



FLUIDODINAMICA

(Giovanni Paolo Romano)

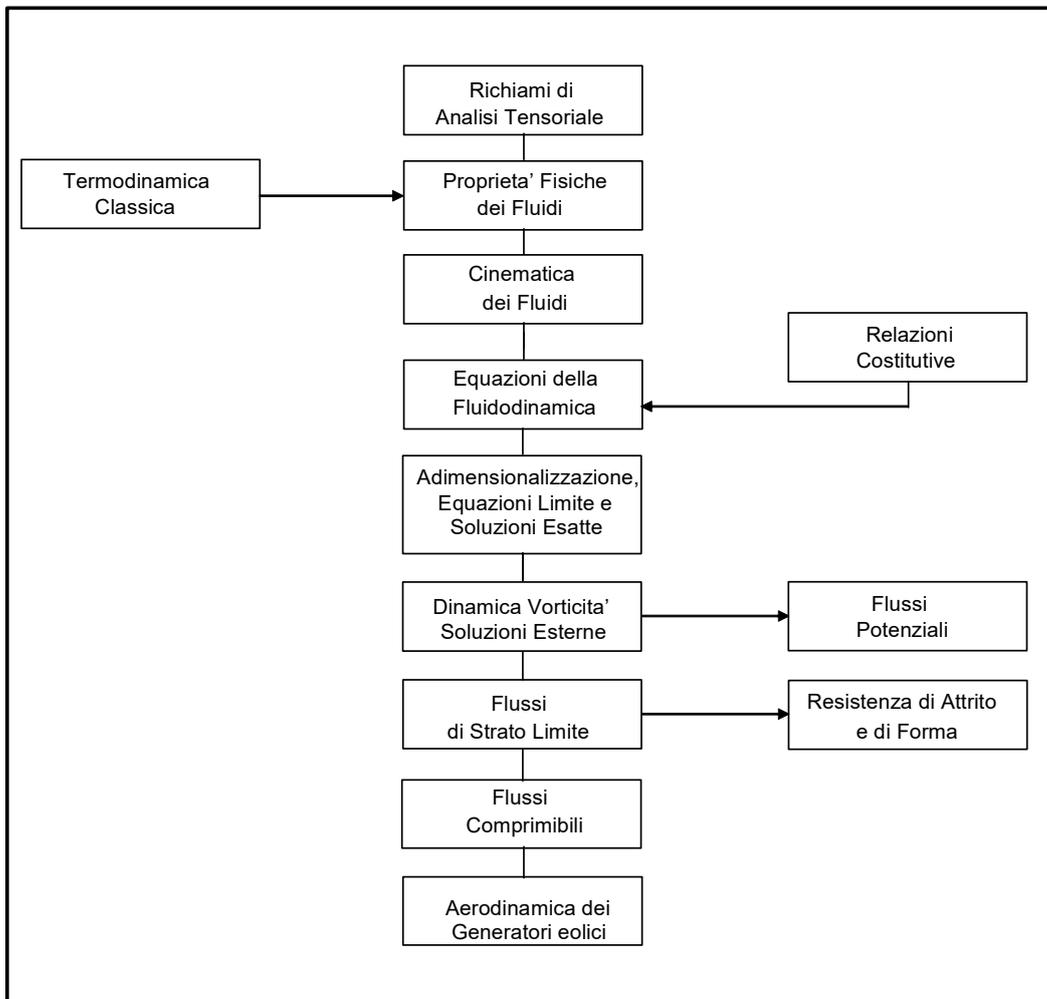
Anno Accademico 2009-2010

Bibliografia:

- G. Querzoli, Dispense di Idraulica, Universita' di Cagliari, 1999
- P.H. Kundu, I.M. Cohen, Fluid Mechanics, Academic Press, 2001
- B.R. Munson, D.F. Young, T.H. Okiishi, Fundamentals of Fluid Mechanics, Wiley, 1995
- E. Mattioli, Aerodinamica, Levrotto & Bella, 1989
- F. Sabetta, Gasdinamica, Edizioni Ingegneria 2000, 1999
- Burton, Sharpe, Kenkins, Bossanyl, Wind Energy Handbook, Wiley & Sons, 2001

PROGRAMMA DEL CORSO

Fluidodinamica



Capitolo 1

NOTE INTRODUTTIVE E RICHIAMI DI ANALISI TENSORIALE

1.1 CHE COSA E' LA FLUIDODINAMICA ?

La fluidodinamica considera il comportamento dei fluidi in moto. Lo studio di questa disciplina è importante per due motivi: in primo luogo, ancora oggi, non sono ben chiari i meccanismi e i fenomeni fisici che intervengono nella dinamica non lineare di un fluido in moto (dalla scala riguardante il moto di microparticelle, al fumo di una sigaretta, fino a quella riguardante il moto di intere galassie di stelle), in secondo luogo le applicazioni industriali connesse a fenomeni fluidodinamici sono le più disparate. Limitandoci all'Ingegneria, si possono elencare il progetto e l'ottimizzazione di turbine, scambiatori di calore, motori, sistemi di combustione, profili e superfici alari, velivoli completi, motocicli e autovetture (anche per i flussi interni), scafi ed eliche navali, sistemi di condizionamento e aerazione, valvole cardiache, condotti sanguigni e cuori artificiali, dispositivi su scala micrometrica e nanometrica. Non può però esistere una separazione netta tra la comprensione dei fenomeni fluidodinamici e il suo utilizzo a fini applicativi, in quanto il corretto funzionamento di un dispositivo non deve prescindere dalla conoscenza di ciò che in effetti accade al suo interno e/o esterno.

La fluidodinamica si suddivide nell'aerodinamica e gasdinamica che studiano il comportamento dei flussi gassosi (come l'aria) e l'idrodinamica, che studia il comportamento dei flussi liquidi (come l'acqua). In effetti però la descrizione matematica del comportamento di un fluido in moto prescinde quasi completamente dalla natura del fluido stesso. A questo proposito, è importante mettere in evidenza che tale descrizione matematica è assolutamente necessaria per capire a fondo cosa succede in un fluido in moto. Una volta determinate le equazioni matematiche caratteristiche che descrivono questo problema fisico, la loro soluzione potrà essere affrontata con metodi analitici (o teorici), sperimentali (o empirici) o numerici (l'ordine rispecchia l'evoluzione storica nella ricerca di soluzioni di problemi fluidodinamici). Questi tre aspetti della fluidodinamica sono al giorno d'oggi assolutamente complementari piuttosto che alternativi (sebbene spesso antagonisti !). In molti casi la conoscenza completa delle equazioni della fluidodinamica permette di elaborare modelli semplificati con cognizione dei loro limiti di validità.

1.2 INTRODUZIONE ALL'ANALISI TENSORIALE

Nello scrivere le equazioni che regolano il comportamento di fluidi in moto, si incontreranno delle quantità a due o più indici dette tensori. L'uso dei tensori è giustificato dal fatto che a volte sarà necessario descrivere lo stato (*p.e.* di tensione, da cui il nome tensore) di una porzione di fluido non solo con riferimento alla direzione e modulo (cioè tramite un vettore), ma anche in riferimento al piano sul quale avviene la applicazione dello stato (di tensione). Se consideriamo un cubetto elementare di fluido (quale quello in figura 1) e un sistema di riferimento ortogonale destrorso (x_1, x_2, x_3), allora la forza che agisce sulla superficie 1 ($x_1=const$) la possiamo identificare come un vettore ($\underline{\tau}_{(1)}$) con tre componenti lungo gli assi ($\tau_{(1)1}, \tau_{(1)2}, \tau_{(1)3}$) di cui la prima rappresenta una componente di forza normale alla superficie 1 e le altre due la forza tangenziale. Se ora consideriamo la superficie 2 ($x_2=const$), su questa potrà agire (nel caso più generale possibile) una forza differente dalla precedente (ad esempio dovuta allo scorrimento del fluido che può dare una forza tangenziale aggiuntiva) di nuovo identificabile con un vettore ($\underline{\tau}_{(2)}$) con tre componenti lungo gli assi ($\tau_{(2)1}, \tau_{(2)2}, \tau_{(2)3}$). Il discorso può essere ripetuto per la superficie 3 per ottenere le 9 componenti scalari necessarie a descrivere questo stato (di tensione) o in maniera equivalente le 3 componenti vettoriali. In una descrizione più compatta, questa quantità viene indicata come τ_{ij} (dove sia i che j possono variare da 1 a 3 e si è eliminata la parentesi dopo il primo indice) e descritta con il nome di tensore del secondo ordine.

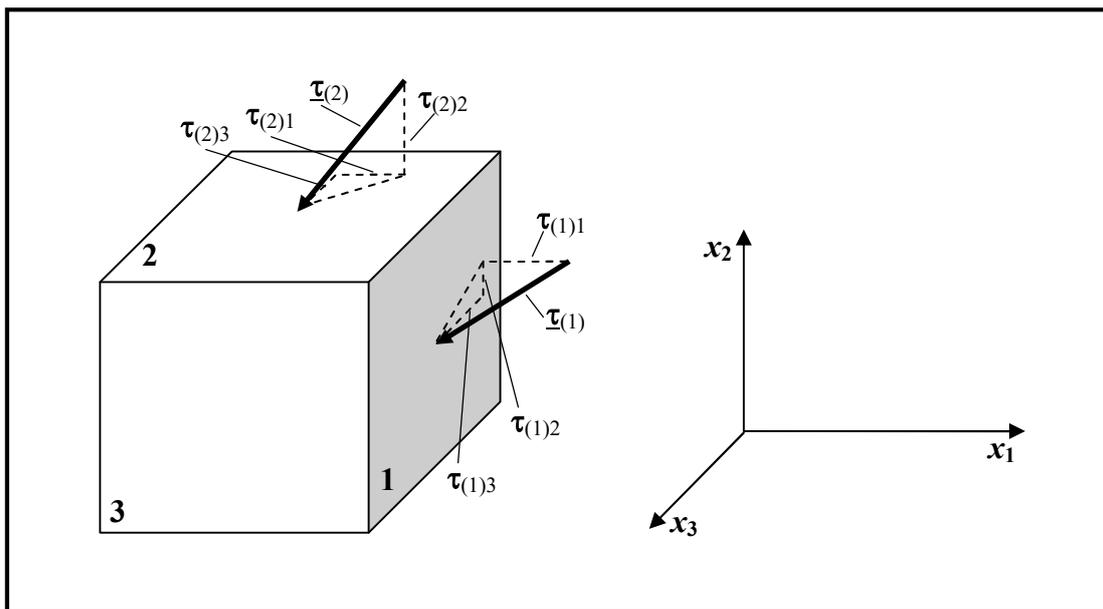


Figura 1. Esempio di forze normali e tangenziali agenti su un cubetto elementare di fluido.

Quindi è bene memorizzare che in un tensore di questo tipo il primo indice si riferisce alla superficie su cui è applicata la forza, mentre il secondo indice è relativo alla direzione di applicazione (*p.e.* τ_{13} rappresenta la componente sul piano $x_1 = \text{const}$ nella direzione x_3).

I fenomeni fisici sono rappresentabili in uno spazio vettoriale tridimensionale nel quale si suppone valida la geometria euclidea. Le quantità fisiche che caratterizzano i fenomeni sono dunque funzione delle coordinate di un generico punto (x_1, x_2, x_3) e del tempo, t . In questo spazio le grandezze fisiche sono rappresentate attraverso entità matematiche diverse a seconda delle proprietà geometriche attraverso le quali sono definite:

- scalari, associati ad un punto dello spazio e definiti attraverso un numero reale, φ (*p.e.* la temperatura o il modulo della velocità);
- vettori, associati ad un punto e ad una direzione orientata, e definiti attraverso 3 numeri reali, le componenti scalari del vettore, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$ (*p.e.* le tre componenti della velocità o di una forza come visto sopra);
- tensori di ordine n , che nel caso $n=2$ sono associati ad un punto dello spazio e a 3 direzioni orientate, e, come già visto, sono definiti per mezzo di 3 grandezze vettoriali (componenti vettoriali del tensore, \underline{a}_i) o di 9 numeri reali, le componenti scalari del tensore,

a_{ij} , rappresentabili da una matrice 3×3 , $\underline{\underline{a}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ (*p.e.* lo stato di tensione su

un elemento fluido).

In generale, la descrizione dei fenomeni è effettuata attraverso tensori di ordine, n , che, nello spazio a tre dimensioni, sono definiti mediante 3^n numeri reali (le componenti scalari del tensore). Pertanto uno scalare può essere considerato un tensore di ordine zero, un vettore, un tensore di ordine 1 e così via.

Per poter definire correttamente queste entità e per utilizzarle per derivare leggi fisiche indipendenti dalla trasformazione tra sistemi di riferimento, è necessario definire le operazioni che possono essere effettuate e le leggi secondo le quali si trasformano le loro componenti in un cambiamento di sistema di riferimento. In altre parole, le entità tensoriali resteranno le stesse nella trasformazione tra sistemi di riferimento mentre cambieranno le loro componenti.

1.3 TRASFORMAZIONI TRA SISTEMA DI RIFERIMENTO ORTONORMALI

Consideriamo due sistemi di riferimento ortonormali $\{c_i\}$ e $\{c'_j\}$ e cerchiamo la trasformazione che lega le componenti di un generico vettore, \underline{v} , nella base di partenza $\{c_i\}$ a quelle nella nuova base $\{c'_j\}$:

$$\underline{v} = v_i c_i, \quad \underline{v} = v'_j c'_j \quad (1)$$

La generica trasformazione lineare sarà del tipo

$$c'_j = c_i T_{ij} = \sum_{i=1,3} c_i T_{ij} \quad (2)$$

dove i coefficienti T_{ij} sono legati ai coseni direttori della trasformazione (per esempio nel caso di rotazione tra i due sistemi di riferimento di un angolo α su un piano, $c'_1 = c_1 \cos \alpha + c_2 \sin \alpha$, $c'_2 = -c_1 \sin \alpha + c_2 \cos \alpha$ e quindi $T_{11} = \cos \alpha$, $T_{21} = \sin \alpha$ e così via). Nella (2), e così per il seguito, si è usata la notazione di Einstein per la quale l'indice ripetuto (in questo caso i) corrisponde alla somma per valori da 1 a 3.

Essendo i due sistemi di riferimento ortonormali, è possibile scrivere

$$T_{ji} T_{jk} = \delta_{ik} \quad \text{o anche} \quad T_{ij} T_{kj} = \delta_{ik} \quad (\text{ma } T_{ij} T_{jk} \neq \delta_{ik}) \quad (3)$$

dove δ_{ik} è il cosiddetto delta di Kronecker (Leopold Kronecker, 1823-1891), uguale a 1 se $i=k$ e uguale a 0 se $i \neq k$ rappresentabile come una matrice 3×3 con elementi unitari sulla diagonale e nulli altrove (attenzione alla posizione degli indici perché $T_{ij} T_{jk} \neq \delta_{ik}$). La moltiplicazione per lo scalare delta di Kronecker produce una variazione dell'indice da i a k o viceversa. In relazione all'esempio precedente della rotazione di un angolo α sul piano, la relazione (3) corrisponde banalmente alle operazioni $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ e $\sin \alpha \cos \alpha - \cos \alpha \sin \alpha = 0$. Di conseguenza possiamo scrivere

$$\underline{v} = v_i c_i = v'_j c'_j = v'_j c_i T_{ij} \quad (4)$$

e quindi

$$v_i = v'_j T_{ij} \quad (5)$$

Moltiplicando ambo i membri per T_{ik} , e applicando la (3), si ottiene la trasformazione inversa

$$v'_k = v_i T_{ik} \quad (6)$$

Un'entità matematica che si trasforma secondo la (6) viene chiamata vettore.

Consideriamo adesso un tensore del secondo ordine \underline{a} e vediamo in che modo si trasformano le sue componenti vettoriali e scalari. Per quanto riguarda le prime, ovviamente varrà la (6) essendo dei vettori

$$\underline{a}'_i = \underline{a}_k T_{ki} \quad (7)$$

Per quello che riguarda le componenti scalari invece dobbiamo applicare ripetutamente la formula di trasformazione considerando che vale

$$a_{kn} = \underline{a}_k c_n \quad (8)$$

e che quindi

$$a'_{ij} = \underline{a}'_i c'_j = \underline{a}_k T_{ki} c'_j = \underline{a}_k T_{ki} c_n T_{nj} = a_{kn} T_{ki} T_{nj} \quad (9)$$

che rappresenta la legge di trasformazione cercata e contemporaneamente definisce un'entità matematica che viene chiamata tensore del secondo ordine. Allo stesso modo si possono ricercare le leggi di trasformazione che definiscono tensori di ordine superiore.

Esercizio: dimostrare che il delta di Kronecker è invariante per cambiamenti di sistema di riferimento. Applicando la (9) e la (3), si ottiene

$$\delta'_{ij} = T_{ki} T_{mj} \delta_{km} = T_{ki} T_{kj} = \delta_{ij}$$

Un tensore, come il precedente, invariante per cambiamenti di sistemi di riferimento, è detto isotropo. In questo senso, tutti gli scalari sono isotropi, mentre non lo è nessun vettore e tra i tensori del secondo ordine solo il delta di Kronecker (tra i tensori del quarto ordine sono isotropi solo le combinazioni di delta di Kronecker, $\delta_{ij}\delta_{kl}$).

1.4 OPERAZIONI TRA TENSORI

Una volta definite le entità scalari, vettoriali o in generale tensoriali (utilizzando l'osservazione già fatta che gli scalari e i vettori possano essere considerati tensori rispettivamente

di ordine 0 e 1), si possono introdurre le operazioni tra queste e verificare a quale nuova entità danno origine.

La somma (o differenza) può essere calcolata solo tra tensori dello stesso ordine e fornisce ancora un tensore dello stesso ordine dei singoli termini (si può verificare facilmente tramite la regola di trasformazione (9)) e che ha per componenti la somma (o differenza) delle componenti omologhe:

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} \pm \underline{\underline{b}} \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

Nella moltiplicazione o divisione di un tensore per uno scalare si moltiplica (o si divide) ciascuna componente del tensore per lo scalare. Si ottiene quindi un tensore dello stesso ordine di quello di partenza (come si può verificare facilmente con le regole di trasformazione):

$$\underline{\underline{c}} = \varphi_1 \underline{\underline{b}} / \varphi_2 \Rightarrow c_{ij} = \varphi_1 b_{ij} / \varphi_2$$

Il prodotto tra tensori, può essere effettuato in differenti modi. Per tensori del secondo ordine, facendo riferimento alla rappresentazione tramite matrici 3×3, sarà possibile come prima cosa costruire un prodotto di ciascun elemento della prima per ciascun elemento della seconda (cioè un'entità rappresentabile da una matrice 9×9) che rappresenta un tensore del quarto ordine

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}} \Rightarrow c_{ijkm} = a_{ij} b_{km}$$

In questa operazione, detta prodotto esterno, viene quindi a cambiare l'ordine del tensore. Nel caso in cui tale operazione venga effettuata tra due vettori, si origina un tensore del secondo ordine

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} \otimes \underline{\underline{b}} \Rightarrow c_{ij} = a_i b_j$$

Una seconda modalità per effettuare il prodotto, è quella equivalente alla moltiplicazione righe per colonne tra matrici (prodotto interno). In questo caso, il tensore risultante ha lo stesso ordine di quello di partenza

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} \bullet \underline{\underline{b}} \Rightarrow c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$$

(è bene ricordare che nell'operazione precedente è nuovamente sottintesa l'operazione di somma tra indici ripetuti). Quando uno o più indici di un tensore vengono ad essere ripetuti si dice che si è effettuata una contrazione degli indici (da questo si deduce che per determinare semplicemente l'ordine del tensore risultante basterà sommare gli indici liberi cioè non ripetuti, *p.e* nel caso precedente 2). Nel caso del prodotto di due vettori questa contrazione corrisponde al prodotto scalare

$$\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}} \bullet \underline{\mathbf{b}} \Rightarrow c = a_i b_i$$

Infine è possibile ottenere il prodotto di due tensori del secondo ordine saturando entrambi gli indici per ottenere uno scalare (prodotto scalare tra tensori)

$$\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}} : \underline{\mathbf{b}} \Rightarrow c = a_{ij} b_{ij}$$

I prodotti descritti in precedenza si applicano anche al caso di tensori di ordine differente. Per esempio, nel caso del prodotto di un tensore del secondo ordine per un vettore, si può ottenere un tensore del terzo ordine (prodotto esterno) o un vettore (prodotto interno)

$$\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}} \otimes \underline{\mathbf{b}} \Rightarrow c_{ijk} = a_{ij} b_k.$$

$$\underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}} \bullet \underline{\mathbf{b}} \Rightarrow c_i = a_{ij} b_j.$$

In queste operazioni non è stato inserito il prodotto vettoriale tra vettori (infatti né il prodotto esterno tra vettori né quello interno permettono di ottenere nuovamente un vettore), che viene indicato come $\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}$. Per scriverlo per componenti, è necessario introdurre un nuovo operatore, detto tensore di Ricci (Gregorio Ricci-Curbastro, 1853-1925), ε_{ijk} , uguale a 1 se gli indici sono tutti differenti con combinazioni pari (123, 231, 312,...), uguale a -1 se gli indici sono tutti differenti con combinazioni dispari (132, 213, 321,...) e uguale a 0 se almeno uno degli indici è ripetuto. E' quindi possibile scrivere il prodotto vettoriale formalmente come

$$c_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k \tag{10}$$

Proviamo come esempio ad ottenere la componente c_1 :

$$c_1 = \varepsilon_{111}a_1b_1 + \varepsilon_{112}a_1b_2 + \varepsilon_{113}a_1b_3 + \varepsilon_{121}a_2b_1 + \varepsilon_{122}a_2b_2 + \varepsilon_{123}a_2b_3 + \varepsilon_{131}a_3b_1 + \varepsilon_{132}a_3b_2 + \varepsilon_{133}a_3b_3$$

$$c_1 = \varepsilon_{123}a_2b_3 + \varepsilon_{132}a_3b_2 = a_2b_3 - a_3b_2$$

e così per le altre componenti.

Tutte le operazioni di prodotto tra tensori illustrate in precedenza danno origine a nuove entità, la cui natura può essere verificata con le regole di trasformazione.

Esercizio: verifichiamo che il prodotto scalare tra tensori è effettivamente uno scalare. Applicando la regola di trasformazione (9) e la definizione (3), si ottiene

$$c = a_{ij}b_{ij}, \quad c' = a'_{ij}b'_{ij} = a_{kn}T_{ki}T_{nj}b_{lm}T_{li}T_{mj} = a_{kn}\delta_{kl}b_{lm}\delta_{nm} = a_{kn}b_{kn} = c$$

cioè la quantità resta invariata nel passaggio tra sistemi di riferimento e quindi è uno scalare.

