LA FUNZIONE LOGARITMO

In una popolazione la cui numerosita' varia con la legge $N(t)=N(0)R^t$, con $R=1+n-m$, formata inizialmente da 10^5 individui, ad ogni generazione muore il 15% e il tasso di natalità è il 10%
Quanti individui sono nati e morti nella prima generazione? Quanti individui formano la popolazione dopo 3 generazioni ?

$N(0)=10^5$ $(m=15\%=0.15=15/100,\ n=10\%=0.1=1/10)$

$mN(0)=0.15(10^5)=(15/10^2)10^5=15.000$ morti

$nN(0)=0.1\ (10^5)=(1/10)10^5=10.000$ nati

La regola con cui la numerosità varia da una generazione alla seguente è

$N(t)=N(0)R^t$, con $R=1+n-m=1+0,1-0,15=0,95<1$

Quindi

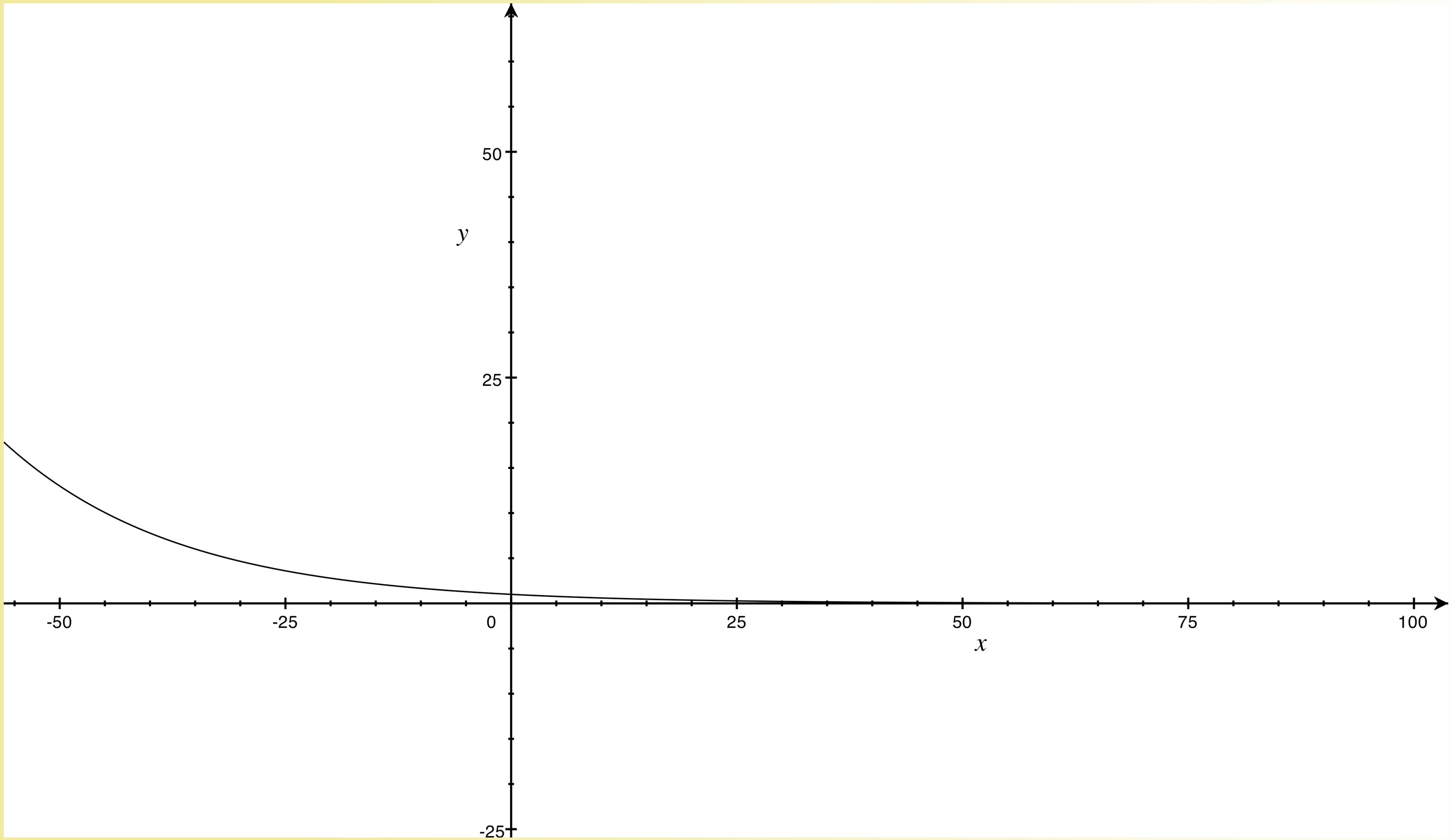
$N(1)=(0,95)N(0)=0,95(10^5)=95.000(<100.000)$

