Esercizio di Calcolo e Biostatistica con soluzioni

Questo compito permette di allenarsi per la prima prova di esonero.

Per capire a che punto si è con la preparazione è indispensabile:
(a) svolgere l'esercizio **in una sola volta**
(b) cercare di **non consultare** libri o quaderni di esercizi
(c) impiegare **al massimo** due ore per lo svolgimento
(d) nel caso non si riuscisse a completare lo svolgimento in due ore, si suggerisce di prendere nota di quello che si e' fatto in due ore e di proseguire nello svolgimento fino alla fine, prendendo nota del tempo impiegato.
Se l'intero svolgimento richiede tra due ore e due ore e mezza, con un po' di allenamento si puo' ottenere di completare un compito nel tempo previsto. Se invece il tempo impiegato supera le due ore e mezza bisogna capire quali sono gli argomenti che bisogna studiare meglio.

1) *Rispondere alle seguenti domande*

(a) La funzione $y = f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ e' definita nel seguente dominio

(A) $D = \{x \in \mathbf{R}, x \neq 2\}$
(B) $D = \{x \in \mathbf{R}, x > 2\}$
(C) $D = \{x \in \mathbf{R}, x > -1\}$
(D) $D = \{x \in \mathbf{R}, x \geq -1, x \neq 2\}$
(E) $D = \{x \in \mathbf{R}\}$

Soluzione. (a) la funzione $y = f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ e' definita se il denominatore e' diverso da zero e se la funzione all'interno della radice quadrata e' maggiore o uguale a zero: deve essere $x \neq 2$ e $x \geq -1$. La risposta giusta e' quindi la (D).

(b) Data la funzione del precedente punto (a), quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

(A) Il tasso di variazione nell'intervallo [0,1] e' positivo
(B) Il tasso di variazione nell'intervallo [0,1] e' negativo
(C) La retta di equazione $y = (1/2 - \sqrt{2})x - 1/2$ e' quella che passa per i punti del grafico $A = (0, f(0))$ e $B = (1, f(1))$
(D) La retta di equazione $y = (-\sqrt{2})x - 1/2$ e' quella che passa per i punti del grafico $A = (0, f(0))$ e $B = (1, f(1))$
(E) La variazione della funzione nell'intervallo [0,1] e' negativa

Soluzione. (b) Il tasso di variazione di $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ nell'intervallo $[0, 1]$ è

$$\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = -\sqrt{2} - (-1/2) = -\sqrt{2} + 1/2$$

Visto che $\sqrt{2} > 1$ e quindi -$\sqrt{2} < -1$, il tasso di variazione è negativo: la (B) è giusta.
Se ricordiamo che la variazione della funzione è $f(1) - f(0)$ (che in questo caso coincide con il tasso di variazione), concludiamo che anche la (E) è corretta.
Infine i punti A e B hanno coordinate $A = (0, -1/2)$ e $B = (1, -\sqrt{2})$, quindi la retta che passa per i due punti ha equazione $y = (-\sqrt{2} + 1/2)x - 1/2$. Infatti il coefficiente del termine x è dato dal tasso di variazione, mentre il punto A è proprio l'intersezione della retta con l'asse verticale. Anche la (C) è corretta.

(c) Sempre a proposito della funzione del precedente punto (a), quali affermazioni sono corrette?

(A) Il punto $P = (3, 1)$ appartiene al grafico mentre il punto $Q = (3, 2)$ non e' un punto sul grafico della funzione
(B) Il punto $P = (1, \sqrt{2})$ appartiene al grafico mentre il punto $Q = (1, \sqrt{2})$ non e' un punto sul grafico della funzione
(C) Il punto $P = (3, 2)$ appartiene al grafico mentre il punto $Q = (3, 1)$ non e' un punto sul grafico della funzione
(D) Il punto $P = (-1, f(-1))$ non puo' appartenere al grafico della funzione
(E) Il punti $P = (8, 1/2)$ e $Q = (-3/4, -2/11)$ appartengono entrambi al grafico della funzione