1.5 PROPRIETA' DI SIMMETRIA

E' importante determinare se un tensore possa essere decomposto in parti con particolari proprietà di simmetria soprattutto considerando il passaggio tra differenti sistemi di riferimento. Innanzitutto consideriamo la decomposizione di un tensore nella sua parte simmetrica ed antisimmetrica. Se \underline{a} è un generico tensore di componenti a_{ij} , possiamo sempre scrivere:

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) = \text{sym}(a_{ij}) + \text{skew}(a_{ij}) \quad (11)$$

dove la prima parte è ovviamente simmetrica (resta cioè invariata scambiando l'indice i con j) mentre la seconda è antisimmetrica (cambia segno scambiando i e j). La parte simmetrica è costituita da 6 componenti indipendenti, mentre la parte antisimmetrica da solo 3 componenti.

Analogamente è sempre possibile scomporre un tensore generico in una parte sferica ed una deviatoria:

$$a_{ij} = 1/3 \text{tr}(\underline{a}) \delta_{ij} + (a_{ij} - 1/3 \text{tr}(\underline{a}) \delta_{ij}) \quad (12)$$

avendo indicato con $\text{tr}(\underline{a}) = a_{ii}$ (somma sottintesa) la traccia di \underline{a} . Il primo termine a secondo membro indica la parte sferica di \underline{a} , ed, essendo uno scalare per il delta di Kronecker, ha la proprietà che le sue componenti non variano al variare del sistema di riferimento, mentre il secondo termine, racchiuso tra parentesi, rappresenta la sua parte deviatoria (che ovviamente può variare). La parte sferica è costituita da un solo componente indipendente, mentre quella deviatoria da 8 componenti indipendenti (uno degli elementi sulla diagonale può essere ricavato dagli altri due).

Esercizio: dimostrare che se un tensore è simmetrico in un sistema di riferimento lo è in tutti. Se $a_{ij} = a_{ji}$ allora applicando la (9) e la (3)

$$a'_{ij} = a_{kn} T_{ki} T_{nj} = a_{nk} T_{nj} T_{ki} = a'_{ji}$$

come da dimostrare (lo stesso vale per un tensore antisimmetrico).

1.5 AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Dato un tensore del secondo ordine, \underline{a} , è possibile trovare un sistema di riferimento, individuato dalla terna vettoriale \underline{b} , nel quale il tensore sia esprimibile in forma diagonale, risolvendo il sistema lineare omogeneo ottenuto dalla relazione

$$a_{ij} b_j = \lambda \delta_{ij} b_j, \quad (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) b_j = 0$$

dove \underline{b} è detto autovettore e λ autovalore. Il sistema precedente ammette soluzione non banale per le componenti scalari dell'autovettore una volta che il determinante del sistema stesso sia diverso da zero, cioè

$$\det(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0$$

La relazione precedente, detta equazione caratteristica, costituisce un'equazione di terzo ordine per l'incognita λ con termini noti dati dai cosiddetti invarianti del tensore \underline{a} (traccia, somma determinanti minori e determinante, cioè tre quantità scalari indipendenti dal sistema di riferimento), che una volta risolta, fornisce i tre valori di λ necessari a trovare la terna \underline{b} . In effetti, essendo solo due delle equazioni del precedente sistema linearmente indipendenti, è necessario

aggiungere una terza condizione che di solito è quella di normalità tra le componenti dell'autovettore ($\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij}$, cioè che siano versori).

Gli autovalori λ che si ottengono dalla soluzione dell'equazione caratteristica, possono essere, in generale, numeri reali o complessi. Nel caso di tensori simmetrici si può dimostrare che gli autovalori sono reali, sono tra loro ortogonali (definiscono quindi un sistema di riferimento cartesiano detto sistema di riferimento principale per quel tensore) e nel sistema di riferimento principale, le uniche componenti differenti da zero, sono quelle della diagonale principale che coincidono con gli autovalori ($a_{ij} = \lambda_{1,2,3} \delta_{ij}$).

La procedura di diagonalizzazione appena descritta è particolarmente importante per esprimere le relazioni tensoriali in forma semplice (*p.e.* nel caso del tensore degli sforzi).

1.6 CAMPI VETTORIALI E TENSORIALI

Scalari, vettori e tensori in fluidodinamica, definiti in un dominio spaziale, possono essere funzioni del tempo, t , e delle coordinate spaziali, x_1, x_2, x_3 . Di conseguenza, sarà possibile effettuare le derivate parziali per esempio delle componenti di una quantità vettoriale \mathbf{v} sia rispetto al tempo che allo spazio (lo stesso vale per un qualsiasi scalare o per le componenti scalari di un tensore)

$$\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t}(x_1, x_2, x_3, t), \quad \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_j}(x_1, x_2, x_3, t)$$

Si definisce l'operatore vettoriale differenziale ∇ (si legge nabla) l'operatore di componenti

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (13)$$

Tale operatore può agire sia su scalari, vettori e tensori. In particolare quando ∇ opera su un campo scalare, ϕ , permette di ottenere il vettore gradiente:

$$\underline{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \partial\varphi/\partial x_1 \\ \partial\varphi/\partial x_2 \\ \partial\varphi/\partial x_3 \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Un campo vettoriale esprimibile come il gradiente di una funzione scalare è detto potenziale.

Quando opera su un vettore, $\underline{\mathbf{v}}$, mediante prodotto scalare, l'operatore nabla fornisce uno scalare detto divergenza di $\underline{\mathbf{v}}$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \text{div}(\underline{\mathbf{v}}) = \partial v_1/\partial x_1 + \partial v_2/\partial x_2 + \partial v_3/\partial x_3 \quad (15)$$

Un campo con divergenza nulla è detto solenoidale.

Se invece si effettua un prodotto vettoriale, allora si ottiene un vettore detto rotore del vettore

$$\underline{\nabla} \times \underline{\mathbf{v}} = \text{rot}(\underline{\mathbf{v}}) = \varepsilon_{ijk} \partial v_k/\partial x_j \quad (16)$$

con le componenti ottenute tramite la (10). Un campo con rotore nullo è detto irrotazionale. Si noti che per definizione la divergenza di un rotore è identicamente nulla (ciò si dimostra facilmente applicando la (15) alla (16)). Se infine si effettua il prodotto esterno del nabla su un vettore si ottiene un tensore del secondo ordine (da questo e da altri punti di vista l'operatore nabla si comporta quindi come un vettore).

$$\underline{\nabla} \otimes \underline{\mathbf{v}} = \partial v_i/\partial x_j \quad (17)$$

che avrà quindi 9 componenti scalari che costituiscono le derivate di ciascuna componente del vettore in ciascuna direzione.

Quando l'operatore nabla è invece applicato ad un tensore del secondo ordine, si ottengono delle quantità vettoriali o tensoriali di terzo ordine a seconda che si effettui un prodotto interno o esterno

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{\underline{\mathbf{a}}} &= \partial a_{ij}/\partial x_j \\ \underline{\nabla} \otimes \underline{\underline{\mathbf{a}}} &= \partial a_{ij}/\partial x_k \end{aligned}$$

Esercizio: dimostriamo che un campo potenziale è irrotazionale, cioè che

$$\underline{\nabla} \times \underline{\nabla} \varphi = 0 \quad (18)$$

infatti, applicando la (16) alla (14), si ottiene per la componente i-esima del prodotto vettoriale

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j}$$

dove come al solito è sottintesa la sommatoria su j e k. Non potendo esserci indici j e k uguali a i (altrimenti il tensore di Ricci sarebbe nullo), in questa somma ci sono solo due termini

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} + \varepsilon_{ikj} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} + \varepsilon_{ikj} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j}$$

che sono uguali ma di segno opposto (poiché il tensore di Ricci cambia segno se si scambiano due indici adiacenti). Viceversa, se un campo vettoriale ha rotore nullo, cioè è irrotazionale, allora può essere espresso come il gradiente di una funzione scalare ed è detto a potenziale.

Tramite successiva applicazione scalare dell'operatore nabla è anche possibile definire ulteriori funzioni tra le quali la funzione laplaciano di uno scalare e di un vettore

$$\nabla^2 \varphi = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \varphi) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} \quad (19)$$

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{v}} = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \otimes \underline{\mathbf{v}}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_3^2} \quad (20)$$

Se un campo vettoriale è irrotazionale, si è già visto che è possibile definire un potenziale per tale campo. Se calcoliamo la divergenza del campo vettoriale, otteniamo proprio il laplaciano del potenziale

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{v}} = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \varphi) = \nabla^2 \varphi$$

Di conseguenza, se il campo vettoriale è solenoidale, il laplaciano del potenziale sarà identicamente nullo, ottenendo la cosiddetta equazione di Laplace (Pierre-Simon Laplace, 1749-1827)

$$\nabla^2 \varphi = 0 \quad (21)$$

che è un'equazione lineare di secondo grado alle derivate parziali.

A partire dai campi vettoriali e dagli operatori appena definiti, è possibile dimostrare due teoremi che permettono di sostituire integrali di volume con integrali di superficie (o integrali di superficie con integrali lungo una linea chiusa). Viene nel seguito fornito solo l'enunciato di questi due teoremi. Se F è una funzione definita in tutti i punti di un dominio limitato V racchiuso dalla superficie chiusa S , si dimostra che (teorema di Green, George Green 1793-1841):

$$\iiint_V \frac{\partial F}{\partial x_i} dV = \iint_S F n_i dS \quad (22)$$

essendo, così come nel seguito, \underline{n} il versore normale esterno (uscente) alla superficie. Se sono definite in tutto il dominio le componenti di un vettore \underline{v} , applicando il teorema di Green per le tre componenti di \underline{v} si può dimostrare il teorema della divergenza:

$$\iiint_V \underline{\nabla} \cdot \underline{v} dV = \iiint_V \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dV = \iint_S v_i n_i dS = \iint_S \underline{v} \cdot \underline{n} dS \quad (23)$$

dove l'integrale di superficie rappresenta il flusso di \underline{v} attraverso la superficie S . Il teorema stabilisce quindi l'uguaglianza tra il flusso della quantità vettoriale attraverso una superficie chiusa (entrante e uscente) e la variazione della quantità stessa nel volume delimitato da tale superficie. In definitiva, in una sua forma più generale, il teorema di Green può essere applicato considerando $F = \underline{a}$ un tensore di ordine arbitrario, le cui componenti a_{ij} risultano comunque definite in V .

Assegnata una linea chiusa L , con versore tangente \underline{s} , in un campo D in tutti i punti del quale risulti definito il vettore \underline{v} ed una superficie aperta S in D avente come contorno L , si può dimostrare che (teorema di Stokes o della circuitazione, George Gabriel Stokes 1819-1903):

$$\oint_L \underline{v} \cdot \underline{s} dl = \iint_S (\underline{\nabla} \times \underline{v}) \cdot \underline{n} dS \quad (24)$$

cioè la circuitazione di \underline{v} (il primo membro della precedente espressione, spesso indicato anche come Γ) è uguale al flusso del rotore di \underline{v} attraverso una qualsiasi superficie delimitata da L .

Capitolo 2

PROPRIETA' FISICHE DEI FLUIDI, FLUIDOSTATICA E TERMODINAMICA

2.1 DEFINIZIONE DI FLUIDO

Per definire cosa è un fluido, è utile considerare che per confronto un solido si deforma sotto sollecitazione esterna (cioè cambia la sua forma come conseguenza dell'alterazione della distribuzione di pressione al suo interno) in maniera tanto minore quanto minore è la sollecitazione applicata e come conseguenza può tornare alla configurazione iniziale (corpo elastico) o deformarsi permanentemente (corpo plastico). In un fluido, invece, la deformazione può anche essere elevata a fronte di piccole sollecitazioni (si pensi ad una sfera che cade in aria o acqua la cui posizione cambia indefinitamente come quella del fluido che la circonda). Viceversa, la velocità con la quale il fluido reagisce alla sollecitazione resta limitata per piccole perturbazioni (la sfera in caduta raggiunge velocità di traslazione costante così come la velocità di deformazione del fluido circostante). La differenza tra i due stati dipende ovviamente dalla differente struttura molecolare e dalle relative forze agenti. Possiamo pertanto definire fluido quel mezzo continuo per il quale, in conseguenza di una sollecitazione costante, ad un tempo infinito corrisponde una velocità di deformazione finita e quindi misurabile.

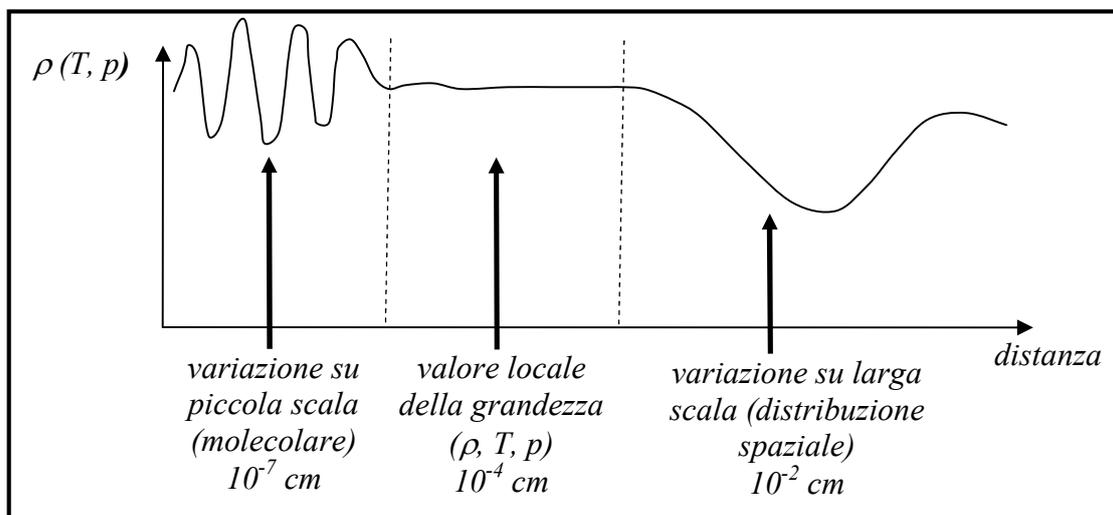


Figura 2. Andamento della densità (temperatura, pressione) in funzione della distanza tra “particelle fluide”.

La materia, che è costituita da particelle elementari, sarà trattata in seguito come un mezzo continuo supponendo cioè che la massa sia distribuita con continuità nello spazio. In effetti le proprietà del fluido, inteso come mezzo continuo saranno ottenute attraverso delle medie effettuate su di un volume, detto particella fluida. Come riportato in figura 2, questo volume, corrisponde anche alla minima scala alla quale possiamo descrivere il comportamento di un fluido (ipotesi del continuo). Deve essere sufficientemente piccolo rispetto alle scale dei fenomeni fluidodinamici, affinché le grandezze medie su di esso possano essere approssimate con uno sviluppo di Taylor (Brook Taylor, 1685-1731) al primo ordine, ma grande abbastanza da contenere un numero di particelle elementari così elevato che le medie siano statisticamente significative. Per dare un ordine di grandezza a queste considerazioni, precisiamo che la distanza intermolecolare in aria è circa uguale all'inverso della radice cubica del numero di Avogadro (Lorenzo Romano Amedeo Carlo Avogadro, 1776-1856) ($\sim 10^{19}$ molecole/cm³ d'aria) e quindi pari a circa 3×10^{-7} cm, 3 nm, mentre l'ordine di grandezza delle più piccole strutture in un fluido può essere inferiore a 10 μ m ed infatti l'ordine di grandezza di un buon sensore di misura in fluidodinamica dovrebbe essere intorno a 1 μ m. L'ipotesi del continuo porta dunque ad ignorare la struttura intima della materia a livello atomico e la descrizione del moto a tale livello. Per tenerne comunque conto in modo macroscopico, vengono introdotte variabili termodinamiche quali densità, temperatura e pressione. In altre parole non possiamo descrivere una quantità osservabile macroscopica (come per esempio la temperatura) a livello dei singoli moti molecolari essendo questa derivata solo su base statistica a partire da tali moti. Sarebbe infatti impossibile descrivere tutti i moti dei singoli atomi e molecole se non su base statistica a causa dell'elevato numero di componenti. Dobbiamo allora limitarci a fare un'ipotesi semplificativa definendo le variabili su una scala intermedia.

2.2 FLUIDOSTATICA

Si consideri come prima approssimazione quella di un fluido a riposo e cerchiamo le relazioni esistenti tra le variabili. Mentre nel caso di fluido a velocità differente da zero sarà necessario considerare che la pressione (anche a bassa velocità), la temperatura e densità (ad elevate velocità) saranno funzione dello stato di moto, nella fluidostatica è possibile parlare di queste quantità come dipendenti solo dal punto considerato.

Per quanto riguarda la densità, si consideri un punto P, individuato dalla sua posizione \underline{x} , all'interno del mezzo in esame, ed un volume ΔV che lo racchiude, avendo indicato con ΔM la massa contenuta in ΔV , il limite:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}$$

non è una funzione continua delle variabili spaziali e dipende dal modo con cui si fa tendere il volume a zero, essendo funzione del numero di particelle elementari che sono presenti nel volume nell'istante considerato. In effetti esiste ed è unico solo il limite per $\Delta V \rightarrow \Delta V_p$, con ΔV_p volume della particella fluida. In questo caso infatti, il numero di particelle elementari contenute nel volume è così grande da fare sì che la massa mediamente contenuta in esso sia indipendente dal comportamento delle singole particelle elementari e dal modo in cui il volume viene fatto tendere a ΔV_p . L'ipotesi del continuo permette di considerare coincidenti i due limiti e definire una funzione scalare, la densità, indicata con $\rho(\underline{x})$:

$$\rho(\underline{x}) = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_p} \frac{\Delta M}{\Delta V} \cong \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}. \quad (25)$$

In un fluido a riposo sono assenti sforzi tangenziali e l'unica forza tra le superfici adiacenti di fluido è quella normale alla superficie stessa. Con riferimento al volume elementare di fluido di figura 3, utilizzando la relazione tra forza elementare normale e pressione (che definisce la pressione stessa)

$$d\underline{F} = -p \underline{n} dS$$

dove \underline{n} è la normale uscente da ciascuna superficie, e applicando a tale volume il bilancio delle forze (somma nulla) in direzione x_1 , si ottiene

$$p_1 dS - p_1' dS' \sin\theta = p_1 dx_2 dx_3 - p_1' dx_2' dx_3 \sin\theta = 0$$

Considerando che $dx_2' = dx_2/\sin\theta$, si deriva immediatamente che

$$p_1 = p_1'$$

cioè la pressione non varia in direzione x_1 . Il discorso può essere ripetuto integralmente nella direzione x_3 per ottenere l'indipendenza anche lungo questa direzione.

Possiamo quindi affermare che in un fluido a riposo sui piani orizzontali la pressione si mantiene costante (legge di Pascal, Blaise Pascal, 1623-1662)

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = 0 \quad (26)$$

Se ora analizziamo la situazione di figura 3 lungo la direzione verticale, x_2 , notiamo che oltre ai termini contenenti la pressione, ci sarà anche il termine del peso del cubo elementare, $\rho g dV$, essendo g l'accelerazione di gravità:

$$p_2 dx_1 dx_3 - p_2' dx_1 dx_3 - \rho g dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \quad (27)$$

e avendo già sostituito $dx_1' = dx_1/\sin\theta$. Dalla relazione precedente risulta

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = -\rho g \quad (28)$$

(avendo indicato $\partial p = p_2' - p_2$), che mostra come in un fluido a riposo la pressione decresce con l'altezza (l'asse verticale è orientato verso l'alto). Nel caso in cui la densità del fluido possa essere considerata uniforme (cosa non vera in atmosfera), risulta la legge dell'idrostatica (o di Stevino, Simon Stevin, 1548–1620), per la quale la pressione diminuisce linearmente con l'altezza da una quota di riferimento

$$p = p_0 - \rho g h \quad (29)$$

avendo preso $p=p_0$ alla quota di riferimento $x_2=0$ e la quota h da questo riferimento. Per esempio scendendo in profondità in acqua (quindi on valori di h negativi), la pressione cresce di circa un'atmosfera ogni 10 metri, (da verificare per esercizio). Si noti anche che, se nella (27) facciamo tendere il cubo elementare ad un punto ($dx_1 dx_2 dx_3 \rightarrow 0$) risulta comunque $p_2' = p_2$, cioè comunque sia orientata la superficie la pressione resta costante ed è quindi una quantità scalare.

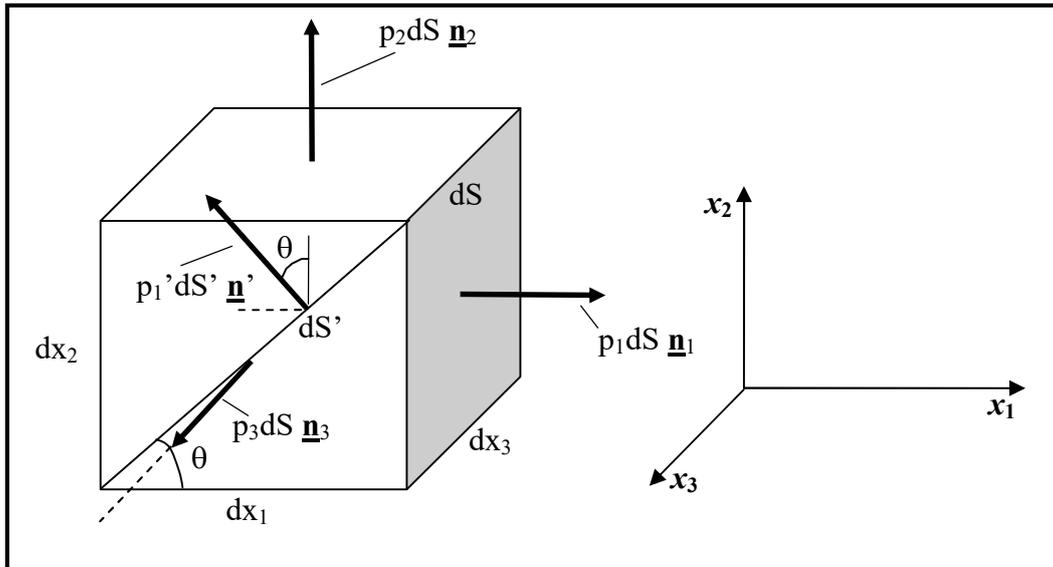


Figura 3. Pressioni agenti su un volume elementare di fluido.

La legge dell'idrostatica permette anche di spiegare il principio di Archimede (Archimede di Siracusa, 287 a.C.–212 a.C.), che rende conto della spinta che riceve un corpo immerso in un fluido: un corpo immerso in un fluido ideale è soggetto ad una forza, diretta verso l'alto e in modulo pari al peso del volume di fluido spostato dal corpo immerso (forza di galleggiamento o spinta idrostatica). Infatti, considerando per semplicità una forma cubica di lato l , composto da un materiale avente densità ρ_m differente da quella del fluido, ρ , questo percepirà alla base una pressione del fluido circostante maggiore di $\rho g l$ rispetto a quella sulla faccia superiore (sulle facce laterali le pressioni si equivalgono). Come conseguenza di questa differenza di pressione, il cubo percepirà una forza pari a $\rho g l^3 = \rho g V = mg$, che rappresenta proprio il peso del volume di fluido ed è diretta verso l'alto se siamo in un liquido, dove la pressione aumenta con la profondità. L'equilibrio o meno tra la forza di Archimede e la forza peso determinerà la possibilità di galleggiamento o meno del corpo, che quindi sarà legata alla differenza tra le densità del corpo e del liquido ($\rho_m - \rho$). Solo nel caso di $(\rho_m - \rho) \leq 0$ sarà possibile avere il galleggiamento del corpo.