$N(2)=(0,95)N(1)=(0,95)^2N(0)=0,9025\ (10^5)=90.250$

$N(3)=(0,95)^3N(0) \approx 85.737$:

la numerosità è costantemente diminuita

$$F(x) = 0{,}95^x$$

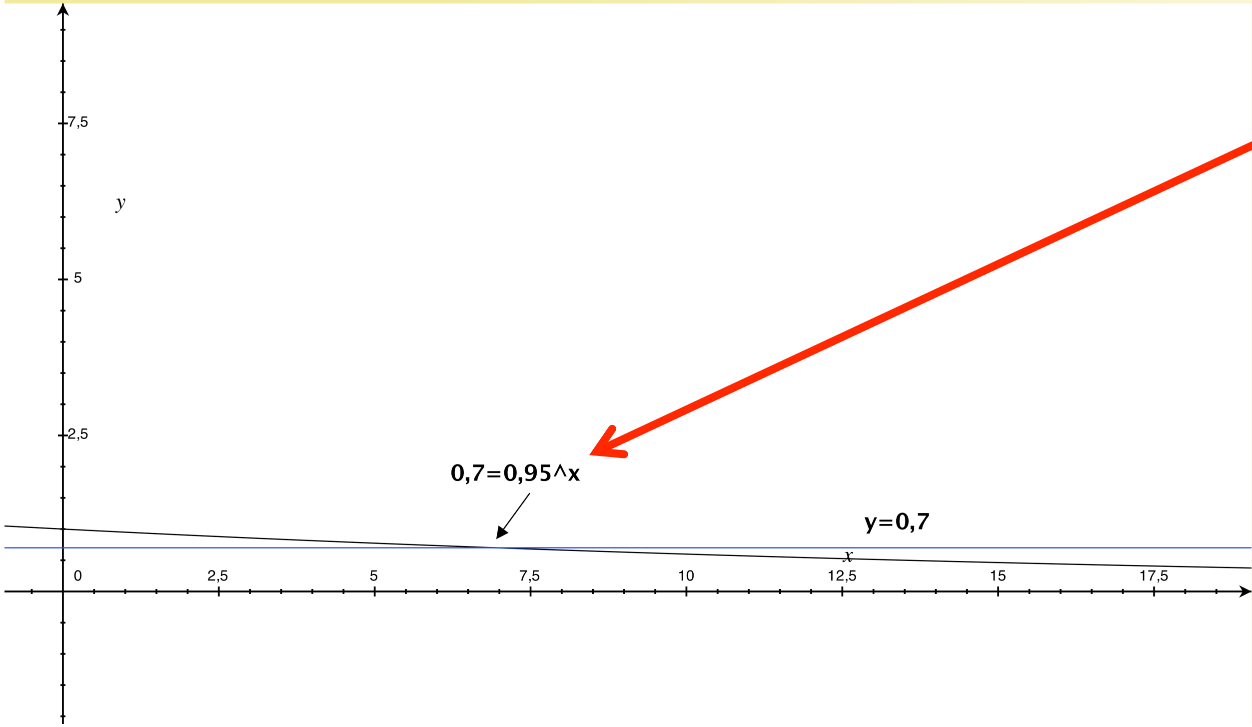


Pb. Dopo quante generazioni, se nulla cambia, si ha

$$N(t)=0.7\ N(0) = 70.000? \quad \text{individui}$$

Il problema è: trovare t tale che

$$N(t)=0.7N(0)=0,95^{t}N(0) \rightarrow 0.7=0,95^{t}$$



La soluzione e'
il punto di intersezione
tra la retta y=0,7 e la