Soluzione. (c) Se $x = 3$ un punto sul grafico della funzione ha coordinate $(3, f(3) = 2)$. Se $x = 1$ un punto sul grafico della funzione ha coordinate $(1, f(1) = -\sqrt{2})$. Se $x = -1$ un punto sul grafico della funzione ha coordinate $(-1, f(-1) = 0)$. Infine se $x = 8$ oppure $x = -3/4$ i punti sul grafico della funzione devono essere $(8, 3/6 = 1/2)$ e $(-3/4, -2/11)$.
Confrontando queste informazioni con le risposte si vede che la (A), la (B) e la (D) sono sbagliate, mentre la (C) e la (E) sono giuste.

(d) Le matrici $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a & -2 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix}$

(A) hanno determinante uguale a zero se $k = 1$ e $a = 2$
(B) hanno determinante uguale a zero se $k = 1/2$ e $a = 2$
(C) non hanno mai deteminante nullo
(D) hanno determinante positivo per $k < 1/2$ e $a < 2$
(E) hanno determinanti diversi da zero solo se $k > 1$ e $a < 2$

Soluzione. (d) I determinanti delle due matrici valgono $\det A = 2k - 1$ e $\det B = 2 - a$, quindi si ha $\det A = 0$ se $k = 1/2$ e $\det B = 0$ se $a = 2$. La (B) è giusta.
Consegue che $\det A > 0$ se $k > 1/2$ e $\det B > 0$ se $a < 2$. La risposta (D) è sbagliata e lo è anche la (E) perche' non è vero che i determinanti sono diversi **solo se** $k > 1$ e $a < 2$; ad esempio se $k = 0$ e $a = 1$ si ha $\det A = -1 \neq \det B = 1$.

(e) Se $\mathbf{u} = (3, 4)$, $\mathbf{v} = (1, a)$, $\mathbf{w} = (b, 2b)$ (a, b parametri reali), sono vettori del piano, allora si ha $\mathbf{w} + 3\mathbf{v} = a\mathbf{u}$

(A) solo se $a = 1$ e $b = 1/3$
(B) solo se $a = 6/5$ e $b = 3/5$
(C) per ogni valore di a e b reale
(D) per nessun valore di a e b
(E) solo se a e b sono diversi tra loro

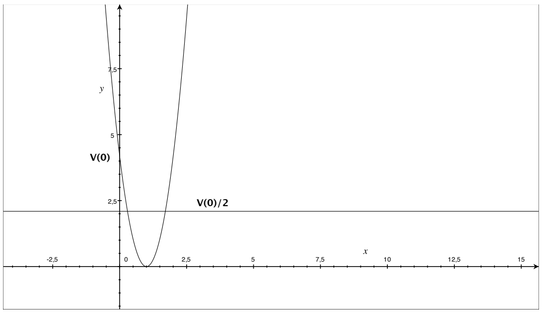
(f) Se $f(x) = (3x)^{2/3}$ e $g(x) = 2x + 1$, allora

(A) $g(f(x)) = x^{1/3} + 1$ e $g(f(x)) = x^{2/3} + 1$
(B) $f(g(x)) = (6x + 3)^{2/3}$ e $g(f(x)) = 6\sqrt{2}x^{2/3} + 1$
(C) $f(g(x)) = 6 + x^{1/3}$ e $g(f(x)) = \sqrt{2}x^{2/3} + 1$
(D) $f(g(x)) = 6x + x^{1/3} + 3$ e $g(f(x)) = x^{1/3} + 3$
(E) $f(g(x)) = 3 + 2x^{2/3}$ e $g(f(x)) = 2x^{2/3} + 2$

2) Il raggio R di una cellula sferica, misurato in μm, varia nel tempo, misurato in ore, con legge $R(t) = (1-t)^{2/3}$. Calcolare il tasso di variazione del volume $V(t)$ della sfera per $t \in [0, 1]$ e interpretare il risultato. Senza utilizzare le derivate, disegnare il grafico di $V(t)$ per $t \geq 0$. Utilizzando solo considerazioni geometriche, si può dire che esiste un istante t^* in cui il volume della sfera è dimezzato rispetto al valore iniziale? Se la risposta è positiva trovare t^*. Dopo quanto tempo il volume si è ridotto del 30% rispetto al valore iniziale?