Infine, la temperatura è definita alla scala molecolare come lo stato di agitazione del sistema, ma dalla teoria cinetica dei gas può essere associata ad una proprietà macroscopica termodinamica che descriva lo stato termico del sistema, quale la temperatura. E' una grandezza scalare.

2.3 RICHIAMI DI TERMODINAMICA

In fluidi monofase (cioè caratterizzati da una sola componente fluida) la pressione, densità e temperatura, T , sono legate da una relazione funzionale del tipo:

$$p = p(\rho, T),$$

detta equazione di stato, che rende necessario e sufficiente individuare solo due su tre di queste quantità.

Per un fluido incompressibile (nel seguito si userà questo termine al posto di quello più corretto in italiano, incompressibile), quale un liquido, la densità non è in generale funzione della pressione ($\frac{\partial \rho}{\partial p} = 0$) e vale

$$\rho = \rho(T)$$

e la pressione resta una variabile indipendente (addirittura indeterminata in valore assoluto visto che possono essere ottenuti dalle equazioni solo i gradienti di pressione). La propagazione di perturbazioni di densità e temperatura nel fluido è governata dal coefficiente di espansione termica

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$$

Invece, in un gas compressibile, una variazione di densità o pressione si propaga nel mezzo ad una velocità finita detta velocità del suono

$$c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)^{1/2} \quad (30)$$

Dalla definizione precedente, si può notare che in un fluido incompressibile la velocità del suono tende all'infinito ($\partial \rho \rightarrow 0$). In un gas, si può anche definire il modulo di elasticità

$$A = c^2 \rho$$

Nel caso di un gas perfetto, dalla teoria cinetica dei gas, si ricava l'equazione di stato

$$p = \rho RT \quad (31)$$

dove la costante vale (per aria secca) $R = 287 \text{ J/Kg } ^\circ\text{K}$. Valgono anche le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} R = c_p - c_v \\ \gamma = c_p / c_v \end{cases} \quad (32)$$

dove c_p rappresenta il calore specifico a pressione costante ($c_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p$ per processi reversibili), c_v il calore specifico a volume costante ($c_v = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_v$, sempre per processi reversibili) e γ è il rapporto tra i calori specifici (pari circa a 1.4 per aria a temperatura standard). Sia c_p che c_v sono funzioni della temperatura. Verificare per esercizio che valgono le relazioni inverse rispetto alle (32)

$$\begin{cases} c_p = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) R \\ c_v = \left(\frac{1}{\gamma - 1} \right) R \end{cases} \quad (33)$$

La quantità Q , che compare nelle definizioni dei calori specifici, rappresenta la quantità di calore che il sistema riceve dall'esterno e che compare nella prima legge della termodinamica (conservazione energia totale), insieme al lavoro fatto sul sistema dalle forze esterne (per unità di massa), L , e all'incremento di energia, dE (sempre per unità di massa)

$$L + Q = dE \quad (34)$$

L'energia E costituisce l'energia interna del sistema composta di una parte propriamente interna di natura termica, U , e una parte di energia cinetica del fluido, $\frac{1}{2}u_i^2$ ($u_i^2 = u_i u_i$).

Per un processo termodinamico reversibile (per esempio una variazione di volume con espansione o contrazione lenta) vale

$$dL = -pdV$$

(si è indicato con V il volume per unità di massa cioè $1/\rho$) ed essendo il processo reversibile lento, cioè senza variazioni di energia cinetica, si può scrivere la (34) in termini infinitesimi reversibili

o anche

$$\begin{aligned} dU &= dQ - pdV \\ \frac{dU}{dT} &= \frac{dQ}{dT} - p \frac{dV}{dT} \end{aligned}$$

che a volume costante fornisce

$$\left(\frac{dU}{dT} \right)_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = c_V$$

da cui risulta

$$dU = c_V dT$$

o, in termini finiti,

$$U = c_V T .$$

Definendo entalpia la quantità

$$h = U + pV$$

(si definisce anche entalpia totale la quantità $H = h + u^2/2 + G$, dove G rappresenta il potenziale delle forze gravitazionali), sempre per un processo reversibile, utilizzando il primo principio, vale

$$dh = dU + pdV + Vdp = dQ + Vdp$$

Ripetendo quanto fatto in precedenza, si ottiene

$$\frac{dh}{dT} = \frac{dQ}{dT} + V \frac{dp}{dT}$$

che, a pressione costante fornisce

$$\left(\frac{dh}{dT}\right)_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V = c_p$$

da cui risulta

$$dh = c_p dT$$

o, in termini finiti

$$h = c_p T .$$

Sempre per un processo reversibile, si può definire l'entropia, S , come

$$dS = \frac{1}{T} dQ$$

che quindi permette di scrivere il primo principio della termodinamica come

$$dU = TdS - pdV .$$

Un processo è detto adiabatico se avviene senza addizione o sottrazione di calore dall'esterno. Se oltre a questo il processo avviene anche senza attrito, allora è detto isentropico e, dalla definizione precedente di entropia, è possibile ottenere (dimostrare per esercizio)

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost.} \quad (35)$$

Di conseguenza per un gas perfetto isentropico si trova

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = \text{cost.} \times \gamma \rho^{\gamma-1} = \gamma \left(\frac{p}{\rho}\right)$$

da cui risultano le relazioni per la velocità del suono, il modulo di elasticità e il coefficiente di espansione termica

$$\left\{ \begin{array}{l} c = \left(\gamma \frac{p}{\rho} \right)^{1/2} = (\gamma RT)^{1/2} \\ A = \gamma p \\ \beta = \frac{1}{T} \end{array} \right. \quad (36)$$

Il valore della velocità del suono in aria è pari a circa 350 m/s (alla temperatura di 20°C=293°K).

2.4 DIFFUSIONE

In aggiunta alle variabili termodinamiche, vi sono da considerare in un fluido altre quantità importanti che intervengono nei processi di diffusione. Nella diffusione di quantità di moto tra strati adiacenti di fluido a velocità differente interviene il coefficiente di viscosità dinamica, μ , o in maniera equivalente, il coefficiente di viscosità cinematica, $\nu = \mu / \rho$. Le unità di misura sono rispettivamente [massa/tempo×lunghezza] e [lunghezza²/tempo]. In acqua vale $\nu \approx 10^{-6}$ m²/s e in aria $\nu \approx 1.5 \times 10^{-5}$ m²/s a temperatura ambiente (la diffusione di quantità di moto è quindi più efficiente in aria che in acqua). In generale il coefficiente di viscosità dinamica è funzione sia delle coordinate spaziali che di quelle temporali, ma in pratica è funzione della sola temperatura $\mu = \mu(T)$.

Il coefficiente di conducibilità termica, K , e il coefficiente di diffusività termica, α , $\alpha = K / \rho c_p$, intervengono nella diffusione di calore nel fluido. Le unità di misura sono rispettivamente [lunghezza×massa/tempo³×temperatura] e [lunghezza²/tempo]. In acqua vale $\alpha \approx 1.4 \times 10^{-7}$ m²/s e in aria $\alpha \approx 2 \times 10^{-5}$ m²/s a temperatura ambiente (la diffusione di calore è quindi più efficiente in aria che in acqua). In generale il coefficiente di conducibilità termica è funzione sia delle coordinate spaziali che di quelle temporali, ma in pratica è funzione della sola temperatura $K = K(T)$.

Il coefficiente di diffusività molecolare, D , interviene nella diffusione di un scalare nel fluido (per esempio un colorante in acqua o fumo in aria). Le unità di misura sono [lunghezza²/tempo]. Per un colorante in acqua vale $D \approx 10^{-9}$ m²/s a temperatura ambiente e per fumo in aria $D \approx 2 \times 10^{-5}$ m²/s sempre a temperatura ambiente. Il valore in generale dipende sia dallo scalare che dal fluido.

Capitolo 3

CINEMATICA DEI FLUIDI

3.1 DESCRIZIONE EULERIANA E LAGRANGIANA

La cinematica dei fluidi studia il moto di una particella fluida, come definita nel capitolo 2, non soggetta a forze. Ci si deve quindi chiedere in che modo sia possibile definire il moto di un fluido rispetto per esempio a quello di un corpo solido descritto dalla meccanica del punto. Rispetto a quest'ultima condizione, bisogna considerare che il mezzo stesso (cioè il fluido) è in moto. E' allora possibile costruire la variazione di una quantità F (che può rappresentare la temperatura, la pressione o la velocità) in differenti modalità. Con riferimento alla figura 4:

- $F = F(\underline{x}_0, t)$, cioè fissata la posizione iniziale \underline{x}_0 (o in altre parole la particella fluida), viene descritta la variazione nel tempo lungo la traiettoria della particella fluida considerata, trasportata dal fluido circostante anch'esso in moto → descrizione Lagrangiana (Joseph-Louis Lagrange, nato Giuseppe Lodovico Lagrangia 1736-1813)

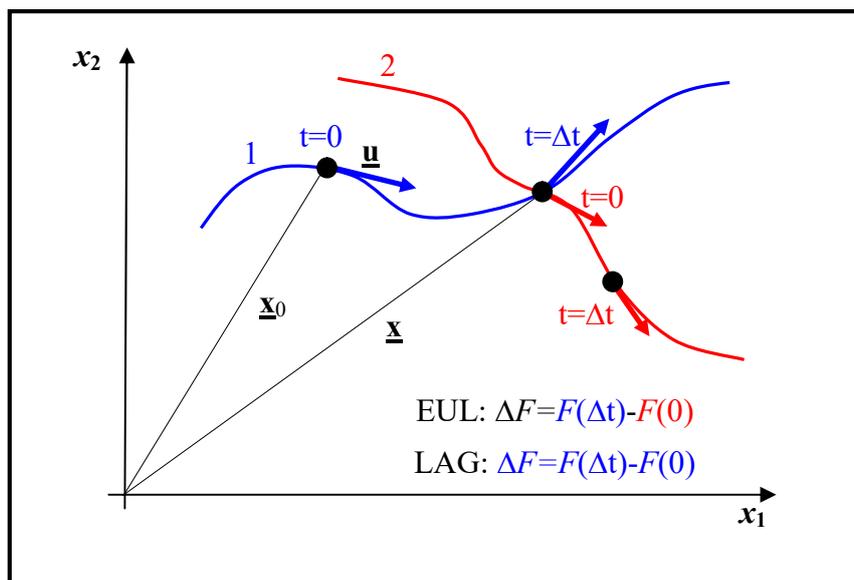


Figura 4. Moto di particelle fluide.

- $F = F(\underline{x}, t)$, cioè fissato un punto nello spazio (\underline{x}), viene descritta la variazione nel tempo in quel punto al passaggio di differenti particelle fluide
→ descrizione Euleriana (Leonhard Euler, 1707-1783)
- $F = F(\underline{x}_0, t)$, cioè fissata la posizione iniziale \underline{x}_0 (la particella fluida), viene descritta la variazione nel tempo lungo la traiettoria della particella fluida considerata, libera di muoversi di moto proprio nel fluido anch'esso in moto
→ descrizione materiale

Un esempio di queste tre modalità è dato da un fiume che scorre rispetto al quale si va ad esaminare la variazione di una proprietà del fluido in un sistema di riferimento coincidente con una foglia (immaginata molto leggera e completamente trasportata dalla corrente e quindi da descrivere in maniera Lagrangiana), un sasso (fermo in un punto rispetto al quale scorre il fluido e quindi da descrivere in maniera Euleriana) e un pesciolino (che oltre ad essere trasportato dalla corrente fluida ha un moto proprio dovuto a forze esterne e quindi soggetto ad una descrizione materiale). Anche la maniera con la quale si effettuano misurazioni sperimentali risulterà differente in dipendenza del tipo di descrizione che si vuole ottenere: se per esempio si vuole misurare la quantità F seguendo il moto di ogni singola foglia (o in maniera equivalente di ogni particella, per esempio inquinante, trasportata dal fluido in moto) si dovrà effettuare una misura su un sistema di riferimento Lagrangiano in moto, mentre se si vuole vedere cosa la variazione di F in un dato punto del campo si farà una misura Euleriana con una sonda posizionata in quel punto. La misura di tipo materiale sarà invece svolta in maniera simile a quella della meccanica del punto.

Come conseguenza di quanto detto, volendo determinare le variazioni della grandezza F nel tempo, dovremo calcolare

$$\frac{\partial F}{\partial t}(\underline{x}, t) \quad \text{nel caso Euleriano}$$

in quanto \underline{x} è fissato e F varierà anche nello spazio (per valutare questa variazione bisognerà considerare anche la sua derivata spaziale),

$$\frac{dF}{dt}(\underline{x}_0, t) \quad \text{nel caso materiale}$$

in quanto \underline{x}_0 è fissato e, muovendosi con la particella fluida, valutiamo anche le variazioni di F nello spazio e per questo usiamo la derivata totale

$$\frac{DF}{Dt}(\underline{x}_0, t) \quad \text{nel caso Lagrangiano}$$

come nel caso precedente ma con simbologia differente per rimarcare il fatto che è presente il solo trasporto del fluido e non il moto proprio.

Per poter scrivere delle equazioni del moto, è necessario esplicitare le variazioni di F sia rispetto al tempo che allo spazio. In particolare, si vogliono scrivere le equazioni in un punto (cioè in forma Euleriana) tenendo anche conto delle variazioni spaziali da punto a punto. In generale si potrà quindi scrivere

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i$$

dove le variazioni infinitesime ∂ e ∂x_i sono completamente indipendenti. In un fluido in moto però varrà la relazione

$$dx_i = u_i dt$$

dove u_i rappresenta la i -esima componente della velocità del fluido nella descrizione Lagrangiana o quella del punto materiale nella descrizione materiale. Sarà quindi possibile scrivere

$$\begin{aligned} \frac{DF}{Dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + u_i \frac{\partial F}{\partial x_i}, & \text{nella descrizione Lagrangiana} & \quad (37) \\ \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + u_i \frac{\partial F}{\partial x_i}, & \text{nella descrizione materiale} & \end{aligned}$$

e la prima viene anche detta derivata sostanziale per evidenziare il fatto che la derivata è fatta tenendo presente la velocità della particella fluida. Nelle espressioni precedenti viene esplicitato il legame tra la derivata Euleriana ($\partial F / \partial t$) e quella Lagrangiana (DF / Dt). Da un punto di vista vettoriale, utilizzando la definizione di operatore nabla e il prodotto vettoriale introdotti nel capitolo 1, si può scrivere

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + (\underline{\mathbf{u}} \cdot \nabla)F \quad (38)$$

Se la quantità F è a sua volta una quantità vettoriale (per esempio la velocità stessa, $\underline{\mathbf{u}}$)

$$\frac{D\underline{\mathbf{u}}}{Dt} = \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\underline{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\underline{\mathbf{u}} \quad (39)$$

o per componenti

$$\frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (40)$$

che rappresenta proprio l'accelerazione della particella fluida.

3.2 MOTO RELATIVO DI UNA PARTICELLA FLUIDA

Per la descrizione del comportamento cinematico nell'intorno di un punto consideriamo un volume infinitesimo, tale che la velocità al suo interno possa essere approssimata con uno sviluppo di Taylor al primo ordine. Scegliamo una terna di assi di riferimento che, ad un certo istante, ha origine nel baricentro della particella stessa (come raffigurato in figura 5).

Il baricentro G , durante l'intervallo di tempo Δt , si sposta nel punto G' con velocità $\underline{\mathbf{u}}_G$

$$\underline{\mathbf{GG'}} = \underline{\mathbf{u}}_G \Delta t$$

Un generico punto P della particella fluida, individuato dalla sua posizione $\underline{\mathbf{x}}$, si sposta nello stesso intervallo di tempo in P' con velocità $\underline{\mathbf{u}}$

$$\underline{\mathbf{PP'}} = \underline{\mathbf{u}} \Delta t$$

La velocità $\underline{\mathbf{u}}$, generalmente diversa da $\underline{\mathbf{u}}_G$, si ottiene come sviluppo in serie nell'intorno dell'origine (che coincide con il baricentro della particella), che per la componente u_i può essere scritto come

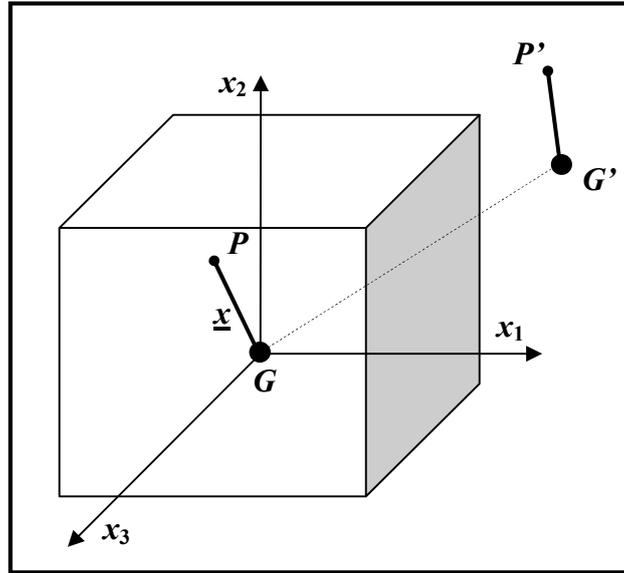


Figura 5. Volume elementare e moto relativo dei punti in un fluido.

$$u_i = u_{iG} + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_G x_j + o(x_j^2) + \dots$$

dove x_j sono le coordinate della distanza \underline{GP} . Tenendo conto dell'approssimazione al primo ordine, i termini di ordine superiore al primo vengono trascurati e pertanto lo spostamento di un generico punto in un fluido è descritto dal tensore del secondo ordine gradiente di velocità valutato nel baricentro (sarà in seguito omissa il pedice G), $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)_G$. Come ricordato nel capitolo 1, relazione (11), ogni tensore del secondo ordine può essere decomposto nella somma di due tensori, uno antisimmetrico (indicato con r_{ij} , detto tensore di rotazione) ed uno simmetrico (indicato con e_{ij} detto tensore velocità di deformazione)

$$r_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Di conseguenza, le componenti della velocità del generico punto di una particella saranno date da

$$u_i = u_{iG} + r_{ij} x_j + e_{ij} x_j \quad (41)$$

cioè il moto può essere considerato come la somma dei tre termini della (41) che corrispondono a:

una velocità di traslazione pari a quella del baricentro della particella;

una rotazione rigida descritta dalla parte antisimmetrica del tensore gradiente di velocità, r_{ij} ;

una velocità di deformazione descritta dalla parte simmetrica di tale tensore, e_{ij} .

I primi due termini si presentano anche nel moto di un solido non deformabile. Il significato del primo non richiede commenti, mentre quello del secondo e del terzo saranno discussi nel seguito.

Nel caso di un moto di rotazione rigida infinitesima attorno a G , sarà sempre possibile individuare, oltre al punto G , una retta passante per esso che mantiene fissi tutti i punti: l'asse di rotazione. Senza perdere di generalità, si può assumere l'asse x_2 come asse di rotazione con velocità angolare Ω , come indicato in figura 6. Indicata anche con d la distanza dall'asse di rotazione di un generico punto P inizialmente posto sull'asse x_3 , le relazioni che descrivono il suo moto, sono:

$$x_1 = d \sin(\Omega t) \quad x_2 = \text{cost} \quad x_3 = d \cos(\Omega t)$$

e quindi

$$u_1 = \Omega x_3 \quad u_2 = 0 \quad u_3 = -\Omega x_1$$

Di conseguenza, il tensore simmetrico e_{ij} ha tutte le componenti nulle, $\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) = 0$.

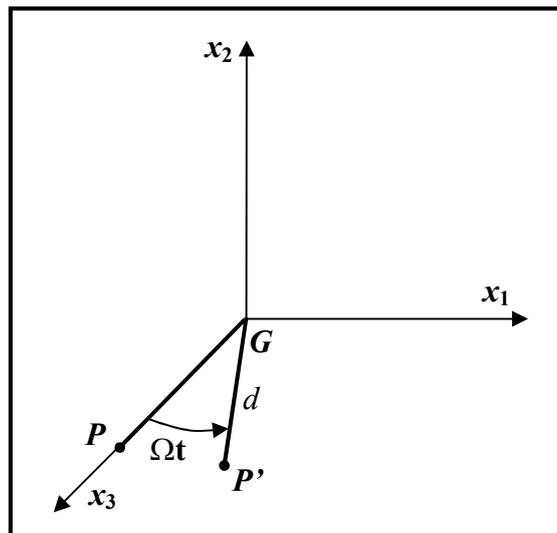


Figura 6. Rotazione elementare intorno all'asse verticale.

Invece, il tensore antisimmetrico, r_{ij} , risulta uguale a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (42)$$

Quindi, l'unico termine differente da zero, $u_i = r_{ij}x_j$, rappresenta proprio una rotazione rigida. D'altra parte, come visto nella sezione 1.5, un qualsiasi tensore antisimmetrico conserva tale proprietà nel cambiamento di sistema di riferimento e può essere ricondotto nella forma precedentemente riportata, quindi il risultato ottenuto resta sempre valido.

Le proprietà di rotazione locale di un fluido sono descritte spesso attraverso la vorticità del campo (indicata con ω), che è già stata introdotta nel paragrafo 1.6 (relazione 16) con il termine di rotore della velocità. Vi è una stretta relazione di questa con il tensore r_{ij} ,

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) \right] = \varepsilon_{ijk} (e_{kj} + r_{kj})$$

ma il primo termine è uguale a zero perché sulla diagonale $\varepsilon_{ijk} \equiv 0$ e fuori i termini si elidono due a due (poiché cambia il segno di ε_{ijk} , ma non di e_{kj}), mentre il secondo termine fornisce

$$\omega_i = \varepsilon_{ijk} r_{kj} = -\varepsilon_{ijk} r_{jk}$$

Nell'esempio fatto in precedenza, rotazione rigida intorno all'asse x_2 , solo la componente ω_2 risulta diversa da zero e usando la (42)

$$\omega_i = \begin{pmatrix} -2r_{23} \\ -2r_{31} \\ -2r_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\Omega \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè l'unica componente di vorticità differente da zero risulta pari a 2 volte la velocità di rotazione angolare costante.

