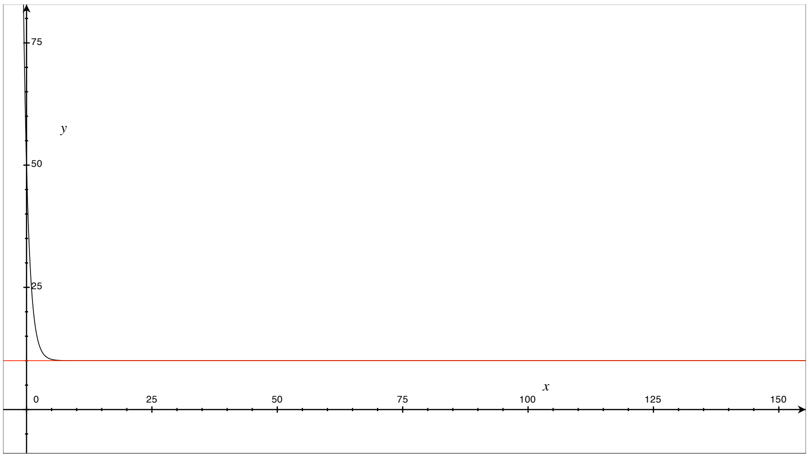
Se l'oggetto che immergiamo nell'acqua ha una temperatura di 50 gradi centigradi e se l'acqua é a 10 gradi, in quanto tempo la temperatura dell'oggetto si dimezza?
Tentare un grafico della funzione (*).
Calcolare il tasso di variazione della temperatura nell'intervallo di tempo tra $t = 1$ e $t = 2.5$ (approssimare e^{-1} con 0.37 e $e^{-2.5}$ con 0.08).
Scrivere un'approssimazione lineare della legge (*) (l'equazione di una retta) passante per (1,$T(1)$) e (2.5,$T(2.5)$). Valutare la differenza tra il valore $T_{ogg}(2)$ e il valore che si ricava dall'approssimazione lineare (approssimare e^{-2} con 0.13).

Soluzione Sostituendo i dati nella legge (*) si ha $T = T_{ogg}(t) = 10 + (50 - 10)e^{-t} = 10 + (40)e^{-t}$ e la temperatura dell'oggetto si dimezza quando $T_{ogg}(t) = 25$. L'equazione da risolvere, rispetto a t, e' quindi

$$25 = 10 + 40e^{-t} \quad \Rightarrow \quad \frac{15}{40} = \frac{1}{e^t} \quad \Rightarrow \quad \frac{40}{15} = e^t$$

Calcolando il logaritmo naturale di ambo i membri si trova $t \approx 0.98$, quindi se t e' calcolato in minuti occorrono circa 15 minuti perche' la temperatura dell'oggetto diventi di 25 gradi.

Per disegnare il grafico della funzione osserviamo che questa e' definita per ogni valore di t ma, visto il problema, il dominio della funzione e' $D = \{t \in \mathbf{R},\ t \geq 0\}$.
Nel dominio la funzione e' sempre positiva perche' $e^{-t} > 0$ per ogni valore di t, quindi il grafico si trova tutto nel primo quadrante del piano cartesiano.
Per $t = 0$ si ha $T = T_{ogg}(0) = 10 + 40e^0 = 50$, quindi il punto di coordinate $(0, 50)$ e' l'intersezione della curva con l'asse verticale. Per $t > 0$ la funzione $e^{-t} = 1/e^t$ ha valori sempre piu' piccoli all'aumentare di t, quindi i valori della funzione $T_{ogg}(t)$ sono sempre minori di 50 e diminuiscono all'aumentare di t.
Il grafico e'



Il tasso di variazione della funzione e' per definizione il numero

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t}.$$

In questo caso $t = 1$ e $t + \Delta t = 2.5$, cioe' $\Delta t = 2.5 - 1 = 1.5$. Visto che $T(1) = 10 + 40e^{-1} \approx 24.8$ e $T(2.5) = 10 + 40e^{-2.5} \approx 13.22$, si ha

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{13.22 - 24.8}{1.5} = -7.72 < 0$$

quindi i valori della funzione sono complessivamente diminuiti nell'intervallo $(1, 2.5)$.