Soluzione. Il volume di una sfera di raggio R è $V = (4\pi/3)R^3$, quindi nel caso della cellula si ha $V(t) = (4\pi/3)[(1-t)^{2/3}]^3 = (4\pi/3)(1-t)^2$.
Il tasso di variazione in $[0, 1]$ è $[V(1) - V(0)]/(1 - 0) = V(1) - V(0) = (4\pi/3)[0 - 1] = -(4\pi/3) < 0$, quindi agli estremi dell'intervallo $[0, 1]$ si ha $V(1) < V(0)$ e il volume è complessivamente diminuito.

Per disegnare il grafico ricaviamo qualche proprietà della funzione $V(t)$. La funzione è definita per ogni $t \geq 0$ e si ha sempre $V(t) \geq 0$ ($(1-t)^2 \geq 0$ sempre). Per $t = 1$ $V(1) = 0$ quindi nel punto di ascissa $t = 1$ la funzione ha il minimo valore possibile. Non è difficile verificare che per ogni $t > 1$ si ha $V(t) = (4\pi/3)(1-t)^2 < V(t+h) = (4\pi/3)[1-(t+h)]^2$ (per ogni $h > 0$), cioè la funzione cresce. Quindi il grafico deve essere



Il volume è dimezzato rispetto al valore iniziale quando si ha $V(t) = V(0)/2 = 2\pi/3$. Ma, come si vede anche dalla figura, la funzione è monotona decrescente fino ad 1 poi è crescente: il grafico ha due intersezioni con la retta orizzontale di equazione $y = 2\pi/3$, una per $t < 1$ e una per $t > 1$. Per trovarle, bisogna risolvere il problema $(4\pi/3)(1-t)^2 = 2\pi/3$, equivalente a $t^2 - 2t + 1/2 = 0$ che ha soluzioni $t^* = 1 - \sqrt{2}/2 < 1$ e $t' = 1 + \sqrt{2}/2$.

Il volume si riduce del 30% rispetto al valore iniziale quando prende valore $V(0) - 0.3V(0) = 0.7V(0) = 0.7(4\pi/3)$. Per calcolare l'istante in cui ciò accade bisogna risolvere l'equazione $(4\pi/3)(1-t)^2 = 0.7(4\pi/3)$ cioè $t^2 - 2t + 0.3 = 0$ che ha soluzioni $t^* = 1 - \sqrt{2.8}/2 < 1$ e $t' = 1 + \sqrt{2.8}/2$.

3. In un laboratorio si studia la sopravvivenza della *Drosophila* (moscerino della frutta) agli stress ambientali. In seguito allo stress S si osserva che in 50 colture il numero dei sopravvissuti é

n. colture:	15	1	10	20	4
n. sopravvissuti:	3	25	8	5	15

(a) Riscrivere la precedente tabella sostituendo alla prima riga le frequenze relative di sopravvivenza di ciascun dato. Qual'é la mediana dei sopravvissuti?
(b) Il numero medio di sopravvissuti stima bene la sopravvivenza allo stress S? (Motivare la risposta)
(c) Se si osservasse un aumento del 10% nel dato di sopravvivenza in ciascuna coltura, la varianza come cambierebbe? (Motivare la risposta)

Soluzione. La frequenza relativa é la frequenza di ciascun dato diviso il numero totale di dati (N=50), quindi la tabella si riscrive nella forma

freq. rel. colture:	0.3	0.02	0.2	0.4	0.08
n. sopravvissuti:	3	25	8	5	15

Per calcolare la mediana dobbiamo riordinare i dati sui sopravvissuti in ordine crescente

n. colture:	15	20	10	4	1
n. sopravvissuti:	3	5	8	15	25

I dati centrali della distribuzione sono il 25-esimo e il 26-esimo che valgono entrambi 5 : la mediana e' 5.