Nel caso in cui il moto sia descritto dal solo tensore simmetrico, e_{ij} con $r_{ij} \equiv 0$ (il moto risulterà quindi irrotazionale per quanto appena detto), si avrà

$$\begin{aligned} u_1 &= e_{11}x_1 + e_{12}x_2 + e_{13}x_3 \\ u_2 &= e_{21}x_1 + e_{22}x_2 + e_{23}x_3 \\ u_3 &= e_{31}x_1 + e_{32}x_2 + e_{33}x_3 \end{aligned} \quad (43)$$

Come in precedenza, senza perdere di generalità, facendo riferimento alla figura 7, consideriamo un moto piano e scegliamo questo piano come (x_1, x_2) . Lavorando su un elemento infinitesimo, supponiamo inoltre che tutti i termini del tensore delle velocità di deformazione siano costanti ($e_{ij} = \text{cost.}$). In altre parole questo significa che la velocità sia una funzione lineare delle coordinate ($\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) = \text{cost.}$). Considerando allora il punto **A** dell'asse x_1 (caratterizzato da avere coordinata $x_2=0$) e il suo spostamento nel punto **A'**, utilizzando le (43) sul piano si potrà scrivere

$$\begin{aligned} (u_1)_A &= e_{11}(x_1)_A & (\Delta x_1)_A &= e_{11}(x_1)_A \Delta t \\ (u_2)_A &= e_{21}(x_1)_A & (\Delta x_2)_A &= e_{21}(x_1)_A \Delta t \end{aligned}$$

e similmente per **B** su x_2 che si sposterà in **B'**

$$\begin{aligned} (u_1)_B &= e_{12}(x_2)_B & (\Delta x_1)_B &= e_{12}(x_2)_B \Delta t \\ (u_2)_B &= e_{22}(x_2)_B & (\Delta x_2)_B &= e_{22}(x_2)_B \Delta t \end{aligned}$$

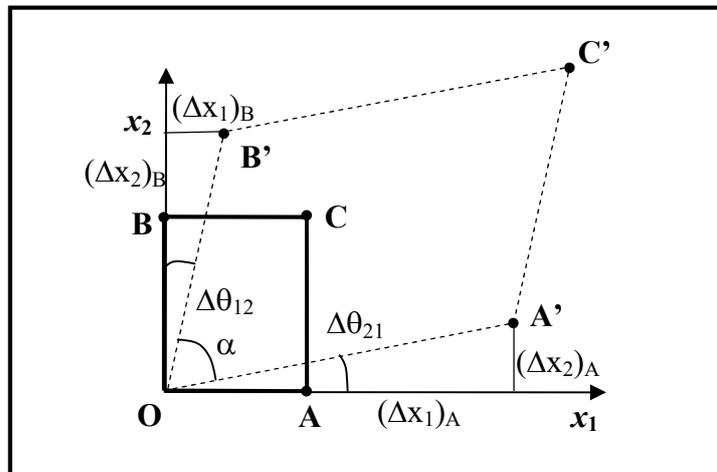


Figura 7. Deformazione elementare sul piano.

Quindi sarà possibile scrivere per gli elementi sulla diagonale del tensore di velocità di deformazione

$$e_{11} = \left(\frac{\Delta x_1}{x_1} \right)_A \frac{1}{\Delta t} \quad e_{22} = \left(\frac{\Delta x_2}{x_2} \right)_B \frac{1}{\Delta t} \quad (44)$$

che quindi risultano essere le velocità di allungamento relativo lungo gli assi coordinati (quanto si allunga un segmento orientato come l'asse nella stessa direzione). Se consideriamo i punti A e B su un piano ortogonale all'asse coordinato (per esempio x_1), tutti i punti con la stessa coordinata x_1 si sposteranno alla stessa velocità ed il piano si sposterà parallelamente a se stesso. A seconda del segno di e_{ii} avremo quindi una dilatazione o una compressione.

Per i termini che non si trovano sulla diagonale principale si ha:

$$e_{21} = \left(\frac{\Delta x_2}{x_1} \right)_A \frac{1}{\Delta t} = \frac{tg \Delta \theta_{21}}{\Delta t} \cong \frac{\Delta \theta_{21}}{\Delta t} \quad e_{12} = \left(\frac{\Delta x_1}{x_2} \right)_B \frac{1}{\Delta t} = \frac{tg \Delta \theta_{12}}{\Delta t} \cong \frac{\Delta \theta_{12}}{\Delta t}$$

avendo confuso la tangente con l'angolo cosa lecita per intervalli di tempo infinitesimi. L'angolo tra **OA** e **OB**, che all'istante iniziale è retto, dopo un tempo Δt diventerà pari a $\alpha' = \pi/2 - \Delta \theta_{12} - \Delta \theta_{21} = \pi/2 - 2 e_{12} \Delta t$, poiché $e_{21} = e_{12}$ e quindi $\Delta \theta_{21} = \Delta \theta_{12}$. La velocità di variazione dell'angolo tra i due segmenti è dunque:

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{(\alpha' - \pi/2)}{\Delta t} = -2e_{12}.$$

Più in generale si può concludere che le componenti del tensore e_{ij} , con $i \neq j$, rappresentano $1/2$ della variazione nell'unità di tempo dell'angolo, inizialmente retto, formato dai punti che si trovano lungo gli assi coordinati. In altre parole rappresenta la rotazione relativa tra i due piani o la velocità di scorrimento di un piano rispetto all'altro.

Se ora ci mettiamo nel sistema di riferimento principale per il tensore e_{ij} (questo è sempre possibile per un tensore simmetrico come visto nel paragrafo 1.5), avremo i soli termini diagonali differenti da zero e con questi è possibile costruire la somma (cioè la traccia di e_{ij})

$$\sum_i e_{ii} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{u}}$$

che rappresenta la divergenza della velocità. Questa quantità rappresenta anche la variazione relativa di volume del fluido nell'unità di tempo

$$e_{ii} = \frac{1}{V} \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

Infatti il volume del fluido può essere scritto come

$$V = x_1 x_2 x_3$$

mentre la variazione sarà data al primo ordine da

$$V' = (x_1 + \Delta x_1)(x_2 + \Delta x_2)(x_3 + \Delta x_3)$$

Scrivendo tutti gli incrementi $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$ secondo la (44), si può calcolare la differenza di volume come

$$\Delta V = V' - V = x_1 x_2 e_{33} x_3 \Delta t + x_1 x_3 e_{22} x_2 \Delta t + x_2 x_3 e_{11} x_1 \Delta t$$

avendo trascurato termini di ordine Δt^2 e superiori. Si può quindi scrivere

$$\frac{\Delta V}{V} = (e_{11} + e_{22} + e_{33}) \Delta t \quad (45)$$

che rappresenta proprio quanto scritto in precedenza. Essendo la quantità trovata uno scalare, il risultato è indipendente dal sistema di riferimento (ovviamente il discorso è valido per infinitesimi del primo ordine).

Possiamo quindi concludere il capitolo sulla cinematica di una particella fluida enunciando nuovamente quanto affermato nella (41) e cioè il teorema di Helmholtz (Hermann von Helmholtz, 1821-1894): un elemento fluido si deforma attraverso una traslazione (lungo tre direzioni), una rotazione (attorno a tre assi) e una deformazione. Quest'ultima a sua volta si compone di una dilatazione o compressione (lungo i tre assi coordinati) e da uno scorrimento (lungo i tre piani coordinati).

Capitolo 4

EQUAZIONI DELLA FLUIDODINAMICA

4.1 I PRINCIPI DELLA FLUIDODINAMICA

La fluidodinamica è basata su due classi di ipotesi fondamentali dalle quali si parte per ottenere un sistema di equazioni differenziali in cui vi siano tante equazioni quante incognite: i principi di conservazione e bilancio, che caratterizzano la dinamica dei fluidi, e le equazioni costitutive e di stato, che stabiliscono delle relazioni specifiche per ciascun fluido.

I principi sui quali si basa la dinamica dei fluidi sono:

1. Principio di conservazione della massa. La massa di una qualsiasi porzione di fluido è costante. Sia V_m un volume costituito sempre dalla stessa porzione di materia, ovvero un *volume materiale*, la sua massa è data da

$$m = \int_{V_m} \rho dV; \quad (46)$$

quindi, questo principio può essere espresso come

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho dV = 0. \quad (47)$$

1b. Principio di bilancio della massa di uno scalare. La variazione di massa di un qualsiasi scalare presente in uno stesso volume materiale fluido è bilanciata dal flusso, Φ , di questo scalare attraverso la superficie, S , che delimita il volume stesso a causa della diffusione molecolare. Se la massa dello scalare è data da

$$m_s = \int_{V_m} \rho_s dV \quad (48)$$

essendo $\rho_s \equiv c$ la concentrazione dello scalare, il principio può essere espresso come:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} c dV = - \int_S \underline{\Phi} \cdot \underline{n} dS. \quad (49)$$

La relazione precedente risulta valida quando la concentrazione dello scalare sia sufficientemente bassa da non modificare le altre equazioni della fluidodinamica, cioè quando sia possibile trascurare l'interazione particella fluida-scalare e le eventuali reazioni chimiche collegate. Si dice che l'equazione è disaccoppiata dal resto del sistema (si risolvono cioè prima le altre equazioni della fluidodinamica e poi questa).

2. Principio di bilancio della quantità di moto. La variazione della quantità di moto, nell'unità di tempo, di una qualsiasi porzione di fluido è pari alla risultante delle forze esterne (di volume e superficie) che agiscono sulla porzione di fluido stessa, come derivato dalla seconda legge di Newton $\underline{F} = m\underline{a}$. Facendo ancora riferimento ad un volume materiale, V_m , la sua quantità di moto, \underline{q} , è data da

$$\underline{q} = \int_{V_m} \rho \underline{u} dV \quad (50)$$

e, indicando con \underline{R} la risultante delle forze esterne (di volume quali forze di gravità e centrifuga e di superficie quali forze di tipo viscoso cioè di attrito) che agiscono su V_m , il principio può essere espresso come

$$\frac{D\underline{q}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho \underline{u} dV = \underline{R}; \quad (51)$$

3. Principio di bilancio del momento della quantità di moto. La variazione del momento della quantità di moto, nell'unità di tempo, di una qualsiasi porzione di fluido è pari al momento risultante delle forze esterne che agiscono sulla porzione di fluido stessa.

4. Principio di conservazione dell'energia. La variazione di energia contenuta in una porzione di fluido in un volume materiale è pari al lavoro delle forze esterne (di volume e superficie) nell'unità di tempo meno la quantità di calore che fluisce verso l'esterno nell'unità di tempo (1° principio della termodinamica). Definendo l'energia totale come somma di energia interna e cinetica $E' = U + u^2/2$

$$E = \int_{V_m} \rho E' dV \quad (52)$$

si può scrivere tale principio come (il segno ‘ indica nell’unità di tempo)

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho E' dV = L' + Q' ; \quad (53)$$

Il principio di conservazione della massa, affermando che la stessa porzione di fluido ha sempre la stessa massa, stabilisce che essa è una proprietà intrinseca della materia intesa come mezzo continuo. Il secondo principio, quello di bilancio della quantità di moto, stabilisce invece, come vedremo più avanti, a quali accelerazioni è soggetto un fluido sul quale agisce un determinato sistema di forze. Il principio di bilancio del momento della quantità di moto permette di stabilire alcune importanti caratteristiche di simmetria dello stato tensionale di un fluido e il principio di conservazione dell’energia permette di ottenere un’equazione addizionale nei casi in cui risultino importanti le variazioni di energia interna (di solito collegate alla temperatura del fluido).

4.2 IL TEOREMA DI REYNOLDS

Quanto esposto costituisce una formulazione lagrangiana dei principi, infatti le equazioni sopra scritte fanno riferimento non a luoghi definiti dello spazio ma a porzioni di materia identificate con volumi materiali. Per passare ad una descrizione euleriana, riferita a un punto fisso nello spazio come nel paragrafo 3.1, abbiamo bisogno di trovare un’espressione euleriana per la derivata materiale di un integrale su di un volume V_m che dipende dal tempo; questa ci è data dal teorema del trasporto o di Reynolds (Osborne Reynolds, 1842-1912) che consiste nell’applicazione della relazione (37) al caso in cui il volume materiale sia esso stesso variabile nel tempo.

Con riferimento alla figura 8, la derivata sostanziale dell’integrale di una grandezza $A=A(x,y,z,t)$ in un volume materiale $V_m(t)$, racchiuso dalla superficie S_m , al primo ordine è data da:

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} \int_{V_m} A dV &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_m(t')} A(t') dV - \int_{V_m(t)} A(t) dV}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_m(t)} A(t') dV + \int_{\Delta V} A(t') dV - \int_{V_m(t)} A(t) dV}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{V_m(t)} \frac{[A(t') - A(t)]}{\Delta t} dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \frac{A(t') dV}{\Delta t}
\end{aligned} \tag{54}$$

(Δt viene portato all'interno dell'integrale essendo costante cioè $V_m(t)$ non tende a zero per Δt che tende a zero), essendo $t' = t + \Delta t$ e $\Delta V = V_m(t') - V_m(t)$. Il primo termine dell'ultimo membro rappresenta il limite per Δt che tende a zero del rapporto incrementale della grandezza A rispetto alla variabile t , eseguita su di un volume fisso, $V_c = V_m(t)$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{V_m(t)} \frac{[A(t') - A(t)]}{\Delta t} dV = \int_{V_c} \frac{\partial A}{\partial t} dV$$

V_c è un volume, detto *di controllo*, che non dipende dal tempo e che gode della proprietà di coincidere con V_m all'istante t . Per ciò che riguarda il secondo termine, dalla figura 8 si deduce che

$$(\Delta V_m) = \Delta h dS = \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \Delta t dS \tag{55}$$

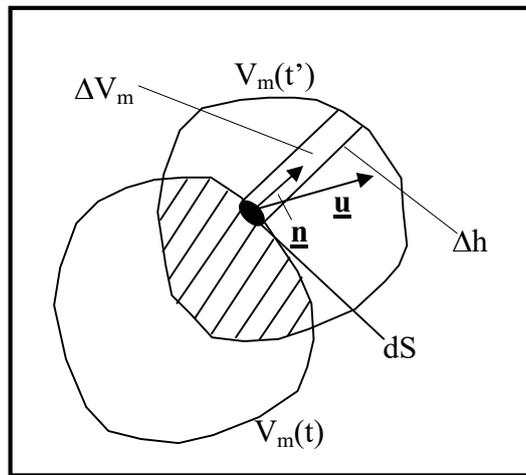


Figura 8. Variazione del volume di controllo nel tempo.

e quindi

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Delta V_m} \frac{A(t')}{\Delta t} dV = \int_S A(t) \underline{u} \bullet \underline{n} dS . \quad (56)$$

Inoltre, essendo

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} A(t') = A(t) \quad (57)$$

e $S_m(t) = S_c$, la superficie del volume di controllo, si ha:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} A dV = \int_{V_c} \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_{S_c} A \underline{u} \bullet \underline{n} dS . \quad (58)$$

si può quindi ottenere

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \int_{V_m} A dV}_I = \underbrace{\int_{V_c} \frac{\partial A}{\partial t} dV}_{II} + \underbrace{\int_{S_c} A \underline{u} \bullet \underline{n} dS}_{III} \quad (59)$$

che è una prima formulazione del teorema di Reynolds, la quale può essere così letta: la variazione della quantità A , integrata su di un volume materiale (termine I), è data dalla somma della variazione di A all'interno del volume di controllo (termine II) e del flusso di A attraverso la superficie S_c (termine III). Nel caso in cui A ed \underline{u} siano funzioni continue, applicando il teorema della divergenza (23) all'ultimo termine si ricava

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} A dV = \int_{V_c} \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \underline{\nabla} \bullet (A \underline{u}) \right] dV \quad (60)$$

che costituisce la cosiddetta forma conservativa del teorema (compare il segno di derivata davanti a qualsiasi simbolo e la relazione deriva direttamente da un volume fisso nello spazio e nel tempo), oppure svolgendo la derivata del prodotto, la cosiddetta forma non conservativa

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} A dV = \int_{V_c} \left[\frac{\partial A}{\partial t} + u_i \frac{\partial A}{\partial x_i} + A \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] dV = \int_{V_c} \left(\frac{DA}{Dt} + A \underline{\nabla} \bullet \underline{u} \right) dV \quad (61)$$

Tramite le forme (58) e (60) è possibile scrivere esplicitamente i principi di bilancio e conservazione elencati nel paragrafo precedente. In entrambe il primo termine esprime la variazione puramente temporale della grandezza, mentre il secondo termine rappresenta il trasporto della grandezza dovuto al campo di velocità $\underline{\mathbf{u}}$.

4.3 EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA

Applichiamo le forme (60) e (61) alla relazione (47), che esprime la conservazione della massa di fluido contenuto in uno stesso volume fluido in moto, per ottenere la forma integrale conservativa

$$\int_{V_m} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{\mathbf{u}}) \right] dV = 0. \quad (62)$$

e la forma integrale non conservativa

$$\int_{V_m} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{u}} \right] dV = 0. \quad (63)$$

Affinché la relazione precedente sia verificata per qualsiasi volume fluido (che in effetti è stato scelto in forma generica), ipotizzando che le funzioni integrande (ρ e $\underline{\mathbf{u}}$) siano continue ed a derivata continua, possiamo scrivere l'equazione come valida anche in forma differenziale (a meno quindi che non siano presenti discontinuità nel campo), ottenendo la cosiddetta equazione di continuità sia in forma conservativa che non conservativa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{\mathbf{u}}) = 0. \quad (64)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{u}} = 0 \quad (65)$$

Lo stesso risultato si può ottenere considerando dal punto di vista euleriano, il flusso entrante ed uscente attraverso la superficie che delimita un parallelepipedo infinitesimo fisso. Nelle relazioni precedenti vengono infatti bilanciate la variazione di densità del fluido (sia nel tempo che dovute al trasporto da parte del fluido in moto) con la variazione di volume (cioè il termine contenente la divergenza della velocità come indicato nella (45)) e se diminuisce l'una deve aumentare l'altro e viceversa.

Nel caso particolare di moto stazionario, $\partial/\partial t=0$, l'equazione (64) si riduce a

$$\underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{\mathbf{u}}) = \mathbf{0}. \quad (66)$$

Nel caso in cui il fluido sia incomprimibile (o incompressibile), allora $D\rho/Dt=0$ e le relazioni precedenti si riducono a

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (67)$$

e il campo risulta quindi solenoidale. Le equazioni (64)-(67) sono equazioni alle derivate parziali non lineari (a causa del termine di trasporto), tranne la (67) che è lineare, del primo ordine.

Esaminiamo un po' più in dettaglio il significato di fluido incomprimibile. In prima approssimazione questo accade quando la densità risulta costante, però in maniera più precisa questa situazione si presenta quando la densità di un elemento fluido non è funzione delle variazioni di pressione, $\partial\rho/\partial p=0$, (e la velocità del suono è quindi pari a infinito dalla (30)) e quindi quando le variazioni di pressione sono piccole rispetto alla pressione assoluta (termodinamica). In queste condizioni gli effetti di comprimibilità possono essere trascurati e si può dire che $\rho=\rho(p)=const$ e quindi per una particella fluida $D\rho/Dt=0$ durante il moto, da cui deriva la (67). Da tutto ciò sembra più corretto affermare di avere a che fare con un flusso (legato allo stato di moto) piuttosto che un fluido incompressibile.

4.4 EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA MASSA DI UNO SCALARE

Applichiamo le forme (60) e (61) alla relazione (49), che esprime il bilancio della massa di scalare contenuto in un volume fluido in moto, per ottenere la forma integrale conservativa

$$\int_{V_m} \left[\frac{Dc}{Dt} + c(\underline{\nabla} \bullet \underline{\mathbf{u}}) \right] dV = - \int_S \underline{\Phi} \bullet \underline{\mathbf{n}} dS. \quad (68)$$

In questa equazione il flusso dello scalare, così come accadrà per le altre equazioni, rappresenta un'ulteriore quantità incognita. Per risolvere l'equazione sarà quindi necessario esprimere questa incognita in funzione delle altre variabili attraverso un'ulteriore relazione detta relazione costitutiva. In particolare, senza entrare troppo nel dettaglio, come verrà invece fatto per la relazione costitutiva del tensore degli sforzi, è logico pensare che il flusso sia proporzionale al gradiente di concentrazione (in altre parole dove la concentrazione risulta costante non ci sarà diffusione o flusso dello scalare e viceversa questa sarà massima dove ci sono le variazioni più pronunciate di concentrazione) secondo la legge di Fick (Adolf Eugen Fick, 1829-1901),

$$\underline{\Phi} = -\underline{\mathbf{D}} \bullet \underline{\nabla}c \quad (69)$$

dove il segno meno tiene conto del fatto che se la concentrazione diminuisce ($\underline{\nabla}c < 0$) allora il flusso risulta positivo e dove il fattore di proporzionalità $\underline{\mathbf{D}}$ può dipendere dalla direzione di applicazione e dalla superficie di riferimento ed è perciò un tensore. $\underline{\mathbf{D}} = \underline{\mathbf{D}}(x_1, x_2, x_3, t)$ rappresenta il tensore di diffusività molecolare in generale dipendente dal punto considerato e dal tempo. Se il fluido è isotropo allora il tensore $\underline{\mathbf{D}}$ risulta essere una quantità scalare (che può comunque dipendere dalle coordinate spaziali attraverso la temperatura), $D_{ij} = D \delta_{ij}$, detto coefficiente di diffusività molecolare e la (69) diventa

$$\underline{\Phi} = -D\underline{\nabla}c \quad (70)$$

Tramite questa relazione costitutiva, la (68) diventa, applicando il teorema della divergenza (23)

$$\int_{V_m} \left[\frac{Dc}{Dt} + c(\underline{\nabla} \bullet \underline{\mathbf{u}}) \right] dV = \int_S D\underline{\nabla}c \bullet \underline{\mathbf{n}} dS = \int_{V_m} \underline{\nabla} \bullet (D\underline{\nabla}c) dV \quad (71)$$

che rappresenta la forma integrale non conservativa dell'equazione di bilancio della massa di scalare (la forma conservativa si ottiene esplicitando la derivata sostanziale a primo membro). Essendo il volume arbitrario, sotto le condizioni di continuità già introdotte in precedenza, si può scrivere in termini differenziali equazioni simili a quelle di conservazione della massa di fluido con in più il termine diffusivo a secondo membro

$$\frac{Dc}{Dt} + c(\underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{u}}) = \underline{\nabla} \cdot (D\underline{\nabla}c) \quad (72)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (c\underline{\mathbf{u}}) = \underline{\nabla} \cdot (D\underline{\nabla}c) \quad (73)$$

Se il fluido è incomprimibile (relazione (67)), l'equazione (72) diventa

$$\frac{Dc}{Dt} = \underline{\nabla} \cdot (D\underline{\nabla}c) \quad (74)$$

mentre se siamo in condizioni stazionarie si ottiene dalla (73)

$$\underline{\nabla} \cdot (c\underline{\mathbf{u}}) = \underline{\nabla} \cdot (D\underline{\nabla}c) \quad (75)$$

Se il coefficiente D è costante nello spazio (cioè il campo ha solo piccole variazioni di temperatura), allora può essere portato fuori dal segno di derivata.