curva $y=0,95^{t}$

COME SI RISOLVE (rispetto a t) l'equazione (esponenziale)

$$0.95^{t} = 0.7 \ ?$$

Per risolvere l'equazione esponenziale

$$y=a^x=k$$

bisogna conoscere la funzione inversa di $f(x)=a^x$

La funzione che associa ad ogni k l'unica soluzione x dell'equazione $a^x=k$ è la funzione logaritmo in base a di k

$$\boxed{x = \log_a k}$$

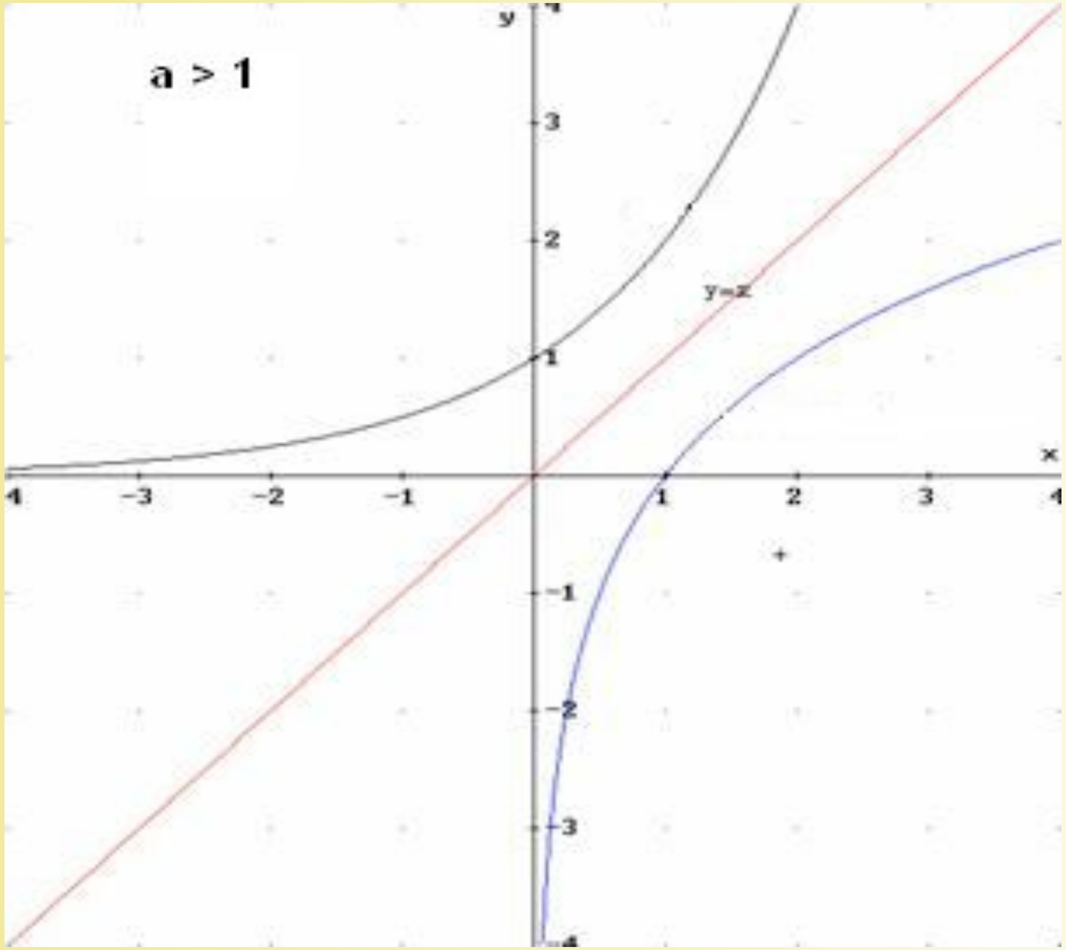
In definitiva visto che $a=0.95$, $k=0.7$,