(b) La media é

$$M = \frac{15 \cdot 3 + 25 + 10 \cdot 8 + 20 \cdot 5 + 4 \cdot 15}{50} = 6.2$$

La varianza é

$$V = \frac{15(3-6.2)^2 + (25-6.2)^2 + 10(8-6.2)^2 + 20(5-6.2)^2 + 4(15-6.2)^2}{50} = 17.56$$

quindi la deviazione standard vale $\sigma = (V)^{1/2} \approx 4.2$. I dati variano intorno alla media nell'intervallo $[2, 10.4]$: questa stima mostra che il numero medio di sopravvissuti non e' stimato troppo bene dalla media, visto che i dati osservati oscillano nell'intervallo [3, 25].
Si puo' notare che ci sono 15 dati con valore 3, 20 con valore 5, 4 con valore 15 e 1 che vale 20: alle estremita' della sequenza di dati sono concentrati molte osservazioni e questo influenza il valore della media.

(c) Se i dati variassero del 10%, anche la media varierebbe del 10%=0.1. Sostituendo nella varianza si avrebbe una variazione del 21%.
Infatti dette M' e V' la media e la varianza dopo un aumento del 10% dei dati, si ha

$$M' = \frac{15(3+(0.1)3)+(25+(0.1)25)+10\cdot(8+(0.1)8)+20\cdot(5+(0.1)5)+4\cdot(15+(0.1)15)}{50} =$$

$$= (1.1)\frac{15\cdot 3+25+10\cdot 8+20\cdot 5+4\cdot 15}{50} = (1.1)M = M+(0.1)M$$

e la media aumenta del 10%.

La varianza invece diventa

$$V' = \frac{15[(1.1)3-(1.1)M]^2+[(1.1)25-(1.1)M]^2+10[(1.1)8-(1.1)M]^2+20[(1.1)5-(1.1)M]^2+4[(1.1)15-(1.1)M]^2}{50} =$$

$$= (1.1)^2V = (1+0.1)^2V = (1+0.2+0.01)V = V+(0.21)V$$

4. Scrivere nella forma $A\cdot v = w$ il sistema

$$\begin{cases} kx/2 - y = 1 \\ -x+2ky = 2 \end{cases}$$

Dire, motivando la risposta, se esistono valori di k per i quali il sistema non ha soluzioni.

Soluzione. La matrice dei coefficienti del sistema e'

$$A = \begin{pmatrix} k/2 & -1 \\ -1 & 2k \end{pmatrix}$$

$v = (x, y)$ e $w = (1, 2)$, quindi il sistema e' equivalente a

$$\begin{pmatrix} k/2 & -1 \\ -1 & 2k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det A = 0$ se $k^2 - 1 = 0$ cioe' se $k = \pm 1$. Per $k = 1$ il sistema si scrive

$$\begin{cases} x/2 - y = 1 \\ -x+2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y = 2 \\ x-2y = -2 \end{cases}$$

quindi il sistema non ha soluzioni perche' $x - 2y$ non puo' essere sia uguale a 2 che uguale a -2. Se invece $k = -1$, il sistema si scrive

$$\begin{cases} -x/2 - y = 1 \\ -x-2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y = -2 \\ x+2y = -2 \end{cases}$$

le due equazioni sono uguali e quindi deve essere $x = -2y - 2$ e il sistema ha infinite soluzioni al variare di y.
In definitiva il sistema dato non ha soluzioni se $k = 1$.

Criteri di auto valutazione. Il punteggio totale e' 30 cosi' suddiviso:
Es.1: domanda (a) 1 punto, (b) 2 punti, (c) 1 punto, (d), (e), (f) 2 punti ciascuna. Totale 10 punti
Es. 2: 7 punti
Es. 3: 7 punti
Es.4: 6 punti
Il punteggio si riferisce a risposte completamente corrette. La sufficienza e' 18.