Le equazioni (72)-(75) sono equazioni alle derivate parziali non lineari (a causa del termine di trasporto), tranne la (75) che è lineare, del secondo ordine (a causa del termine diffusivo a secondo membro). In generale, in queste equazioni, viene espresso il bilancio tra la variazione temporale della concentrazione di scalare, il termine di trasporto da parte del campo di moto, il termine dovuto alla comprimibilità del fluido e la diffusione molecolare dello scalare nel fluido

Prima di passare all'equazione di bilancio della quantità di moto, è utile capire in quale modo si può riconoscere se un termine nelle equazioni risulti di puro trasporto (passa da una zona all'altra del campo ma non ne esce) oppure di diffusione o dissipazione (fuoriesce dal campo magari in altra forma, p.e. calore). Per fare questo basta applicare il teorema della divergenza all'intero volume considerato (con la frontiera del campo costituita da superfici solide o altro) e vedere cosa succede al flusso verso l'esterno. Per esempio per il termine identificato come trasporto

$$\int_{V_T} \underline{\nabla} \cdot (c\underline{\mathbf{u}}) dV = \int_{S_T} c\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{n}} dS \quad (76)$$

il secondo integrale applicato alla superficie totale impermeabile (per esempio in un canale) porta ad avere sempre $\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{n}} \equiv 0$ (per l'impermeabilità) e quindi ad identificare il termine sotto integrale a primo membro come termine di trasporto in quanto globalmente ha integrale volumetrico pari a zero. Invece, per il termine identificato come diffusivo, vale

$$\int_{V_T} \underline{\nabla} \cdot (D\underline{\nabla}c) dV = \int_{S_T} D\underline{\nabla}c \cdot \underline{\mathbf{n}} dS \quad (77)$$

che sarà uguale o differente da zero se il gradiente di concentrazione attraverso la superficie esterna $\partial c/\partial n$ è pari o differente da zero (per esempio se lo scalare è la temperatura allora ci sarà un flusso di temperatura verso l'esterno).

4.5 EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA QUANTITA' DI MOTO

Applicando il teorema del trasporto di Reynolds, nella formulazione (61) avendo assunto $A=\rho\underline{\mathbf{u}}$, all'equazione (51)

$$\int_{V_m} \left[\frac{D(\rho\underline{\mathbf{u}})}{Dt} + \rho\underline{\mathbf{u}}(\underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{u}}) \right] dV = \underline{\mathbf{R}} \quad (78)$$

Ricordiamo però che, a differenza delle equazioni precedenti, questa è un'equazione per una quantità vettoriale, la velocità del fluido, ed è quindi composta da tre equazioni scalari. Per questo motivo scriviamo l'equazione precedente in termini di componenti scalari individuate dall'indice i

$$\int_{V_m} \left[\frac{D(\rho u_i)}{Dt} + \rho u_i \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \right] dV = R_i. \quad (79)$$

Scomponiamo ora la risultante delle forze esterne su una particella fluida, $\underline{\mathbf{R}}$, in una parte dovuta alle forze proporzionali alla massa (volume) ed in una dovuta alle forze applicate alla superficie. Per queste ultime, se consideriamo un generico elemento della superficie, ΔS , con normale $\underline{\mathbf{n}}$ (esterna), sottoposto ad una forza di superficie $\Delta \underline{\mathbf{F}}_s$, in congruenza con l'ipotesi del continuo esisterà e sarà funzione continua il limite

$$\underline{\mathbf{t}}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{\mathbf{F}}_s}{\Delta S}$$

che chiameremo sforzo relativo alla normale $\underline{\mathbf{n}}$. Con riferimento alla figura 9, $\underline{\mathbf{t}}_n$ rappresenta la forza, per unità di superficie, esercitate attraverso la faccia positiva sul fluido a contatto con la faccia negativa.

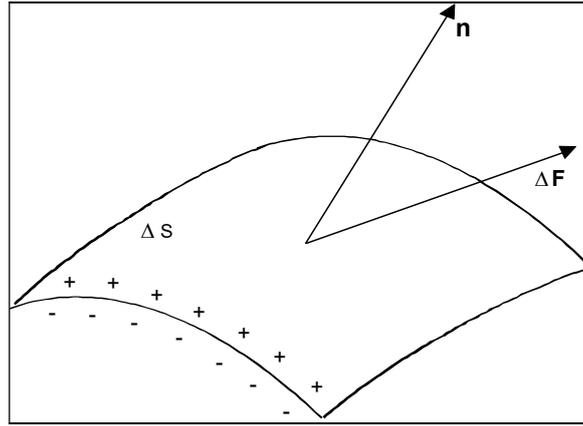


Figura 9. Significato dello sforzo agente su una superficie.

Analogamente, per le forze di massa, esisterà e sarà funzione continua il limite

$$\underline{\mathbf{f}} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \underline{\mathbf{F}}_v}{\Delta m}$$

dove $\Delta \underline{\mathbf{F}}_v$ sono le forze che agiscono su di un elementino di volume ΔV e $\Delta m = \rho \Delta V$ è la sua massa.

Con queste posizioni il bilancio della quantità di moto diventa

$$\int_{V_m} \left[\frac{D(\rho \underline{\mathbf{u}})}{Dt} + \rho \underline{\mathbf{u}} (\underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{u}}) \right] dV = \int_{V_m} \rho \underline{\mathbf{f}} dV + \int_S \underline{\mathbf{t}}_n dS \quad (80)$$

Effettuando la derivata sostanziale del prodotto di cui a sinistra dell'equazione si ottiene

$$\int_{V_m} \left[\frac{D(\rho \underline{\mathbf{u}})}{Dt} + \rho \underline{\mathbf{u}} (\underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{u}}) \right] dV = \int_{V_m} \left[\rho \frac{D\underline{\mathbf{u}}}{Dt} + \underline{\mathbf{u}} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{u}} \right) \right] dV = \int_{V_m} \rho \frac{D\underline{\mathbf{u}}}{Dt} dV,$$

essendo nullo, per la conservazione della massa (65), il termine tra parentesi tonde nel penultimo membro. Inserendo questa decomposizione nella relazione (80) si ottiene

$$\int_{V_m} \rho \frac{D\underline{\mathbf{u}}}{Dt} dV = \int_{V_m} \rho \underline{\mathbf{f}} dV + \int_S \underline{\mathbf{t}}_n dS \quad (81)$$

che costituisce una forma integrale dell'equazione di bilancio della massa (ma c'è ancora un integrale di superficie a secondo membro).

Per poter scrivere un'equazione in forma differenziale, come fatto per le equazioni precedenti nei paragrafi 4.3 e 4.4, è necessario trasformare l'integrale di superficie a secondo membro in un integrale di volume. Si deve quindi cercare un modo alternativo di descrivere lo stato di tensione sulla superficie del volume di controllo.

Si consideri il tetraedro limitato dalle superfici di area S_i che giacciono sui piani coordinati e dalla superficie di area S_n , che giace sul piano individuato dalla normale \underline{n} (detto tetraedro di Cauchy, Augustin-Louis Cauchy, 1789-1857) riportato in figura 10. Sia inoltre h la distanza tra la superficie S_n e l'origine. Le normali alla superficie sono assunte positive quando sono uscenti dal volume considerato, pertanto le normali positive relative alle facce che giacciono sui piani coordinati sono opposte ai versori \underline{c}_i che individuano gli assi stessi. Facciamo ora tendere la dimensione caratteristica del tetraedro $h \rightarrow 0$ e valutiamo l'ordine di grandezza dei singoli termini dell'equazione (81): i 2 integrali di volume sono proporzionali al volume V del tetraedro, e di conseguenza ad h^3 , mentre l'integrale di superficie è proporzionale all'area della superficie del tetraedro e quindi ad h^2 . Al limite per h che tende a zero i due integrali di volume saranno allora trascurabili rispetto quello di superficie, e, affinché l'equazione sia valida, dovrà quindi essere soddisfatto il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{S_c} \underline{t}_n dS = 0,$$

che, per il tetraedro di Cauchy di figura 10, afferma che la somma delle forze di superficie agenti su ciascuna faccia deve annullarsi.

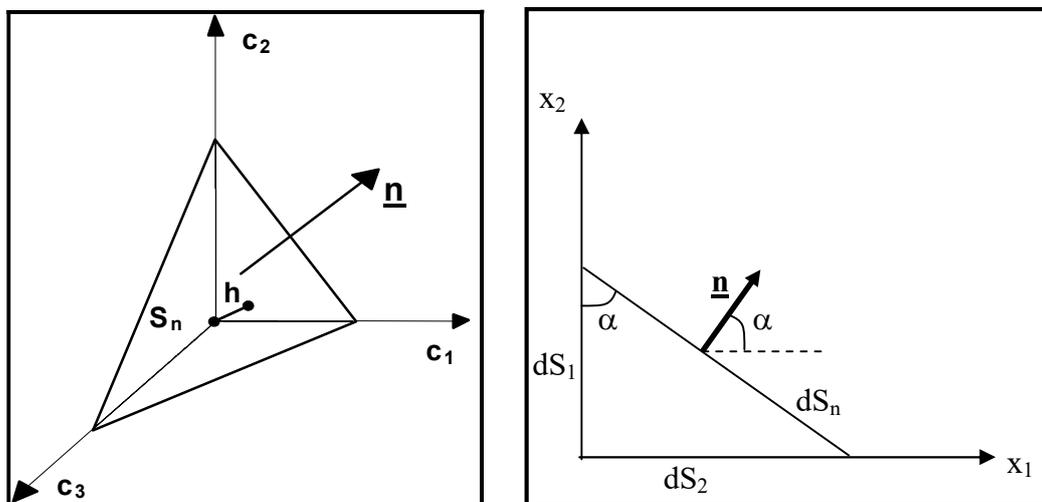


Figura 10. Tetraedro di Cauchy e proiezione sul piano (1,2).

Lo sforzo relativo alla generica superficie S_i , con normale \underline{c}_i , sarà indicato con $\underline{\tau}_i$, e la sua j -esima componente con τ_{ij} (come già introdotto nel capitolo 1). Le componenti scalari di questa forza (tre sforzi vettoriali uno per ciascuna superficie) possono essere ordinate secondo gli elementi di una matrice

$$\begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix}.$$

In modo analogo indicheremo con $\underline{\tau}_n$ lo sforzo sulla quarta faccia, che ha per normale \underline{n} . Le $\underline{\tau}_i$ sono relative alle normali \underline{c}_i , interne al tetraedro, e rappresentano le forze che il tetraedro esercita sul resto del fluido. Esse sono quindi uguali ed opposte alle sollecitazioni esterne che subisce il tetraedro. Affinché si annullino tutte le forze superficiali dovrà essere

$$\underline{\tau}_n dS_n - \underline{\tau}_1 dS_1 - \underline{\tau}_2 dS_2 - \underline{\tau}_3 dS_3 = \underline{\tau}_n dS_n - \underline{\tau}_i dS_i = 0$$

e dividendo per S_n

$$\underline{\tau}_n = \frac{dS_i}{dS_n} \underline{\tau}_i = \cos \alpha_{ni} \underline{\tau}_i = n_i \underline{\tau}_i \quad \square$$

dove, con riferimento alla figura 10 a destra, α_{ni} è l'angolo formato tra la normale \underline{n} e il versore \underline{c}_i , ed il suo coseno è pari alla i -esima componente di \underline{n} ($n \cos \alpha_{ni} = n_i$, $dS_i = dS_n \cos \alpha_{ni} = dS_n n_i$). L'espressione precedente indica che la tensione su una generica superficie è determinata dalla somma di quelle relative agli assi coordinati. Utilizzando le componenti scalari la j -esima componente dello sforzo sulla superficie S_n , τ_j , si potrà scrivere come

$$\tau_j = \tau_{ij} n_i$$

La matrice τ_{ij} rappresenta le componenti di un tensore, perché moltiplicata secondo le regole matriciali per le componenti di un vettore (n_i) fornisce sempre le componenti di un vettore. Indicheremo questo tensore con $\underline{\tau}$ e lo chiameremo tensore degli sforzi. Attraverso di esso possiamo esprimere lo sforzo, \underline{t}_n , relativo ad un elemento di superficie con una generica normale \underline{n} come

$$\underline{t}_n = \underline{\tau} \cdot \underline{n} \quad (82)$$

Questa relazione, che è di tipo tensoriale e quindi invariante per cambiamenti di sistema di riferimento, stabilisce l'esistenza del tensore degli sforzi e rappresenta il teorema fondamentale di Cauchy.

Verifichiamo che questo tensore degli sforzi è un tensore simmetrico. In effetti questa verifica deriva dall'applicazione dell'equazione di conservazione del momento della quantità di moto (principio 3 nel paragrafo 4.1) che in questo modo diventa un'equazione dipendente e non più indipendente dalle altre (tranne che nei cosiddetti flussi polari, cioè quelli nei quali le forze agenti formano dei poli di masse concentrate come nel caso di campi elettrici in fluidi polarizzati). Dimostriamo la relazione di simmetria sul piano (1,2), $\tau_{12}=\tau_{21}$, essendo poi possibile ripeterla per gli altri piani, e consideriamo l'equilibrio dei momenti delle forze agenti sul parallelepipedo Δx_1 , Δx_2 per Δx_1 e Δx_2 che tendono a zero (si consideri la figura 11). Al momento delle forze rispetto al centro contribuiscono solo i termini τ_{ij} con $i \neq j$ e quindi

$$\tau'_{12} \frac{\Delta x_1}{2} \Delta x_2 \Delta x_3 - \tau'_{21} \frac{\Delta x_2}{2} \Delta x_1 \Delta x_3 - \tau''_{12} \left(-\frac{\Delta x_1}{2} \right) \Delta x_2 \Delta x_3 + \tau''_{21} \left(-\frac{\Delta x_2}{2} \right) \Delta x_1 \Delta x_3 = I_3 \dot{\Omega}_3$$

dove I_3 rappresenta il momento di inerzia rispetto all'asse x_3 e $\dot{\Omega}_3 \equiv d\Omega_3/dt$ rappresenta l'accelerazione angolare sul piano considerato. Essendo

$$I_3 = \Delta MR^2 = \Delta M \left(\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}{12} \right) = \rho \Delta V \left(\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}{12} \right) = \rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \left(\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}{12} \right)$$

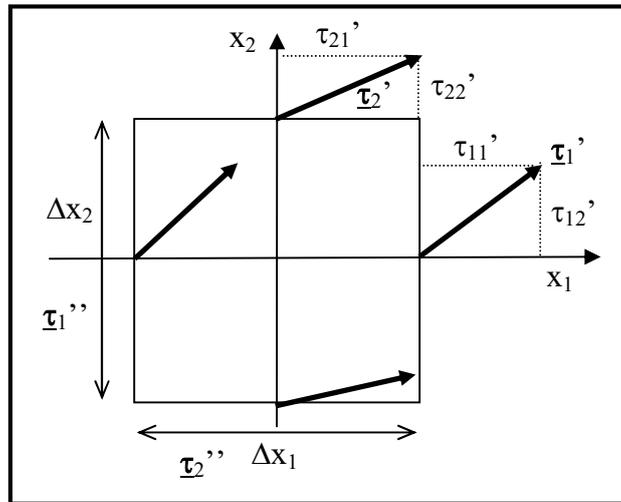


Figura 11. Forze superficiali agenti sul piano (1,2).

è possibile scrivere

$$\frac{\tau'_{12}}{2} - \frac{\tau'_{21}}{2} + \frac{\tau''_{12}}{2} - \frac{\tau''_{21}}{2} = \rho \left(\frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}{12} \right) \dot{\Omega}_3$$

Quando Δx_1 e Δx_2 tendono a zero, i valori con il ' e con il '' tendono al valore assunto al centro del volume (senza accento), $\tau' \rightarrow \tau'' \rightarrow \tau$, e quindi

$$\tau_{12} = \tau_{21}$$

come si voleva dimostrare. Il discorso può essere esteso a dimostrare la simmetria di tutte le componenti del tensore degli sforzi che, come detto nel capitolo 1, è una proprietà invariante nel cambiamento tra sistemi di riferimento e consente di individuare sempre il sistema principale.

Riprendiamo il percorso verso una formulazione differenziale dell'equazione di bilancio della quantità di moto, inserendo la (82) nella equazione (81)

$$\int_{V_m} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{V_m} \rho \mathbf{f} dV + \int_S \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{n}}} dS \quad (83)$$

ed, applicando il teorema della divergenza (23), si può trasformare l'ultimo integrale in un integrale di volume come gli altri

$$\int_{V_m} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{V_m} \rho \mathbf{f} dV + \int_{V_m} \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}} dV. \quad (84)$$

Assumendo come in precedenza che non vi siano discontinuità nel campo, questa relazione deve essere valida per qualsiasi volume di controllo, quindi deve sussistere anche tra le funzioni integrande

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}}}. \quad (85)$$

detta equazione di Cauchy, che costituisce l'equazione di bilancio della quantità di moto. Sviluppando la derivata totale a primo membro possiamo riscriverla, per componenti

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (86)$$

In queste tre equazioni scalari compaiono come incognite le sei componenti scalari del tensore degli sforzi sulla superficie di controllo che esprimono la diffusione di quantità di moto. Come per il flusso di uno scalare attraverso la superficie di controllo nel paragrafo 4.4 (azioni di diffusione molecolare), anche queste vanno specificate attraverso ulteriori relazioni, dette costitutive.

4.6 RELAZIONI COSTITUTIVE PER IL TENSORE DEGLI SFORZI

Come si già accennato, per chiudere il problema specifico dell'equazione della quantità di moto, oltre alle equazioni di bilancio, che rappresentano i principi fondamentali della meccanica, abbiamo bisogno di equazioni che stabiliscano, per ciascun tipo di fluido, la relazione tra stato di tensione e stato di deformazione. In genere uno stato di sollecitazione applicato ad un corpo produce una deformazione ed una variazione della deformazione nel tempo, cioè una velocità di deformazione. Come detto nella parte introduttiva (Capitolo 2), sono definiti solidi quei mezzi continui nei quali, ad uno stato tensionale costante corrisponde una deformazione costante al limite $t \rightarrow \infty$. Sono invece definiti fluidi quei mezzi continui nei quali uno stato tensionale costante produce una variazione della deformazione nel tempo ovvero una velocità di deformazione per $t \rightarrow \infty$.

Per scrivere le equazioni costitutive partiamo da tre assiomi fondamentali:

1. gli eventi ad un assegnato istante sono condizionati da eventi passati e non da eventi futuri;
2. lo stato in un punto è determinato solo da ciò che accade nell'intorno del punto stesso;
3. qualsiasi legge fisica è indipendente dal sistema di riferimento scelto.

Per soddisfare il primo assioma è sufficiente supporre che la dipendenza dagli eventi passati sia descritta dalle variabili che descrivono lo stato termodinamico della particella (per esempio la temperatura). Dal secondo assioma risulta che lo stato di tensione in un punto può essere funzione solo delle variabili cinematiche e termodinamiche e delle loro derivate spaziali del primo ordine

$$\tau_{ij} = f_{ij} \left(u_k, \frac{\partial u_n}{\partial x_m}, \text{variabili termodinamiche} \right) \quad (87)$$

essendo τ_{ij} , u_k e le derivate parziali valutate nello stesso punto e nello stesso istante. Senza perdere di generalità, possiamo inoltre descrivere lo stato del sistema in un riferimento che abbia la stessa velocità di traslazione e di rotazione della particella fluida e quindi si ha $u_k=0$ e $r_{mn}=0$, per cui

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_m} = r_{mn} + e_{mn} = e_{mn} \quad (88)$$

secondo quanto riportato nel paragrafo 3.2. Quindi, sulla base del terzo assioma, la (87) diventa

$$\tau_{ij} = f_{ij}(e_{mn}, \text{variabili termodinamiche}) \quad (89)$$

e il tensore degli sforzi risulta effettivamente legato alle velocità di deformazione del fluido. Dobbiamo a questo punto fare delle ipotesi sul tipo di fluido coinvolto. Sono definiti fluidi stokesiani, quei fluidi che hanno le seguenti proprietà

- sono omogenei, ovvero il legame costitutivo (89) non varia da punto a punto ma è lo stesso in tutto il fluido;
- sono isotropi, ovvero non hanno direzioni preferenziali (segue che a riposo, ovvero in un caso banale di stato di deformazione sferico, il tensore delle tensioni non può che essere sferico e quindi isotropo);
- a riposo, (fluido in quiete, $e_{mn}=0$) il tensore τ_{ij} è legato alla deformazione ed alle variabili termodinamiche attraverso una equazione di stato;
- f_{ij} è continua e derivabile n volte.

Il termine che compare nella diagonale del tensore $\underline{\tau}$, nel caso di fluido in quiete, è espresso per mezzo della quantità p , chiamata pressione ($p=-1/3 \text{ tr}(\tau_{ij})$). In base alle ipotesi precedenti è possibile sviluppare in serie di Taylor f_{ij}

$$\tau_{ij} = A_{ij}^I + A_{ijmn}^{II} e_{mn} + A_{ijmnsr}^{III} e_{mn} e_{sr} + \dots \quad (90)$$

nella quale i tensori \underline{A} sono, in generale, funzione delle variabili termodinamiche, come la temperatura. Inoltre, essendo il fluido isotropo, i tensori \underline{A} dovranno essere anch'essi isotropi e quindi al secondo ordine si ottengono solo moltiplicando il delta di Kronecker per uno scalare,

mentre al quarto ordine si ottengono combinando linearmente i prodotti fra due delta di Kronecker ottenuti permutando i pedici (paragrafi 1.3 e 1.5). Quindi nella (89)

$$A_{ij}^I = A_0 \delta_{ij} \quad (91)$$

$$A_{ijmn}^{II} = A_1 \delta_{ij} \delta_{mn} + A_2 \delta_{im} \delta_{jn} + A_3 \delta_{ni} \delta_{mj} \quad (92)$$

e così si può ottenere il tensore del sesto ordine attraverso una combinazione lineare dei prodotti di tre delta di Kronecker ottenuti permutando i pedici.

Sono definiti fluidi newtoniani (Isaac Newton, 1643-1727) quei fluidi stokesiani che hanno un legame lineare tra sforzi e velocità di deformazione. Nell'espressione (90) potranno quindi comparire solo i termini del tipo A^I ed A^{II}

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= A_0 \delta_{ij} + (A_1 \delta_{ij} \delta_{mn} + A_2 \delta_{im} \delta_{jn} + A_3 \delta_{ni} \delta_{mj}) e_{mn} = \\ &= A_0 \delta_{ij} + (A_1 \delta_{ij} e_{nn} + A_2 e_{ij} + A_3 e_{ji}) = (A_0 + A_1 e_{nn}) \delta_{ij} + (A_2 + A_3) e_{ij} \end{aligned} \quad (93)$$

essendo il tensore delle velocità di deformazione un tensore simmetrico. Risulta quindi che il tensore degli sforzi è anch'esso simmetrico (come doveva essere dal paragrafo precedente). Introdotti i due coefficienti di viscosità (infatti le quantità A_i con $i \neq 0$ hanno proprio dimensioni di massa/(tempo×lunghezza))

$$\lambda = A_1 \quad \text{e} \quad \mu = \frac{1}{2}(A_2 + A_3),$$

l'equazione costitutiva per i fluidi newtoniani può essere scritta come:

$$\tau_{ij} = (-p + \lambda e_{nn}) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad (94)$$

nella quale $e_{nn} \equiv \text{div } \mathbf{u} = (\partial u_n / \partial x_n)$, e λ e μ dipendono dalla temperatura.