$$t = \log_{0.95} 0.7$$

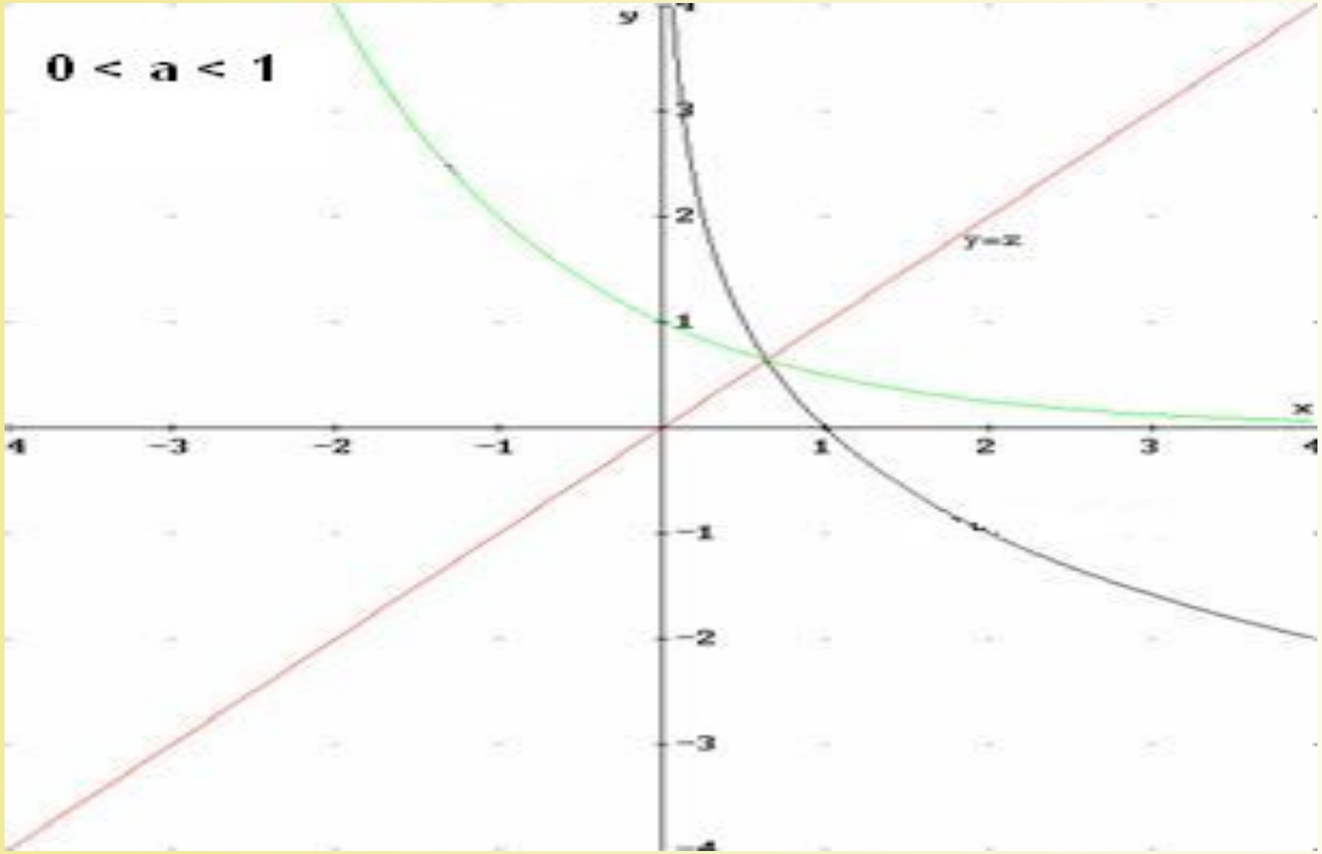
Come calcolare $\log_{0.95} 0.7$?