Per scrivere l'equazione della retta passante per i punti $A = (1, 24.8)$ e $B = (2.5, 13.22)$ osserviamo che questa ha coefficiente di inclinazione

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = m = -7.72$$

quindi l'equazione della retta e' $T = -7.72t + c$. Per trovare c basta imporre che la retta passi per A e che si abbia $24.8 = -7.72 + c$, da cui risulta $c = 32.52$.
(Si puo' verificare facilmente che la retta $T = -7.72t + 32.52$ passa anche per B infatti $13.22 = -7.72(2.5) + 32.52$).
Se $t = 2$ il punto di coordinate $(2, T(2))$ appartenente alla retta ha coordinate $C = (2, 17.08)$. Il punto di coordinate $(2, T_{ogg}(2))$ appartenente alla funzione data e' invece $P = (2, 15.2)$, e la distanza tra i due punti e'

$$|T(2) - T_{ogg}(2)| = 17.08 - 15.2 = 1.88$$

dunque l'errore che si commetterebbe approssimando linearmente il valore $T_{ogg}(2)$ con $T(2)$ é di circa 2 gradi.

Es. 5. La numerosita' di una coltura cellulare varia nel tempo con la legge $C(t) = 10^2 2^{2-t}$, dove t e' calcolato in intervalli di 15 minuti. Quante cellule sono in coltura all'istante iniziale e dopo un' ora? Qual'e' il tasso di variazione di $C(t)$ nello stesso intervallo di tempo? Qual'e' il significato del risultato ottenuto?
Esiste un tempo in cui la numerosita' delle cellule e' dimezzata rispetto al valore iniziale? Se la risposta e' affermativa, trovarlo.

Soluzione. Se la numerosita' varia nel tempo con la legge $C(t) = 10^2 2^{2-t}$, per $t = 0$ si ha $C(0) = 10^2 2^2 = 400$ e questo è il valore iniziale. Se t e' calcolato in intervalli di 15 minuti, un'ora equivale a 4 intervalli, quindi $C(4) = 10^2 2^{-2} = 25$.
In questo intervallo di tempo, lungo 4 unità, il valore di $C(t)$ è variato da $C(0) = 400$ a $C(4) = 25$ si ha quindi

$$\frac{C(4) - C(0)}{4} = \frac{25 - 400}{4} = \frac{-375}{4} = -93.75 < 0$$

Il tasso di variazione è negativo, quindi nell'intervallo di tempo $[0, 4]$ la numerosità ha avuto una diminuzione.

La numerosità si dimezza nell'istante in cui si ha $C(t) = C(0)/2 = 200$ questa relazione corrisponde all'equazione esponenziale

$$10^2 2^{2-t} = 200 \quad \Rightarrow \quad 2^{2-t} = 4(2^{-t}) = 2 \quad \Rightarrow \quad 2^t = 2.$$

Per risolvere questa equazione, calcoliamo il logaritmo in base 2 di ambo i membri. Si ha $\log_2 2^t = \log_2 2 = 1$ e quindi $t = 1$: dopo 15 minuti la numerosità è dimezzata.

Es. 6. Un fenomeno ciclico e' descritto dalla legge

$$F(t) = 3\sin(2t - 1)$$

Quali intersezioni ha con l'asse orizzontale la funzione $F(t)$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$? Che periodicita' ha il fenomeno? Che ampiezza ha l'oscillazione?

Soluzione. La funzione $F(t)$ interseca l'asse orizzontale se si ha $3\sin(2t-1) = 0$ cioe' se $\sin(2t-1) = 0$. La funzione seno si annulla in $[0, 2\pi]$ quando l'argomento della funzione e' 0 oppure 2π, quindi se

$$2t - 1 = 0 \text{ oppurese } 2t - 1 = 2\pi$$

La prima intersezione e' quindi in $t = 1/2$, la seconda in $t = (2\pi - 1)/2 = \pi - 1/2$.
per calcolare il periodo ragioniamo come nell'esercizio 1, caso (f). Si ha

$$\sin(2t - 1) = \sin[2(t + T) - 1] = \sin(2t - 1 + 2\pi)$$

Quindi $2T = 2\pi$ e $T = \pi$ è il periodo.
L'ampiezza dell'oscillazione è 3.