Non tutti i fluidi sono newtoniani, per alcuni (non newtoniani) la relazione tra tensore degli sforzi è non lineare come ad esempio nelle vernici, colla, gelatina, polimeri liquidi e soprattutto per il sangue. In questi casi sono sia presenti effetti non lineari che effetti di persistenza di tipo elastico e le relazioni costitutive saranno del tipo $\tau_{ij} \propto (\partial u_i / \partial x_j)^n$ ($n=1$ corrisponde al caso di fluido newtoniano, $n < 1$ al caso di fluido pseudoplastico e $n > 1$ al caso di fluido dilatante).

La relazione (94) può essere ulteriormente semplificata considerando l'ipotesi fatta in precedenza che a riposo il tensore τ_{ij} sia legato alla deformazione ed alle variabili termodinamiche attraverso un'equazione di stato e che il termine che compare nella diagonale del tensore stesso sia espresso per mezzo della pressione. Infatti se calcoliamo la traccia dalla (94)

$$\begin{aligned}\sum_1^3 \tau_{ii} &= -3p + 3\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}) + 2\mu(e_{11} + e_{22} + e_{33}) = \\ &= -3p + (3\lambda + 2\mu)(\nabla \cdot \mathbf{u})\end{aligned}$$

avendo essere il termine sulla diagonale pari a $-p$, deve risultare

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu = 0$$

cioè deve annullarsi la cosiddetta viscosità di volume K (questo corrisponde al fatto che se le molecole del gas sono monoatomiche, come in aria, allora vi sono gradi di libertà traslatori e la ripartizione del campo di pressione è quasi istantanea, mentre se le molecole sono pluriatomiche allora vi sono gradi di libertà anche rotatori con tempo di rilassamento finito e $K \neq 0$). Dalla relazione precedente è possibile scrivere la (94) come

$$\tau_{ij} = \left[-p - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right] \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (95)$$

avendo esplicitato il tensore delle velocità di deformazione.

4.7 EQUAZIONI DI NAVIER - STOKES

Introdotta l'equazione costitutiva (95) in quelle di Cauchy (86) si ottiene:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

e dividendo per la densità si ottengono le cosiddette equazioni di Navier-Stokes (Claude-Louis Navier, 1785-1836)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]$$

In forma vettoriale

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = \underline{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{1}{\rho} \nabla \left[\frac{2}{3} \mu (\nabla \cdot \underline{u}) \right] + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot [\mu (\nabla \otimes \underline{u})] \quad (96)$$

In queste equazioni ci sono a primo membro i termini di variazione del campo di velocità nel tempo e a causa del trasporto fluido e a secondo membro le forze esterne, il gradiente di pressione, le forze viscosse di tipo compressibile e quelle incompressibili. Sono equazioni differenziali, alle derivate parziali, non lineari del secondo ordine.

Cominciamo ad introdurre alcune ipotesi semplificative per arrivare ad equazioni più semplici. Prima di tutto consideriamo che la dipendenza del coefficiente di viscosità dalle coordinate spaziali avviene attraverso la relazione $\mu = \mu(T)$, che è una relazione empirica che va aggiunta al sistema di equazioni (come per il coefficiente di diffusività molecolare nel paragrafo 4.4). Se la dipendenza dalla temperatura è piccola, allora è possibile assumere che il coefficiente di viscosità sia costante e le equazioni si semplificano in

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right) + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (97)$$

essendo $\nu = \mu/\rho$ il coefficiente di viscosità cinematica (paragrafo 2.4) e dove l'ultimo termine a secondo membro corrisponde al laplaciano.

Nel caso di flusso incompressibile la divergenza della velocità è pari a zero (paragrafo 4.3) e l'equazione si riduce a

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (98)$$

Nel caso di assenza di forze viscosse (o forze viscosse trascurabili rispetto al termine non lineare a primo membro) si ottiene la cosiddetta equazione di Eulero

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (99)$$

Se gli effetti viscosi sono invece preponderanti rispetto al termine non lineare, nel caso incompressibile, è possibile ottenere le cosiddette equazioni di Stokes, che sono lineari

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \quad (100)$$

Se infine cerchiamo cosa succede nel caso statico, con la forza peso $\underline{f} = -g\underline{k}$ (dove \underline{k} è il versore dell'asse verticale), otteniamo la relazione equivalente alla legge dell'idrostatica del capitolo 2 (eq. 28)

$$-\rho g = \underline{\nabla} p$$

4.8 EQUAZIONI DI NAVIER – STOKES IN FORMA ADIMENSIONALE

Come visto alla fine del paragrafo precedente, in molte situazioni risulta necessario confrontare tra loro i differenti termini delle equazioni di Navier-Stokes. Per compiere questa operazione correttamente è necessario rendere adimensionali le equazioni così che i differenti termini possano essere confrontati numericamente. Per effettuare questa adimensionalizzazione, è necessario innanzitutto scegliere le grandezze indipendenti fondamentali attraverso le quali sia possibile esprimere tutte le altre (nel caso specifico sono tre). Si deve poi scegliere una scala (cioè una grandezza di riferimento) per ciascuna grandezza fondamentale. Nel nostro caso, una buona scelta può essere quella di considerare la velocità, con grandezza di riferimento U , pari alla velocità della corrente indisturbata, una lunghezza, caratterizzata dalla dimensione caratteristica L , ed una densità, caratterizzata dal valore di riferimento indisturbato ρ_0 . Attraverso queste tre scale possiamo adimensionalizzare tutte le grandezze in gioco.

Consideriamo l'equazione di Navier-Stokes (98), cioè nel caso di coefficiente di viscosità costante, scritta nel caso in cui le uniche forze di massa siano quelle dovute al campo gravitazionale, $\underline{\mathbf{f}} = -g\underline{\mathbf{k}}$ (si veda la fine del paragrafo precedente)

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\nabla}) \underline{\mathbf{u}} = -g\underline{\mathbf{k}} - \frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p + \frac{1}{3} \nu \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{u}}) + \nu \nabla^2 \underline{\mathbf{u}} \quad (101)$$

Attraverso le scale scelte possiamo scrivere le grandezze adimensionali

$$x_i^* = x_i / L; \quad u_i^* = u_i / U; \quad \rho^* = \rho / \rho_0; \quad p^* = p / p_0; \quad t^* = t / t_0.$$

Per esprimere le derivate in forma adimensionale ricordiamo che essendo operatori lineari si ha

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t_0} \frac{\partial}{\partial t^*}$$

$$\underline{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial / \partial x_1 \\ \partial / \partial x_2 \\ \partial / \partial x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \underline{\nabla}^*$$

Se sostituiamo nell'equazione (102) si ottiene

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}^*}{\partial t^*} \frac{U}{t_0} + (\underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\nabla}^*) \underline{\mathbf{u}}^* \frac{U^2}{L} = -g\underline{\mathbf{k}} - \frac{p_0}{L \rho_0 \rho^*} \underline{\nabla}^* p^* + \frac{1}{3} \frac{U \nu}{L^2} \underline{\nabla}^* (\underline{\nabla}^* \cdot \underline{\mathbf{u}}^*) + \frac{U \nu}{L^2} \nabla^{*2} \underline{\mathbf{u}}^*$$

e, dividendo entrambi i membri per U^2/L (così che il termine inerziale di trasporto a primo membro abbia fattore moltiplicativo unitario),

$$\frac{L}{U t_0} \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}^*}{\partial t^*} + (\underline{\mathbf{u}}^* \cdot \underline{\nabla}^*) \underline{\mathbf{u}}^* = -\frac{gL}{U^2} \underline{\mathbf{k}} - \frac{p_0}{\rho_0 U^2} \frac{1}{\rho^*} \underline{\nabla}^* p^* + \frac{1}{3} \frac{\nu}{UL} \underline{\nabla}^* (\underline{\nabla}^* \cdot \underline{\mathbf{u}}^*) + \frac{\nu}{UL} \nabla^{*2} \underline{\mathbf{u}}^*$$

Nella relazione precedente possono essere riconosciuti quattro gruppi adimensionali

$$\underline{\text{numero di Strouhal}} \text{ (Vincent Strouhal, 1850-1922)} \quad St = \frac{L}{U t_0}$$

<u>numero di Froude</u> (William Froude, 1810-1879)	$F_r = \sqrt{\frac{U^2}{gL}}$ (102)
<u>numero di Ruark</u>	$Ru = \frac{\rho_0 U^2}{p_0}$
<u>numero di Reynolds</u>	$Re = \frac{UL}{\nu}$

che permettono di giungere alla forma adimensionale dell'equazione di Navier-Stokes

$$St \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t^*} + (\underline{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \underline{\mathbf{u}} = -\frac{1}{F_r^2} \underline{\mathbf{k}} - \frac{1}{Ru} \frac{\nabla p}{\rho} + \frac{1}{3} \frac{1}{Re} \nabla(\nabla \cdot \underline{\mathbf{u}}) + \frac{1}{Re} \nabla^2 \underline{\mathbf{u}} \quad (103)$$

nella quale, per semplicità, sono stati omessi gli asterischi che indicano le grandezze adimensionali. Questa forma dell'equazione si presta anche all'interpretazione del significato dei gruppi adimensionali sopra identificati. Supponiamo infatti di aver scelto le scale delle grandezze in modo tale che tutte le grandezze adimensionali, nell'ambito del problema che stiamo considerando, siano di ordine 1, così come le loro derivate adimensionali. Nell'equazione precedente tutti i termini risultano di ordine 1 tranne i quattro gruppi adimensionali che possono invece assumere un valore qualunque. In altre parole si ottengono i casi limite elencati alla fine del paragrafo precedente semplicemente considerando i valori in gioco dei numeri adimensionali.

Per esempio, valutando l'ordine di grandezza del numero di Reynolds possiamo stimare quanto siano importanti gli ultimi due termini, quelli legati alla presenza della viscosità, rispetto ai termini a primo membro (i termini inerziali di ordine 1). Quindi il numero di Reynolds può essere interpretato come una stima del rapporto tra forze di inerzia e forze viscosi (e infatti basta fare il rapporto tra l'ordine di grandezza delle forze di inerzia, $ma \approx \rho V U^2 / L = \rho L^2 U^2$, e l'ordine di grandezza delle forze viscosi, $\tau S \approx \mu U L^2 / L = \mu U L$, per ottenere proprio il numero di Reynolds). In particolare se $Re \rightarrow \infty$ i termini viscosi saranno trascurabili e la viscosità non influenza in modo significativo il fenomeno che si sta studiando (tale infatti è il limite che porta all'equazione di Eulero (100)). Similmente per $Re \rightarrow 0$ possiamo ottenere il limite dell'equazione di Stokes (101) in cui i termini viscosi diventano preponderanti.

L'ordine di grandezza del numero di Froude fornisce invece informazioni sull'ordine di grandezza del termine gravitazionale, e può essere quindi interpretato come una stima del rapporto tra forze di inerzia e forze gravitazionali. Analogamente al caso precedente, se $F_r \rightarrow \infty$ il termine dovuto alle forze gravitazionali può essere trascurato e la presenza della gravità non influenza in

modo significativo il nostro fenomeno. Se invece il numero di Froude è finito allora saremo in presenza di flusso subcritico ($Fr < 1$) o supercritico ($Fr > 1$) con conseguente formazione e importanza dei fenomeni ondosi e di galleggiamento (onde di superficie, aerostati e dirigibili).

Il numero di Strouhal da invece indicazioni sugli effetti non stazionari: se il tempo caratteristico $t_0 \geq L/U$ (questa quantità rappresenta proprio il tempo scala per una corrente con velocità U che investe un corpo di dimensione L), $St \leq 1$ e tali effetti sono trascurabili con condizioni di stazionarietà rispetto al tempo caratteristico del problema L/U . Se invece $t_0 < L/U$, allora $St > 1$ e le non stazionarietà sono importanti.

Il termine contenente il numero di Ruark tiene conto degli effetti del campo di pressione e può anche essere scritto (considerando la velocità del suono per un gas perfetto isentropico, *cfr* (36) del capitolo 2) come

$$Ru = \frac{\rho_0 U^2}{p_0} = \gamma \frac{U^2}{c^2} = \gamma Ma^2,$$

dove si è introdotto il

$$\text{numero di Mach (Ernst Josef Mach, 1838-1916)} \quad Ma = \frac{U}{c} \quad (104)$$

che tiene conto degli effetti di compressibilità che intervengono sul campo di pressione. Se il numero di Mach tende a zero (così come il numero di Ruark), cioè per $U \ll c$, allora siamo prossimi a condizioni di incompressibilità e i gradienti di pressione sono rilevanti (la pressione di riferimento, p_0 , può essere anche molto maggiore della pressione dinamica di riferimento, $\rho_0 U^2$). Se invece $Ma \rightarrow \infty$, cioè per $U \gg c$, allora siamo in condizioni di compressibilità con preponderanza della pressione dinamica (si noti che la stessa equazione di conservazione della massa opportunamente adimensionalizzata presenterà un fattore $1/c^2$ davanti al termine $D\rho/Dt$ che mostra come nel caso incompressibile, $c \rightarrow \infty$, resterà il solo termine contenente la divergenza della velocità).

In conclusione si può affermare che, fatta una scelta oculata delle scale di un fenomeno, la valutazione dei numeri adimensionali permette di ottenere l'importanza relativa dei singoli termini delle equazioni di Navier-Stokes e quindi della loro rilevanza nello studio del fenomeno stesso.

4.9 EQUAZIONE DI CONSERVAZIONE DELL'ENERGIA

I principi sopra enunciati sono sufficienti a risolvere tutti quei problemi nei quali l'unica forma di energia in gioco sia quella meccanica. Le variabili termodinamiche possono entrare in gioco nelle equazioni costitutive, per esempio introducendo una dipendenza della viscosità dalla temperatura (che risulta un dato del problema). Quando entra in gioco anche l'energia termica allora è necessario fare riferimento anche ai principi della termodinamica, come già introdotto nell'equazione (53) nel paragrafo 4.1 che viene qui di seguito riportata

$$\frac{DE}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho E' dV = L + Q; \quad (105)$$

essendo $E' = U + u^2/2$ la somma dell'energia interna per l'unità di massa, U , (legata all'energia cinetica a livello atomico, di cui non si può tener conto nello schema di mezzo continuo e quindi legata alla temperatura del fluido tramite il calore specifico a volume costante, come riportato nel paragrafo 2.3) e dell'energia cinetica del fluido sempre per unità di massa.

Applicando il teorema di Reynolds nella sua prima formulazione (59) e sviluppando le espressioni del lavoro compiuto nell'unità di tempo dalle forze di superficie e dalle forze di massa nella relazione (53), si ricava settorialmente e per indici

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{V_m} \rho E' dV \right] + \int_S \rho E' \underline{\mathbf{u}} \cdot \underline{\mathbf{n}} dS &= \int_{V_m} \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}} dV + \int_S (\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} dS + \int_{V_m} \rho Q dV - \int_S \underline{\mathbf{q}} \cdot \underline{\mathbf{n}} dS \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{V_m} \rho E' dV \right] + \int_S \rho E' u_i n_i dS &= \int_{V_m} \rho f_i u_i dV + \int_S \tau_{ij} n_j u_i dS + \int_{V_m} \rho Q dV - \int_S q_i n_i dS \end{aligned} \quad (106)$$

dove

- I) lavoro delle forze di massa;
- II) lavoro delle forze di superficie;
- III) calore scambiato a distanza con l'esterno (irraggiamento e convezione);
- IV) calore scambiato attraverso la superficie (conduzione);

essendo Q il calore fornito al volume per irraggiamento per unità di massa e di tempo, il vettore $\underline{\mathbf{q}}$ il flusso di calore per unità di superficie ed $\underline{\mathbf{n}}$ la normale uscente.

Utilizzando la seconda formulazione del teorema di Reynolds (61) per calcolare la variazione dell'integrale dell'energia, tenendo conto dell'equazione di bilancio di massa, si ottiene

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho E' dV = \int_{V_c} \left[\frac{D}{Dt} (\rho E') + \rho E' \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{u}} \right] dV = \int_{V_c} \rho \frac{DE'}{Dt} dV$$

Essendo $\underline{\boldsymbol{\tau}}$ un tensore simmetrico si ha

$$(\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \underline{\mathbf{n}}) \cdot \underline{\mathbf{u}} = \tau_{ij} n_j u_i = \tau_{ji} u_i n_j = (\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \underline{\mathbf{u}}) \cdot \underline{\mathbf{n}}$$

e applicando il teorema della divergenza agli integrali superficiali si ottiene l'equazione di bilancio dell'energia totale in forma differenziale (sotto le consuete ipotesi di continuità delle funzioni)

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{DU}{Dt} + \underline{\mathbf{u}} \cdot \frac{D\underline{\mathbf{u}}}{Dt} \right) &= \rho \underline{\mathbf{f}} \cdot \underline{\mathbf{u}} + \underline{\nabla} \cdot (\underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \underline{\mathbf{u}}) + \rho Q - \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{q}} \\ \rho \frac{DU}{Dt} + \rho u_i \frac{Du_i}{Dt} &= \rho f_i u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} u_j) + \rho Q - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (107)$$

e sostituendo l'equazione costitutiva (94) (scrivendo $\tau_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij}$, cioè lasciando nel termine σ_{ij} tutta la parte con attrito)

$$\rho \frac{DU}{Dt} + \rho u_i \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i u_i - \frac{\partial (p u_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j) + \rho Q - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (108)$$

che rappresenta l'equazione dell'energia totale per i fluidi newtoniani.

Si noti che moltiplicando tutti i termini della i -esima componente dell'equazione di Cauchy (85) per u_i , cioè facendo il prodotto scalare con la velocità, si ottiene l'equazione di bilancio dell'energia meccanica, che quindi non è un'equazione indipendente da quelle della quantità di moto

$$\left(\rho \frac{Du_i}{Dt} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho f_i \right) u_i = 0 \quad (109)$$

e sottratta all'equazione di bilancio dell'energia totale (107) porta all'equazione di bilancio dell'energia termica in termini di energia interna (che questa volta è indipendente dalle altre)

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho Q$$

$$\rho \frac{DU}{Dt} = \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot (\underline{\nabla} \otimes \underline{\mathbf{u}}) - \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{q}} + \rho Q$$
(110)

Sia nella (110) che nella (111) si può sostituire l'espressione del tensore degli sforzi ricavata dalla relazione costitutiva per ottenere le equazioni per fluidi newtoniani. L'equazione trovata è differenziale, alle derivate parziali, del secondo ordine, non lineare.

Sulla base degli stessi assiomi che hanno portato alle equazioni costitutive tra sforzi e velocità di deformazione si può ricavare la relazione costitutiva esistente tra flusso di calore e gradienti di temperatura

$$q_i = F_i(T, \frac{\partial T}{\partial x_j}, \text{variabili termodinamiche})$$

e assumendo invarianza rispetto ad un cambiamento del sistema di riferimento (cade la dipendenza da T), sviluppando in serie di Taylor nell'ipotesi di flusso di calore nullo, in assenza di gradienti di temperatura, assumendo comportamento isotropo e quindi tensori sferici e legame lineare tra $\underline{\mathbf{q}}$, flusso di calore, e gradiente di temperatura, si ottiene la relazione di Fourier (Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768-1830)

$$q_i = -K \frac{\partial T}{\partial x_i}$$
(111)

dove K è la conducibilità termica. Il segno meno è stato introdotto per poter porre K positivo, poiché il calore fluisce dalle zone a temperatura più elevata a quelle a temperatura più bassa, quindi nel verso opposto al gradiente di temperatura. Ricordando che $U=c_v T$, e supponendo costante c_v , l'equazione di bilancio dell'energia termica (111) in termini di temperatura si scrive

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \rho Q$$
(112)

avendo utilizzato il fatto che dall'equazione di conservazione della massa (65) deriva

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

L'equazione (113) è un'equazione per la temperatura se sono dati la pressione, la velocità e la densità. Si noti che l'equazione di bilancio dell'energia termica appena trovata è del tutto analoga a quella del bilancio della massa dello scalare (72), nel caso di un gas perfetto cui vengano trascurati gli effetti dell'attrito e senza i contributi del calore di volume Q (assenza di irraggiamento e convezione con l'esterno). Infatti in questo caso si può scrivere la (113) come

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$$

dividendo per ρc_v e usando l'equazione di stato dei gas perfetti si ottiene un'equazione formalmente analoga alla (72) dove al posto del coefficiente di diffusività molecolare c'è quello di diffusività termica ($\alpha=K/\rho c_v$) e il termine contenente gli effetti di compressibilità è moltiplicato per $(\gamma-1)$

$$\frac{DT}{Dt} + (\gamma-1)T \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho c_v} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$$

cioè la diffusione del campo di temperatura avviene esattamente come quella di uno scalare nel campo (scalare passivo).

4.10 RIEPILOGO EQUAZIONI - INCOGNITE

E' bene riepilogare le equazioni della fluidodinamica ricavate fino ad ora facendo un bilancio complessivo tra equazioni ed incognite. In assenza di uno scalare passivo, abbiamo il seguente sistema di equazioni (65), (85), (111)

1)	$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{u}} = 0$	1 equazione	$\rho, \underline{\mathbf{u}}$
2)	$\rho \frac{D\underline{\mathbf{u}}}{Dt} = \rho \underline{\mathbf{f}} + \underline{\nabla} \cdot \underline{\boldsymbol{\tau}}$	3 equazioni	$\rho, \underline{\mathbf{u}}, \underline{\boldsymbol{\tau}}$
3)	$\rho \frac{DU}{Dt} = \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot (\underline{\nabla} \otimes \underline{\mathbf{u}}) - \underline{\nabla} \cdot \underline{\mathbf{q}} + \rho Q$	1 equazione	$\rho, U, \underline{\mathbf{u}}, \underline{\boldsymbol{\tau}}, \underline{\mathbf{q}}$

alle quali va aggiunta l'equazione di stato (di cui al paragrafo 2.3)

$$4) \quad p = p(\rho, T) \qquad \qquad \qquad 1 \text{ equazione} \qquad \qquad \qquad p, \rho, T$$

In queste 6 equazioni sono presenti alcune quantità assegnate come forzanti esterne (\underline{f}, Q), altre che vanno specificate attraverso le relazioni costitutive (i cosiddetti flussi)

$$\underline{\tau} = f'(\underline{\nabla} \otimes \underline{u}, \mu, p), \quad \underline{q} = f''(\underline{\nabla} T, K),$$

e quantità che vanno assegnate come equazioni o relazioni empiriche di dipendenza dalle variabili termodinamiche (o eventualmente costanti)

$$U = f(T), \quad \mu = \mu(T), \quad K = K(T),$$

Ciò permette di ottenere un sistema di 6 equazioni nelle 6 incognite $\rho, \underline{u}, p, T$ (a volte l'intero sistema viene impropriamente contrassegnato dal nome equazioni di Navier-Stokes). Ciascuna delle incognite precedenti è funzione di x_1, x_2, x_3, t . Con assegnate condizioni iniziali e al contorno viene specificato il particolare problema in esame e formalmente si può cercare una soluzione del sistema stesso (se esiste).

Nel caso in cui sia presente una quantità scalare, in concentrazione c che rappresenta l'ulteriore incognita, alle equazioni precedenti va aggiunta anche l'equazione (68), specificando l'ulteriore relazione costitutiva per il flusso molecolare ($\underline{\Phi} = f'''(\underline{\nabla} c, D)$) e la dipendenza dalla temperatura del coefficiente di diffusività molecolare ($D = D(T)$).