PROPRIETA' dei LOGARITMI

$a>1$ $y=a^x$ $y=\log_a x$



$0<a<1 \qquad y=a^x \qquad y=\log_a x$

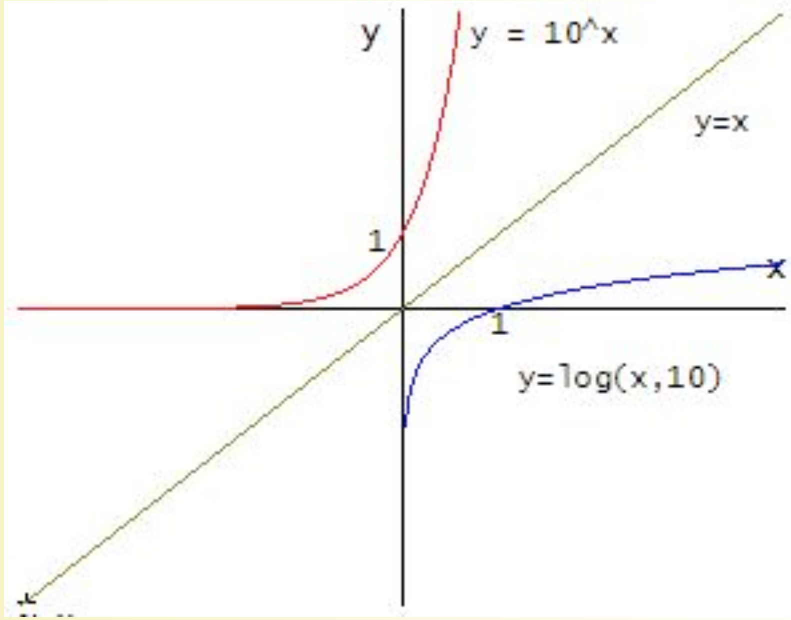


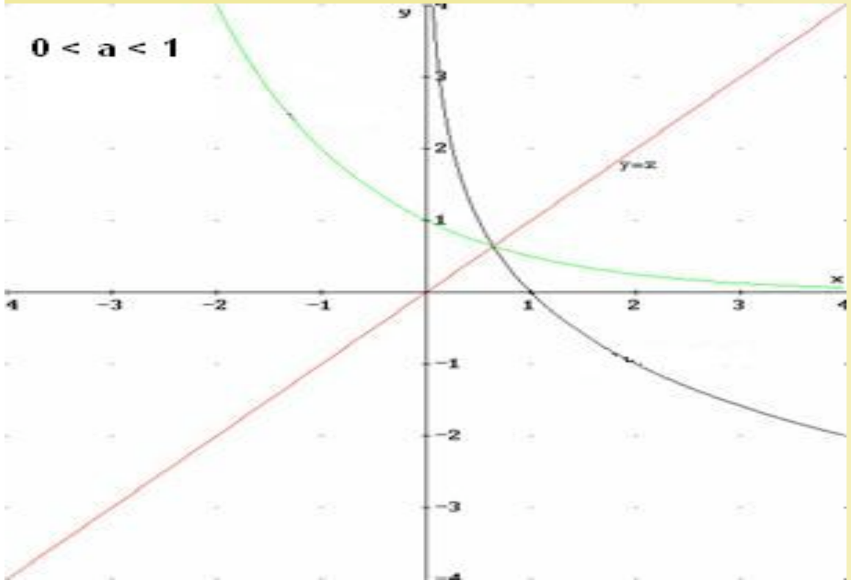
<u>$\log_a x$ è definito solo per $x>0$</u>