In molti casi è possibile semplificare il precedente sistema di equazioni trascurando alcuni dei termini e delle incognite che compaiono per ottenere delle soluzioni esatte di problemi semplificati. In altre condizioni sarà necessario fare ulteriori ipotesi semplificative. Si noti che per esempio nel caso incompressibile, l'equazione dell'energia e di stato non sono necessarie (a meno di problemi di flussi termici) ed il sistema di equazioni si riduce in quattro equazioni (continuità + bilancio di quantità di moto) in quattro incognite (le tre componenti di velocità e la pressione). In altre parole la densità e la temperatura sono determinate dalle condizioni al contorno e dalle relazioni termodinamiche.

Capitolo 5

SOLUZIONI ESATTE ED EQUAZIONE DI BERNOULLI

5.1 FLUSSI PARALLELI, MOTI DI HAGEN-POISEUILLE E COUETTE

Come detto, solo in casi particolari si può trovare una soluzione delle equazioni di Navier-Stokes in forma analitica. Un caso particolarmente interessante è quello dei flussi paralleli. E' definito flusso parallelo quello in cui due componenti della velocità sono in tutto il campo uguali a zero

$$u_1 \neq 0; \quad u_2 = u_3 = 0$$

Nelle ipotesi di

- fluido incomprimibile,
- condizioni stazionarie, $St \ll 1$,
- forze di massa gravitazionali: $\mathbf{f} = -\nabla(gh)$, con h quota del condotto,
- temperatura $T = \text{const.}$,

si può scrivere l'equazione del bilancio di massa semplicemente come

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0$$

quindi la componente u_1 non è funzione di x_1 e dipende solo da x_2 e x_3 . Proiettando le tre equazioni di Navier-Stokes sui tre assi, si ottengono le equazioni di Stokes per il caso stazionario (annullandosi tutti i termini a primo membro) che risultano lineari, del secondo ordine

$$\begin{cases} 0 = -g \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p}{\rho g} + h \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) \\ 0 = -g \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{p}{\rho g} + h \right) \\ 0 = -g \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{p}{\rho g} + h \right) \end{cases}$$

Se introduciamo la quantità $h' = p/\rho g + h$, detta *carico piezometrico*, dalla seconda e terza equazione, si può osservare che essa risulta essere funzione unicamente di x_1 . La sua derivata cambiata di segno viene indicata con $i = -\partial h'/\partial x_1$, ed è chiamata *pendenza piezometrica*. Il moto del fluido avviene nel senso dei carichi piezometrici decrescenti e quindi con pendenza piezometrica positiva. Nel caso bidimensionale sul piano (x_1, x_2)

$$h' = h'(x_1), \quad u_1(x_2),$$

e la prima delle relazioni precedenti si riduce a

$$g \frac{dh'}{dx_1} = \nu \frac{d^2 u_1}{dx_2^2}.$$

Il primo membro è funzione della sola x_1 , il secondo membro è funzione della sola x_2 , per poter verificare tale relazione in tutti i punti del campo, entrambi i membri devono essere costanti (cioè il carico deve essere una funzione lineare di x_1). Integrando due volte si ha

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx_2} &= \left(\frac{g}{\nu} \frac{dh'}{dx_1} \right) x_2 + k_1 \\ u_1 &= \left(\frac{g}{\nu} \frac{dh'}{dx_1} \right) \frac{x_2^2}{2} + k_1 x_2 + k_2 \end{aligned} \tag{113}$$

cioè si ottiene una relazione che mostra come la distribuzione delle velocità all'interno del campo sia di tipo parabolico (moto di Hagen-Poiseuille, Jean Louis Marie Poiseuille, 1799-1869). Utilizzando le condizioni al contorno, le relazioni ottenute possono essere specificate per il caso del flusso che scorre fra due piastre distanti b . Nel caso in cui le piastre siano ferme, le condizioni al contorno sono

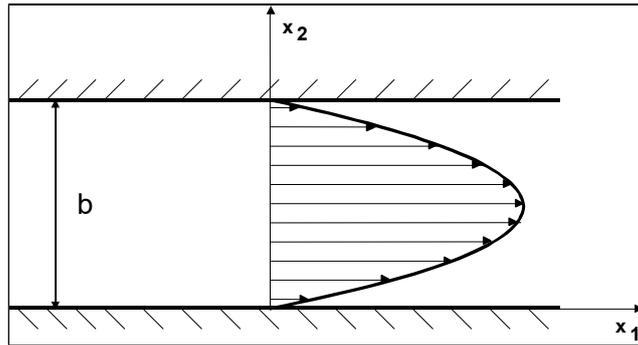


Figura 12. Rappresentazione del moto di Hagen-Poiseuille.

$$u_1(0) = 0; \quad u_1(b) = 0$$

dalle quali si determinano i valori di k_1 e k_2 per ottenere la soluzione esatta

$$u_1(x_2) = \left(\frac{g}{2\nu} \frac{dh'}{dx_1} \right) (x_2 - b)x_2.$$

Se imponiamo che la velocità al centro del condotto ($x_2=b/2$) sia uguale a U_0 , otteniamo la relazione tra il gradiente del carico piezometrico e la velocità

$$U_0 = \left(-\frac{g}{2\nu} \frac{dh'}{dx_1} \right) \frac{b^2}{4},$$

che conferma quanto affermato in precedenza, che il moto del fluido avviene nel senso dei carichi piezometrici decrescenti. Da questa relazione la soluzione esatta può anche essere scritta come

$$u_1(x_2) = U_0 \left(1 - \frac{x_2}{b} \right) \frac{4x_2}{b}$$

Nella direzione x_1 relativamente ad una superficie con normale lungo x_2 , ricordando l'equazione costitutiva (95), lo sforzo di taglio risulta lineare ed è dato da

$$\tau_{21} = \tau_{12} = 2\mu e_{12} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \mu \frac{4U_0}{b} \left(1 - \frac{2x_2}{b}\right)$$

Alle pareti ($x_2=0$, $x_2=b$) risulterà il valore costante

$$\tau_0 = \pm \frac{4\mu U_0}{b}$$

che esprime l'equilibrio tra lo sforzo di taglio alla parete (forza di attrito) e la pendenza piezometrica. Da questa relazione è possibile calcolare la forza d'attrito dalla relazione $\underline{\mathbf{F}} = \int \underline{\boldsymbol{\tau}} \cdot \underline{\mathbf{n}} dS$, considerando che la normale uscente ha verso opposto e che quindi i due contributi si sommano

$$D = F_{x_1} = \frac{8\mu U_0}{b} S$$

da cui si vede che la resistenza è direttamente proporzionale alla velocità (resistenza di Stokes). Si può quindi calcolare il cosiddetto coefficiente di resistenza

$$c_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho U_0^2 S} = \frac{16\mu U_0}{b \rho U_0^2} = \frac{16}{Re} \quad (114)$$

essendo Re il numero di Reynolds introdotto nella (103) del paragrafo 4.8. Il risultato trovato ha validità universale per i flussi laminari nei termini dell'andamento come l'inverso del numero di Reynolds, mentre il coefficiente dipende dallo specifico problema fluidodinamico (condotto, strato limite, scia).

Oltre alla forza tangenziale (parte simmetrica del tensore delle velocità di deformazione), è possibile valutare anche la parte antisimmetrica che, come visto nel capitolo 3, è legata al rotore della velocità e alla vorticità. Il moto risulta rotazionale con componente di vorticità differente da zero in direzione perpendicolare al piano (x_1, x_2)

$$\omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{4U_0}{b} \left(1 - \frac{2x_2}{b}\right) = -\frac{\tau_{12}}{\mu}$$

cioè viene generata vorticità proporzionalmente allo sforzo di taglio. Questo in qualche modo testimonia di un legame tra generazione di vorticità ed effetti della viscosità (è possibile ottenere questo legame in forma esatta calcolando il rotore delle equazioni di Navier Stokes, cioè l'equazione di trasporto della vorticità, $\frac{D\omega}{Dt} + (\omega \bullet \nabla)u = \mu \nabla^2 \omega$, dove in 2D se $\mu=0$, $D\omega/Dt=0$).

Si osservi che nella definizione del carico piezometrico sono presenti due termini, $h' = p/\rho g + h$. Il primo tiene conto della pressione e il secondo dell'altezza di carico. Nel caso in cui la quota del condotto sia costante (come in Figura 13 a sinistra), $x_2 = cost.$, allora il gradiente del carico sarà

$$\frac{dh'}{dx_1} = \frac{1}{\rho g} \frac{dp}{dx_1}, \quad U_0 = -\frac{b^2}{8\mu} \frac{dp}{dx_1}$$

da cui vediamo che il moto è determinato dal gradiente di pressione (nel caso specifico a causa della presenza del serbatoio a livello più elevato) e che tale gradiente deve essere negativo per avere un moto in direzione positiva.

Se invece la quota del condotto non è costante (come in Figura 13 a destra), $h = f(x_1)$, allora

$$\frac{dh'}{dx_1} = \frac{df}{dx_1} + \frac{1}{\rho g} \frac{dp}{dx_1}, \quad U_0 = -\left(\frac{df}{dx_1} + \frac{1}{\rho g} \frac{dp}{dx_1}\right) \frac{gb^2}{8\nu}$$

da cui vediamo che, anche nel caso di gradiente di pressione nullo, il moto è mantenuto grazie alla variazione di quota (inclinazione) del condotto. Tale variazione deve essere negativa (quota decrescente) per avere un moto in direzione positiva.

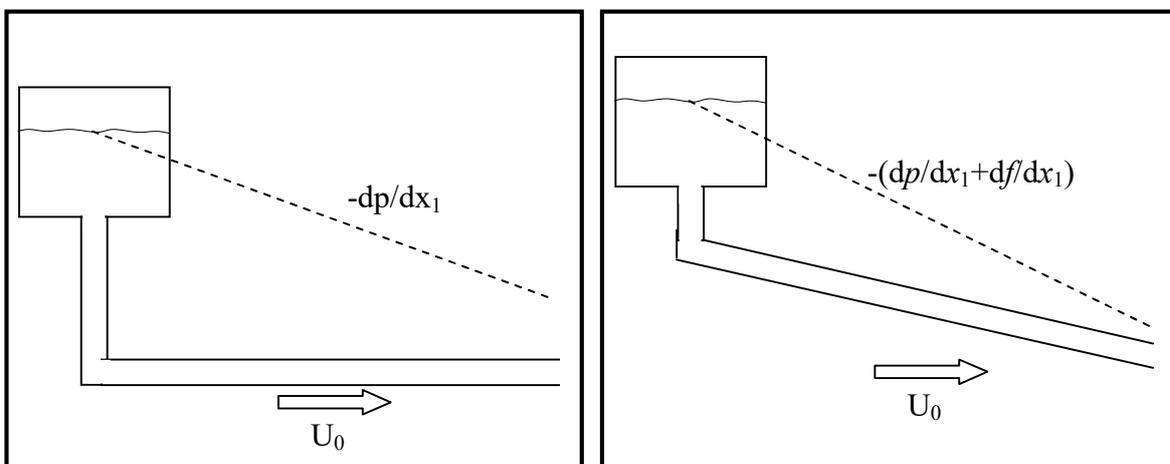


Figura 13. Moto in condotto con solo gradiente di pressione (a sinistra) e con sovrapposta variazione di quota (a destra).

Nel caso in cui si risolvano le equazioni (114) con condizione al contorno di parete superiore mobile a velocità V lungo l'asse x_1 , si avranno le seguenti condizioni al contorno

$$u_1(0) = 0; \quad u_1(b) = V$$

dalle quali si determinano i valori di k_1 e k_2 in (114) per ottenere la soluzione esatta

$$u_1(x_2) = \left(\frac{g}{2\nu} \frac{dh'}{dx_1} \right) (x_2 - b)x_2 + V \frac{x_2}{b}.$$

La distribuzione delle velocità è ottenuta dalla somma di un termine parabolico e di un termine lineare come rappresentato in Figura 14. A seconda del segno del carico piezometrico avremo le tre situazioni riportate nella figura stessa. Il secondo termine della relazione precedente è quello che si avrebbe nel caso in cui una delle due piastre si muovesse parallelamente a se stessa con velocità V in assenza di gradiente di pressione. In questo caso lo sforzo di taglio sulla parete inferiore sarà

$$(\tau_{12})_{x_2=0} = -\frac{g\rho}{2} \frac{dh'}{dx_1} b + \mu \frac{V}{b}.$$

In assenza di carico piezometrico (moto di Couette, Maurice Marie Alfred Couette, 1858-1943) resta solo il secondo termine che è una costante e può essere confrontato con quello che si avrebbe nel caso di contatto diretto tra la superficie inferiore e superiore poste ad una distanza x_0 , $\mu_s V/x_0$. Si può ricavare che il primo sarà molto minore del secondo sia perché $\mu \ll \mu_s$, sia perché $b \gg x_0$ e che quindi tale accorgimento può essere usato come un dispositivo di lubrificazione.

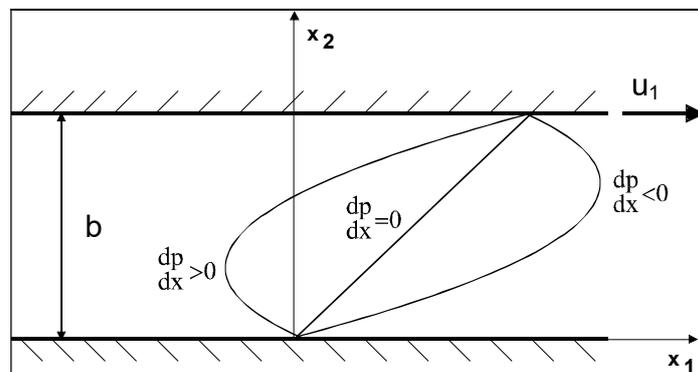


Figura 14. Rappresentazione del moto di Couette.

5.2 EQUAZIONE DI BERNOULLI

Le soluzioni trovate nel paragrafo precedente sono relative a condizioni di moto nelle quali i termini delle equazioni contenenti gli effetti della viscosità tendono ad essere molto maggiori di quelli inerziali a primo membro (equazioni di Stokes). In questo senso, anche con riferimento alle equazioni dimensionali presentate nel paragrafo 4.8 (104), si può dire che tali equazioni sono state ottenute nel limite di numeri di Reynolds molto bassi, $Re \rightarrow 0$. In maniera alternativa è possibile vedere cosa succede nel limite di numeri di Reynolds molto alti ($Re \rightarrow \infty$, equazioni di Eulero) quando i termini viscosi possono essere trascurati rispetto a quelli inerziali.

Prima di tutto proviamo a scrivere il termine in derivata sostanziale a primo membro dell'equazione di bilancio della quantità di moto in forma differente

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$$

dove $u^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$ e $\boldsymbol{\omega}$ rappresenta la vorticità. La seconda uguaglianza è un'identità vettoriale che si può dimostrare facilmente componente per componente, *p.e.* per la prima

$$\begin{aligned} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} &= \frac{\partial \left(\frac{u_1^2}{2} \right)}{\partial x_1} + \frac{\partial \left(\frac{u_2^2}{2} \right)}{\partial x_1} + \frac{\partial \left(\frac{u_3^2}{2} \right)}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - u_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = \\ &= \frac{\partial \left(\frac{u^2}{2} \right)}{\partial x_1} - u_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + u_3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial \left(\frac{u^2}{2} \right)}{\partial x_1} - (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})_1 \end{aligned}$$

Inserendo la relazione precedente nell'equazione di Navier Stokes, nella forma (97), si ottiene

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \left[\frac{1}{3} \mu (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right] + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot [\mu (\nabla \otimes \mathbf{u})]$$

Se scriviamo le forze esterne come conservative (esprimibili cioè tramite il gradiente di una funzione potenziale, $\mathbf{f} = -\nabla G$) e come visto questo è spesso possibile, *p.e.* nel caso della forza di gravità $G = gh$) e ci mettiamo nel caso di flusso non viscoso ($Re \rightarrow \infty$), dalla precedente equazione si ottiene

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{1}{2} \underline{\nabla} u^2 + \underline{\nabla} G + \frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p = \underline{\mathbf{u}} \times \underline{\omega} \quad (115)$$

Se ora consideriamo il campo di velocità come irrotazionale ($\underline{\omega} \equiv 0$), significherà che esiste una funzione potenziale φ il cui gradiente è pari al campo di velocità stesso, $\underline{\mathbf{u}} = \underline{\nabla} \varphi$, e il primo termine nell'equazione precedente potrà essere scritto come $\underline{\nabla}(\partial\varphi/\partial t)$.

Se invece è possibile scrivere la densità come dipendente solo dalla pressione (fluido barotropico), il secondo termine a primo membro diventa

$$-\frac{1}{\rho} \underline{\nabla} p = -\underline{\nabla} \int \frac{dp}{\rho}$$

(notiamo che tale posizione è possibile sia nel caso di flusso incompressibile, $\rho = \text{cost.}$, che nel caso di flusso isentropico, governato dalla (35)). In queste condizioni è possibile scrivere la (115) come

$$\underline{\nabla} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + G + \int \frac{dp}{\rho} \right) = 0$$

cioè la quantità tra parentesi risulta una costante, k_1 , rispetto a tutte le variazioni spaziali (la costante può quindi dipendere dal tempo nel caso non stazionario)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{u^2}{2} + G + \int \frac{dp}{\rho} = k_1(t) \quad (116)$$

La relazione precedente costituisce una delle forme possibili dell'equazione di Bernoulli (Daniel Bernoulli, 1700-1782).

Nel caso stazionario e incompressibile, la relazione precedente si riduce a

$$\frac{u^2}{2} + G + \frac{p}{\rho} = k_1 \quad (117)$$

con la costante k_1 che è la stessa in tutto il campo. La relazione precedente afferma che c'è un bilanciamento tra la energia cinetica, l'energia potenziale delle forze esterne e l'energia dovuta al campo di pressione (tutte per unità di massa). Si pone quindi il problema di qual è la relazione tra l'equazione di Bernoulli appena trovata e l'equazione di conservazione dell'energia (in effetti l'equazione di Bernoulli è stata appena ricavata dall'equazione del bilancio della quantità di moto

che quindi viene automaticamente soddisfatta sotto le ipotesi fatte una volta che è soddisfatta l'equazione di Bernoulli).

Riprendiamo allora l'equazione di conservazione dell'energia totale nella forma (109) valida per fluidi newtoniani

$$\rho \frac{DU}{Dt} + \rho u_i \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i u_i - \frac{\partial(pu_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j) + \rho Q - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (118)$$

e scriviamola assumendo forze esterne conservative e assenza dei termini viscosi, come già fatto in precedenza, assumendo inoltre che non vi sia trasmissione di calore ($Q=0$, $\mathbf{q}=0$)

$$\frac{DU}{Dt} + \frac{Du^2/2}{Dt} = -u_i \frac{\partial G}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(pu_i)}{\partial x_i}$$

Notiamo che l'ultimo termine nella relazione precedente, utilizzando l'equazione di conservazione della massa nella forma (65), può essere scritto come

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial(pu_i)}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \left(p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = -\frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} = \frac{D\left(\frac{p}{\rho}\right)}{Dt}$$

e quindi assumendo che il potenziale delle forze di massa sia stazionario, si ottiene

$$\frac{DU}{Dt} + \frac{Du^2/2}{Dt} + \frac{DG}{Dt} + \frac{D\left(\frac{p}{\rho}\right)}{Dt} = \frac{D}{Dt} \left(U + u^2/2 + G + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{DH}{Dt} = 0$$

che ci dice che la quantità tra parentesi, detta entalpia totale, H , è uguale ad una costante, k_2 , muovendosi lungo la traiettoria di una particella fluida in moto (2^a forma dell'equazione di Bernoulli)

$$H = U + u^2/2 + G + \frac{p}{\rho} = k_2 \quad (119)$$

che deriva dall'equazione di conservazione dell'energia che viene quindi ad essere automaticamente soddisfatta una volta soddisfatta questa forma dell'equazione di Bernoulli. La

seconda forma dell'equazione di Bernoulli non sembrerebbe coincidere con la (117) anche assumendo in quest'ultima l'ipotesi di stazionarietà come fatto per ricavare la (120). Questa seconda forma è in effetti una forma più generale, ricavata dall'equazione dell'energia, nella quale sono ben evidenti i contributi di energia interna (il primo e l'ultimo), di energia cinetica (il secondo) e di energia potenziale (il terzo). Per evidenziare la similitudine tra le due forme dell'equazione di Bernoulli (117) e (120) è utile ricordare che un flusso non viscoso e non conduttore di calore, quale quello in esame, è anche isentropico. Di conseguenza, per questo vale

$$U + p/\rho = c_v T + p/\rho = c_v p/\rho R + p/\rho = p/\rho \left(\frac{c_v}{R} + 1 \right) = p/\rho \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) = \frac{c^2}{(\gamma - 1)}$$

avendo utilizzato le relazioni del paragrafo 2.3. D'altra parte per un gas perfetto isentropico risulta

$$\int \frac{dp}{\rho} = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) p/\rho = \frac{c^2}{(\gamma - 1)}$$

e quindi per il caso isentropico stazionario le equazioni (117) e (120) si riducono entrambe alla equazione di Bernoulli nella forma

$$u^2/2 + G + p/\rho \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) = k_2 \quad (120)$$

(al posto dell'ultimo termine si può anche scrivere $c^2/(\gamma-1)$), dove la costante è indipendente dal tempo ed è la stessa in tutto il campo se il campo è irrotazionale. Si noti che nel caso incompressibile stazionario isentropico, utilizzando la forma del primo principio della termodinamica contenente l'entropia (paragrafo 2.3), è possibile scrivere

$$dU = TdS - pdV = TdS - pd \left(\frac{1}{\rho} \right) = 0$$

e quindi, anche in questo caso, entrambe le forme del teorema di Bernoulli convergono all'unica forma (118). Le varie forme dell'equazione di Bernoulli sono non lineari in termini algebrici con incognite la pressione e la velocità (il potenziale delle forze esterne è pensato assegnato e la densità è determinata dalla pressione).