Se a>1 (ad es. a=10)

$a^0=1$ $\qquad\qquad$ $\log_a 1=0$

si ha $a^x<1$ per $x<0$,
quindi
$\log_a x<0$ per $0<x<1$





Se a<1 $\quad a^x>1$ per $x<0$

$\log_a x<0$ per $x>1$

PROPRIETA' IMPORTANTI

Se $a>1$ e $x>0$ $y>0$ si ha

1. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a(x/y) = \log_a x - \log_a y$
3. $\log_a x^k = k \log_a x$ k num. reale
4. $\log_a(1/x) = \log_a x^{-1} = - \log_a x$

Cambiamento di base

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

(Ad es. $\log_2 x = \log_{10} x / \log_{10} 2 \approx 0.7 \log_{10} x$)

Per calcolare $\log_{0.95} 0.7$ cambiamo la base

$$\log_{0.95} 0.7 = \log_{10} 0.7 / \log_{10} 0.95$$
$$\approx 0,15/0,02 = =7.5:$$

in circa sette generazioni e mezzo la numerosità è diventata il 70% di quella iniziale.

IL PROBLEMA DI SEMPLIFICARE CONTI COMPLICATI

ARCHIMEDE (287(?)-212 A.C)

Data un numero n, e costruita la sequenza di numeri

$a_0=n^0=1$, $a_1=n^1=n$, $a_2=n^2$, $a_3=n^3$, $a_4=n^4$,….

si osserva che $a_0/a_1=1/n$, ma anche $a_1/a_2=a_2/a_3=a_3/a_4=\ldots$ $=1/n$.

Inoltre $a_k \times a_h= n^k \times n^h=n^{k+h}=a_{k+h}$:

il prodotto di 2 elementi della sequenza corrisponde ad un elemento che è elevato alla somma degli esponenti

Michael STIFFEL (≈1478- 1567)

Estende la regola precedente al caso di esponenti negativi.

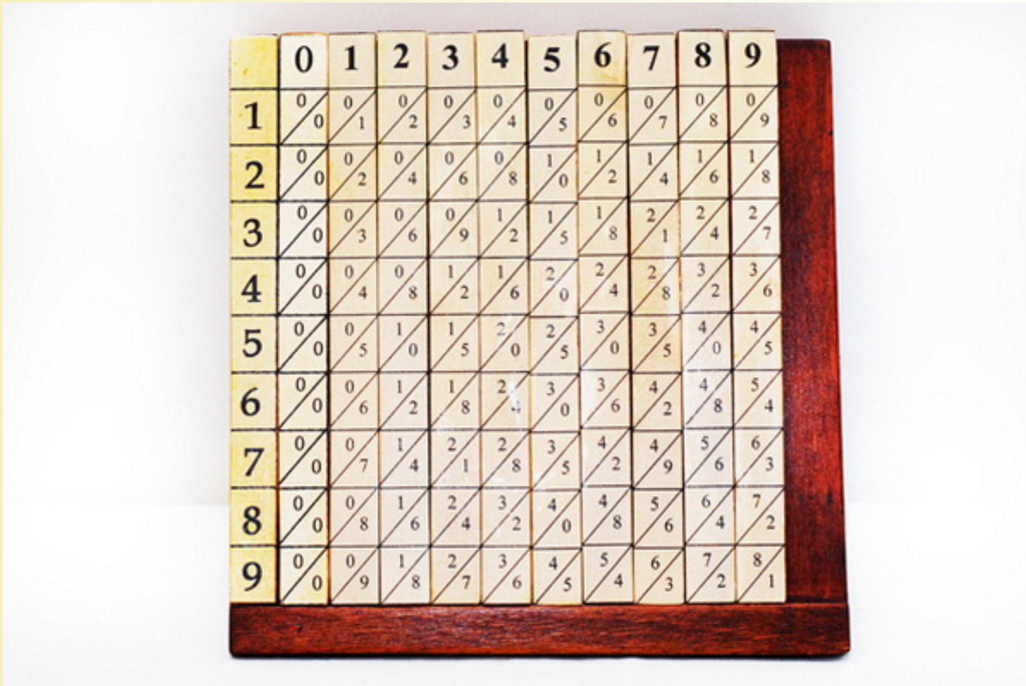
Se $b_0=n^0=1$, $b_1=n^{-1}=1/n$, $a_2=n^{-2}$, $a_3=n^{-3}$, $a_4=n^{-4}$,….
si ha che $b_0/b_1=n$, ma anche $b_1/b_2=b_2/b_3=b_3/b_4=\ldots=$
$=n$.
Inoltre $b_k x\, b_h= n^{-k} x\, n^{-h}=n^{-(k+h)}=b_{k+h}$ e

$b_k/ b_h= n^{-k}/ n^{-h}=n^{-k} n^h=n^{-(k-h)}=b_{k-h}$: la divisione

corrisponde ad un elemento che è elevato alla differenza degli esponenti

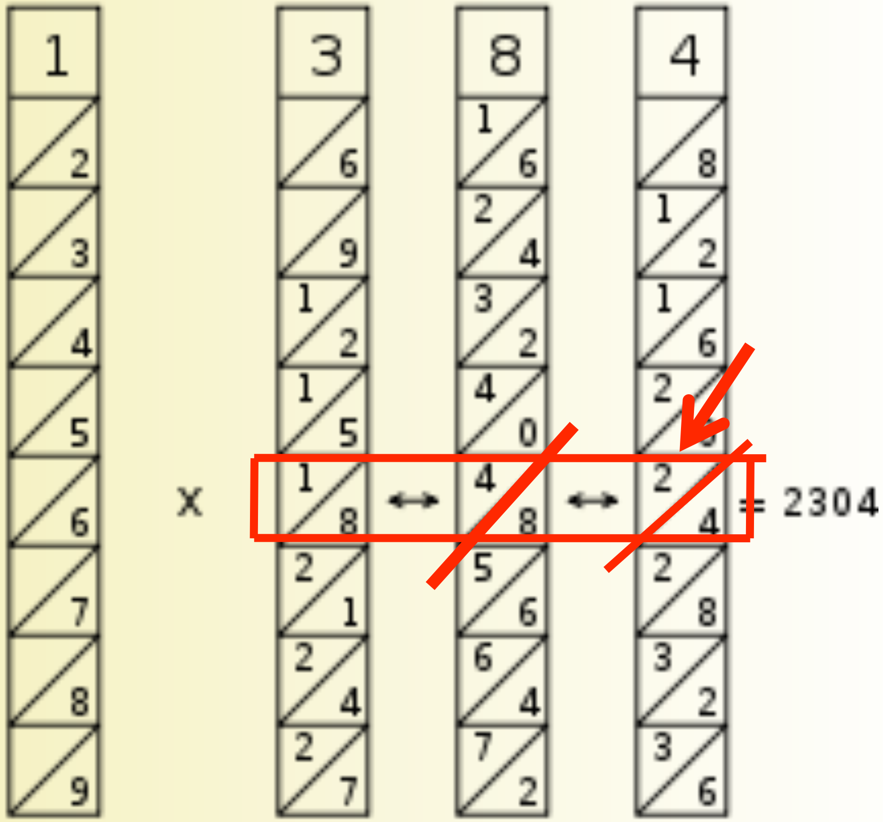
Per evitare di ricordare queste regole (e altre) vengono preparate TAVOLE NUMERICHE. Famosa è la "tabula tetragonica" di **Giovanni Antonio MAGINI (1555-1617)** che contiene i quadrati di tutti i numeri interi da 1 a 11000.

John Napier (NEPERO) (1550-1617) mette a punto il "metodo dei bastoncini" per fare moltiplicazioni complesse.
Si tratta di stecche su cui sono incisi i primi multipli di un numero.
Le decine e le unità sono divise da una sbarra



Se, ad es. si vuole moltiplicare 384x6, si prendono i bastoncini del 3, dell'8° del 4. Si isola la sesta riga
Iniziando da destra si scrive il numero in basso 4; poi si sommano tutti i numeri nello stesso tratto diagonale 2+8=10, scrivo 0 e porto 1, 8+4=12+1=13, scrivo 3 e porto 1,
1+1=2. Ho ottenuto le cifre 4032.
Leggendo il numero al contrario, 2304, si ottiene il risultato della moltiplicazione

I prodotti si calcolano come somme



Nel 1614 Nepero introduce i logaritmi (dal greco "logos"= proporzione e "aritmos"= numero), utilizzando un ragionamento cinematico.

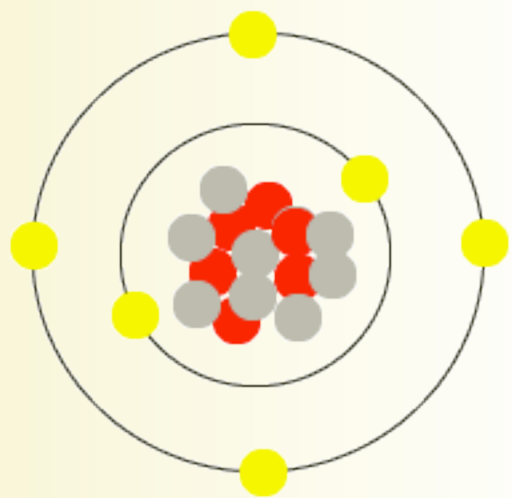
Alla fine del '600 Leibniz e Bernoulli definiscono il logaritmo come funzione inversa di un esponenziale

Nel 1748 **Eulero (1707-1783)** dà la definizione che viene usata ancora oggi

Datazione dei fossili con il carbonio 14

Un atomo di Carbonio 14 ha 6 protoni 6 elettroni ma 8 neutroni: il nucleo è instabile e, per disintegrazione radioattiva, tende a raggiungere una forma stabile con lo stesso numero di neutroni e protoni

Nell'atmosfera e nei viventi si osserva un rapporto costante tra la forma stabile del Carbonio 12 (6 protoni, 6 elettroni e 6 neutroni) e quella instabile di Carbonio 14



Se un organismo non è più vitale (un fossile) il Carbonio 14 decade lentamente e non viene sostituito: misurando l'abbondanza del Carbonio 14 rispetto al 12 si può sapere "l'età" del fossile

Il tempo di decadimento (dimezzamento della massa) del Carbonio 14 è di circa 5730 anni.

$$M(t)= (1/2)^{t/5730}\, M(0)$$

Ad es. Se si misura che la massa $M(t)$ di Carbonio 14 di un frammento di osso è 4/5 di quella $M(0)$ di un organismo vivente, si ha

$$4/5=M(t)/M(0)$$

Ma $M(t)=M(0)\,(1/2)^{t/5730}$ quindi

$$4/5=M(t)/M(0) = 2^{-t/5730}$$

Ricaviamo t calcolando il logaritmo di ambo i membri:

$$\log_2(4/5)=\log_2(2^{-t/5730})=-t/5730$$

$$t = -\ 5730\ [\log_{10}(4/5)]/[\log_{10}\ 2] \approx 1910:$$

sono passati 1910 anni da quando l'organismo è morto.

Quindi l'osso è databile a 2016-1910=106 a.C.