5.3 APPLICAZIONI DELL'EQUAZIONE DI BERNOULLI

La prima applicazione dell'equazione di Bernoulli riguarda un apparato di misura molto comune in differenti campi ingegneristici: il tubo di Pitot (Henry Pitot, 1695-1771). Si tratta di un dispositivo che permette la misura della velocità di un fluido in moto da misure della differenza di pressione. Nel caso di basso numero di Mach (tipicamente minore di 0.3, come si vedrà nel seguito) è possibile considerare il flusso come incompressibile e, assumendo assenza di forze di massa e flusso non viscoso, irrotazionale e stazionario, si può scrivere la relazione (118) come

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = k_1$$

Come rappresentato in Figura 15, calcoliamo la quantità costante a primo membro sia in corrispondenza del foro anteriore (detto presa totale o di ristagno, dove le quantità sono caratterizzate dal pedice t) che del foro laterale (detto presa statica, pedice s)

$$\frac{u_t^2}{2} + \frac{p_t}{\rho} = \frac{u_s^2}{2} + \frac{p_s}{\rho}$$

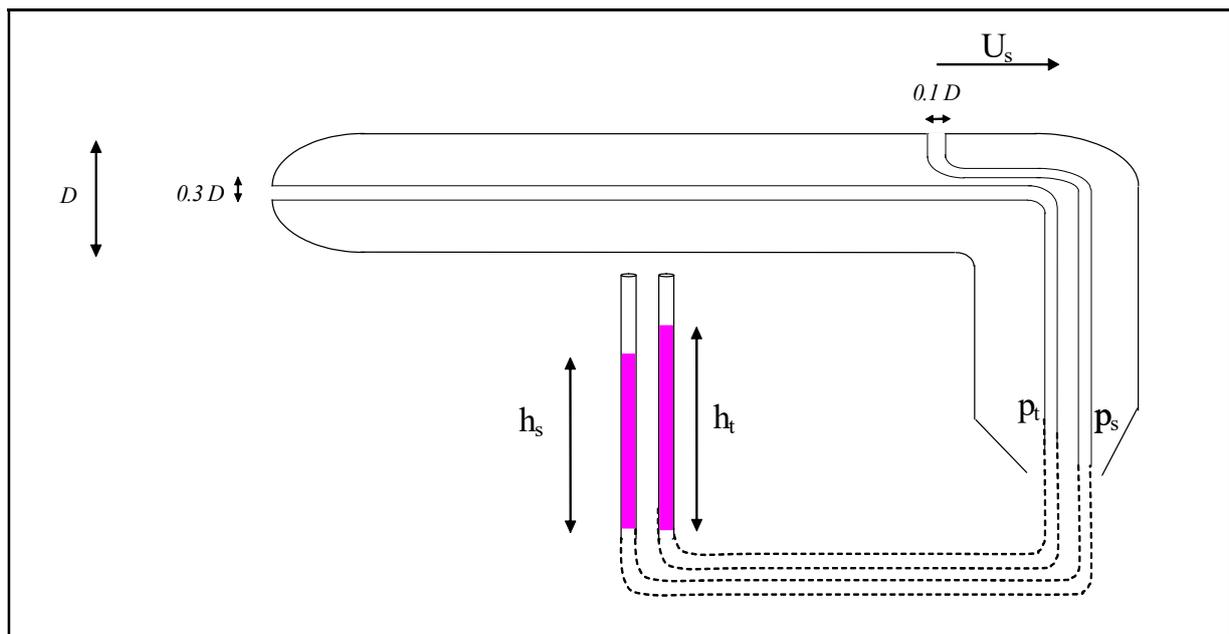


Figura 15. Geometria delle prese di pressione totale e statica in un tubo di Pitot.

dove il tubo di Pitot è orientato nel verso della corrente media e quindi le velocità si intendono in termini di componenti nella direzione del moto. Si noti che nel punto di ristagno la velocità è per definizione nulla, $u_t=0$, e quindi è possibile ottenere la pressione totale (o di ristagno) come

$$p_t = \frac{\rho u_s^2}{2} + p_s$$

dove il primo termine a secondo membro rappresenta la cosiddetta pressione dinamica e il secondo la pressione statica. Di conseguenza la velocità potrà essere ricavata come

$$u_s = \sqrt{\frac{2(p_t - p_s)}{\rho}} \quad (121)$$

La relazione precedente permette di ricavare la velocità dalla misura della differenza di pressione tra le due prese totale e statica. Tale misura può essere effettuata determinando la corrente elettrica che attraversa membrane deformabili aventi resistenza elettrica proporzionale alla deformazione, oppure più semplicemente collegando le uscite a due condotti manometrici, come mostrato in figura 15. In questo caso, applicando il bilanciamento idrostatico (29) del capitolo 2, si può scrivere

$$p_t - p_{t0} = \rho_m g h_t, \quad p_s - p_{s0} = \rho_m g h_s$$

(dove ρ_m indica la densità del fluido manometrico in generale differente da quella del fluido in moto e il pedice 0 indica le quantità calcolate con fluido a riposo), per ricavare quindi

$$u_s = \sqrt{\frac{2\rho_m g(h_t - h_s)}{\rho}} \quad (122)$$

da cui è possibile ricavare la velocità del fluido in prossimità della presa statica.

Nel caso in cui la velocità del fluido sia tale da non poter considerare valida l'ipotesi di incompressibilità, per trovare la pressione di ristagno, bisognerà partire dall'equazione di Bernoulli nella forma (121), assumendo quindi un flusso non viscoso, stazionario e isentropico. Nel punto di ristagno sarà (considerando che anche la densità è variabile)

$$\left(\frac{p}{\rho}\right)_t = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{u_s^2}{2} + \left(\frac{p}{\rho}\right)_s$$

da cui considerando che per un flusso isentropico $\rho = \left(\frac{p}{k}\right)^{1/\gamma}$

$$p_t^{(\gamma-1/\gamma)} = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right) \frac{u_s^2}{2k^{1/\gamma}} + p_s^{(\gamma-1/\gamma)}$$

e introducendo il numero di Mach, la velocità sarà $u_s^2 = c_s^2 Ma_s^2 = \gamma RT_s Ma_s^2$ e usando l'equazione di stato dei gas perfetti cosicché $\frac{RT_s}{k^{1/\gamma}} = p_s^{(\gamma-1/\gamma)}$, si ottiene

$$p_t = p_s \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) Ma_s^2 \right]^{\gamma/\gamma-1} \quad (123)$$

che costituisce la relazione per la pressione totale (o di ristagno) per il caso compressibile. Da questa espressione, misurando le pressioni p_t e p_s , posso trovare il numero di Mach e se voglio ricavare la velocità sarà necessaria la misura indipendente della temperatura T_s per ottenere la velocità del suono. Si noti che nella relazione precedente, se si effettua uno sviluppo in serie per bassi numeri di Mach ($Ma \rightarrow 0$) si ottiene

$$p_t \approx p_s \left[1 + \left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right) \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) Ma_s^2 + o(Ma_s^4) \right] \approx p_s \left(1 + \frac{u_s^2}{2RT_s} \right) = p_s + \frac{\rho_s u_s^2}{2}$$

cioè proprio la pressione totale ottenuta nel caso incompressibile. Si noti anche che per numeri di Mach crescenti la (124) fornisce un valore della pressione di ristagno sempre maggiore del caso incompressibile. In particolare se definiamo il coefficiente di pressione

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2}$$

dove il pedice ∞ si riferisce alle grandezze valutate nella corrente indisturbata (quindi anche in corrispondenza della presa statica), possiamo calcolarlo in corrispondenza del punto di ristagno ($p=p_t$) per ottenere nel caso incompressibile

$$(C_p)_R = \frac{p_t - p_s}{\frac{1}{2}\rho u_s^2} = 1,$$

mentre nel caso compressibile con numero di Mach molto elevato ($Ma \rightarrow \infty$), $(C_p)_R \rightarrow 2$ (quest'ultimo risultato si ricaverà nel capitolo 9 dedicato ai flussi compressibili).

La seconda applicazione dell'equazione di Bernoulli riguarda la misura di portata attraverso il cosiddetto tubo di Venturi (Giovanni Battista Venturi, 1746-1822). Con questo apparato si misura la portata in corrispondenza del restringimento di una sezione dell'impianto (come mostrato in figura 16). Può essere utilizzato sia per liquidi che per gas in condizioni incompressibili e compressibili. Nel caso incompressibile, nelle solite ipotesi in cui è valida l'equazione di Bernoulli nella forma (118), considerando anche la portata UA costante nelle sezioni 1 e 2 (essendo A l'area di ciascuna sezione), si ottiene la misura della velocità

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho U_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho U_2^2, \quad \frac{U_1}{U_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

$$U_2 = \left(\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho \left[1 - (A_2/A_1)^2 \right]} \right)^{\frac{1}{2}}$$

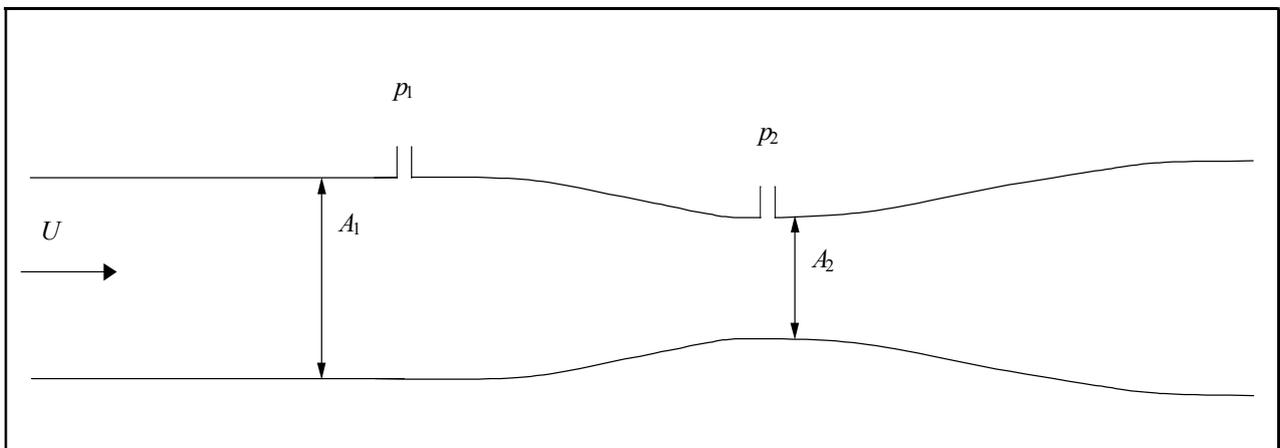


Figura 16. Tubo di Venturi.

Nella relazione precedente questa volta si effettuano due misure di pressione statica (ma le modalità sono equivalenti a quelle per il tubo di Pitot). Si può ottenere in maniera simile anche un'espressione per il caso compressibile.

5.4 EQUAZIONE PER IL POTENZIALE

Come visto, l'equazione di Bernoulli nelle ipotesi di flusso ad alto numero di Reynolds ($Re \rightarrow \infty$), senza trasmissione di calore, stazionario e isentropico, sostituisce sia l'equazione dell'energia che quella della quantità di moto. Ci si chiede allora come sia impostato in questo caso il sistema di equazioni e incognite, visto che in questa equazione compaiono come incognite sia la pressione che la densità. L'equazione che manca è ovviamente l'equazione di conservazione della massa, che, nel caso stazionario, ha la forma (66) qui riportata (avendo anche sviluppato il prodotto scalare)

$$\underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) = \rho \underline{\nabla} \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla} \rho = \mathbf{0}.$$

Il gradiente di densità può essere collegato a quello di pressione tramite la velocità del suono

$$\underline{\nabla} p = \underline{\nabla} \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) = c^2 \underline{\nabla} \rho$$

e quindi, utilizzando la (116) (irrotazionale e stazionario)

$$\underline{\nabla} \rho = -\frac{\rho}{2c^2} \underline{\nabla} u^2 - \frac{\rho}{c^2} \underline{\nabla} G$$

l'equazione di conservazione della massa si scrive come

$$\rho \underline{\nabla} \cdot \underline{u} - \frac{\rho}{2c^2} (\underline{u} \cdot \underline{\nabla} u^2) - \frac{\rho}{c^2} (\underline{u} \cdot \underline{\nabla} G) = \mathbf{0}.$$

che permette di eliminare la densità. Se la scriviamo per componenti

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{u_i u_k}{c^2} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{u_i}{c^2} \frac{\partial G}{\partial x_i} = \mathbf{0} \quad (124)$$

La (125) è un'equazione fortemente non lineare (addirittura al terzo ordine) pur essendo alle derivate del primo ordine. Inoltre sembrerebbe un'unica equazione scalare avente come incognite tutte e tre le componenti di velocità. Però per un campo irrotazionale esiste sempre la funzione scalare potenziale legata al campo dall'operatore gradiente (paragrafo 1.6 del capitolo 1), $\underline{u} = \underline{\nabla}\varphi$, e quindi possiamo sostituire nella (125) per ottenere

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial G}{\partial x_i} = \mathbf{0} \quad (125)$$

che è un'equazione nella sola incognita φ . Una volta ipoteticamente risolta questa equazione, si possono ottenere le componenti di velocità dall'operatore gradiente e con queste calcolare algebricamente il rapporto p/ρ dalla (121) qui riportata

$$u^2/2 + G + p/\rho \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) = k_2$$

dove la costante viene calcolata con i valori all'infinito come già fatto nelle applicazioni dell'equazione di Bernoulli.

La situazione però diventa particolarmente semplice nel caso incompressibile. Infatti in queste condizioni la velocità del suono (30) tende all'infinito e l'equazione (126) si riduce a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3^2} = \mathbf{0} \quad (126)$$

cioè l'equazione di Laplace (21), che è lineare nell'incognita potenziale di velocità. In questo caso anche l'equazione di Bernoulli si riduce alla forma più semplice (118). Questi campi di moto sono detti campi o flussi potenziali (o correnti euleriane di fluido ideale) e verranno considerati in maniera approfondita nel prossimo capitolo.

Capitolo 6

FLUSSI POTENZIALI O SOLUZIONI ESTERNE

6.1 FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Come visto al termine del capitolo precedente, nelle condizioni di moto in cui siano trascurabili gli effetti della compressibilità, lo studio dei moti irrotazionali si riduce alla risoluzione dell'equazione lineare di Laplace per la funzione potenziale (e quindi per le componenti di velocità, problema cinematico) e all'equazione, non lineare in forma algebrica, di Bernoulli nella forma più semplificata (118) per la pressione (problema dinamico). Poiché tali condizioni sono quelle che normalmente si incontrano lontano dalla superficie di corpi, per numeri di Reynolds sufficientemente elevati, lo studio di tali campi di moto si indica anche come relativo a soluzioni esterne per elevati numeri di Reynolds. Le incognite densità e temperatura sono invece costanti, imposte dalle condizioni al contorno o determinate dalle relazioni termodinamiche. L'equazione di Laplace è una sola equazione in una sola incognita e può essere risolta una volta che siano note le condizioni al contorno (si può dimostrare che in queste condizioni la soluzione è unica). In generale è possibile assegnare al contorno del dominio in cui scorre un fluido due tipi di condizioni: (Neumann & Dirichlet)

- una condizione dinamica, la quale richiede che il fluido non scivoli sul contorno solido, e che quindi la velocità relativa tra contorno e fluido si annulli nella superficie di contatto (aderenza). Questa condizione tiene conto degli effetti della viscosità del fluido.
- una condizione cinematica, che richiede che il contorno non possa essere attraversato dal fluido, e che quindi la componente normale della velocità sia nulla sul contorno (impermeabilità).

Nel caso in esame, essendo l'equazione di Laplace puramente cinematica, anche le condizioni al contorno che potremo imporre, dovranno essere puramente cinematiche e si utilizzerà quindi la condizione di impermeabilità. L'equazione di Laplace è del secondo ordine e le condizioni al

contorno imposte potranno essere due. Se consideriamo, ad esempio, il flusso attorno ad un corpo, si imporrà la condizione di impermeabilità sulla superficie del corpo e l'altra condizione sarà invece utilizzata per descrivere le caratteristiche del flusso lontano dal corpo. La prima condizione riguarda il valore della velocità del fluido ortogonale alla superficie del corpo, $\underline{u} \cdot \underline{n} = 0$ (essendo n la normale uscente dalla superficie), che, tradotta in termini di potenziale di velocità, diventa una condizione sulla derivata, $\underline{\nabla} \varphi \cdot \underline{n} = 0$, cioè $\partial \varphi / \partial n = 0$ (condizione alla Neumann, John von Neumann, nato János Neumann, 1903-1957). La seconda condizione riguarda invece la velocità del fluido lontano dal corpo, $u_1(\infty) = U_\infty$, e si traduce in una condizione sulla funzione potenziale, $\partial \varphi / \partial x(\infty) = U_\infty$, cioè $\varphi(\infty) = U_\infty x$ (condizione alla Dirichlet, Johann Peter Lejeune Dirichlet, 1805-1859).

La condizione di linearità dell'equazione risulta particolarmente utile perché permette la sovrapposizione di moti elementari differenti per costruire condizioni più complesse (nel caso non lineare delle equazioni di Navier-Stokes non vale ovviamente la sovrapposizione degli effetti).

D'altra parte il raggiungimento di questa equazione semplificata risulta ovvio qualora si consideri che per un moto irrotazionale esiste un potenziale e che se tale moto è anche incompressibile, annullandosi la divergenza della velocità, dovrà risultare proprio l'equazione di Laplace (come mostrato nel paragrafo 1.6 per ottenere la relazione (21)).

Quest'ultima considerazione può essere formulata in forma più generale. Infatti è sempre possibile scrivere un generico campo (in particolare quello di velocità) come la somma di due termini, il primo che rappresenta il gradiente di una funzione scalare (detto potenziale scalare) e il secondo che rappresenta il rotore di un campo vettoriale (detto potenziale vettore)

$$\underline{u} = \underline{\nabla} \varphi + \underline{\nabla} \times \underline{K} \quad (127)$$

dove per risolvere queste equazioni (cioè trovare i potenziali per un assegnato campo di velocità e viceversa) è necessario specificare un'ulteriore relazione per il vettore \underline{K} , di solito nella forma $\underline{\nabla} \cdot \underline{K} = 0$. Per definizione il primo termine nella (128) avrà rotore nullo e il secondo divergenza nulla. Così si possono scrivere la divergenza e il rotore del campo di velocità come

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} &= \nabla^2 \varphi \\ \underline{\nabla} \times \underline{u} &= \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{K}) - \nabla^2 \underline{K} = -\nabla^2 \underline{K} = \underline{\omega} \end{aligned}$$

da cui ricaviamo facilmente che se vale l'ipotesi di incompressibilità deve essere verificata l'equazione di Laplace per il potenziale scalare, mentre se vale l'irrotazionalità deve essere valida

l'equazione di Laplace per il potenziale vettore. Nel caso bidimensionale (2D), poiché non esistono la componente di velocità ortogonale al piano e le derivate in tale direzione, il potenziale vettore si riduce ad una sola componente, K_3 , cioè ad una funzione scalare detta funzione di corrente ed indicata con la lettera ψ .

L'ipotesi di irrotazionalità, che è alla base della teoria dei flussi potenziali, sebbene da un punto di vista formale sia sufficiente a impostare il problema, non è invece sufficiente da un punto di vista fisico né tanto meno ingegneristico. Per capire se essa sia applicabile nella risoluzione di un problema concreto, sarà necessario sapere sotto quali condizioni fisiche l'ipotesi ora formulata sia accettabile. L'irrotazionalità è un'ipotesi di carattere cinematico, quindi qualsiasi flusso di qualsiasi fluido può, in linea di principio, essere irrotazionale in qualche istante di tempo, ciò nondimeno, l'ipotesi è accettabile nell'affrontare un problema solo se il flusso rimane irrotazionale anche nel successivo sviluppo del fenomeno. Affinché un flusso irrotazionale rimanga tale è necessario che siano verificate le seguenti condizioni:

- *effetti della viscosità trascurabili* ($Re \gg 1$): solo in questo caso infatti gli sforzi sono ovunque ortogonali alla superficie su cui agiscono (si veda la relazione costitutiva) e non sono presenti azioni tangenziali che metterebbero in rotazione la particella fluida;
- *forze di massa dotate di potenziale*, in modo che la risultante della forza esterna sia applicata al centro di massa della particella fluida ed essendo il rotore delle forze uguale a zero non possono essere innescate rotazioni della particella stessa ;
- *fluido barotropico*, ovvero la densità ρ deve essere funzione solo della pressione p (isotermo, incompressibile o isentropico), e quindi $\nabla\rho \parallel \nabla p$, altrimenti il punto su cui vengono applicate le forze fluidodinamiche (determinato dalla distribuzione di pressione sulla superficie) potrebbe essere differente dal centro di massa (determinato dalla distribuzione di densità nel volume) e ciò potrebbe indurre rotazioni della particella fluida.

6.2 PRECISAZIONI SULLA FUNZIONE POTENZIALE DI VELOCITA'

Consideriamo in un campo irrotazionale, nel dominio di studio, una linea orientata, l , di elemento ds , che costituisce il bordo di una superficie S ed identifichiamo su tale linea due punti, \underline{x}_0 ed \underline{x} (come rappresentato in figura 17). La circolazione lungo tale linea è data da

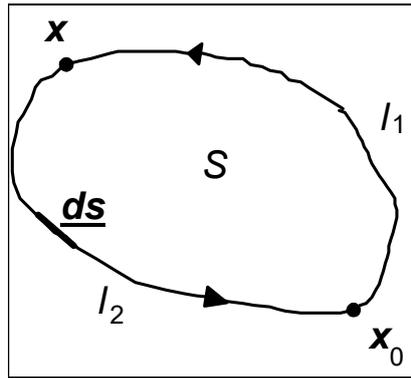


Figura 17. Integrale di linea e circolazione.

$$\Gamma = \oint_l \underline{u} \bullet \underline{ds} \quad (128)$$

esprimiamola per mezzo del teorema di Stokes (se il campo è semplicemente connesso)

$$\oint_l \underline{u} \bullet \underline{ds} = \int_S (\nabla \times \underline{u}) \bullet \underline{ndS} = \mathbf{0},$$

per l'ipotesi di irrotazionalità. L'integrale di linea può essere spezzato in due contributi, uno lungo la linea l_1 e l'altro lungo la linea l_2 (figura 17)

$$\mathbf{0} = \int_{x_0, l_1}^x \underline{u} \bullet \underline{ds} + \int_{x, l_2}^{x_0} \underline{u} \bullet \underline{ds} = \int_{x_0, l_1}^x \underline{u} \bullet \underline{ds} - \int_{x_0, l_2}^x \underline{u} \bullet \underline{ds}$$

Quindi l'integrale calcolato lungo la linea l_1 è uguale a quello calcolato lungo la linea l_2 . Avendo però scelto il circuito, l , e quindi l_1 e l_2 , in modo arbitrario, si può concludere che l'integrale, cioè la circolazione, è indipendente dal percorso scelto. In altre parole la quantità sotto il segno di integrale, $\underline{u} \bullet \underline{ds}$, è un differenziale esatto. Pertanto, fissato \underline{x}_0 , è univocamente definita la funzione

$$\varphi(\underline{x}) = \int_{x_0}^x \underline{u} \bullet \underline{ds}$$

detta appunto potenziale del campo di velocità, legata al campo di velocità dalla relazione $\underline{u} = \nabla \varphi$.

Infatti, essendo il potenziale un differenziale esatto, è possibile scrivere

$$d\varphi = \underline{u} \cdot \underline{ds} = u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + u_3 dx_3$$

ma essendo anche

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} dx_3$$

risulta proprio $\underline{u} = \nabla \varphi$. D'altra parte, questa funzione ha un significato fisico ben preciso perché la condizione $d\varphi=0$ corrisponde ad avere la velocità ortogonale localmente all'elemento ds della linea l . Di conseguenza le linee equipotenziali ($\varphi = \text{cost.}$) corrispondono a linee ortogonali localmente al campo di velocità.

Dalla (129), se non risulta la circolazione uguale a zero (anche in un campo irrotazionale), cioè nelle condizioni in cui non è valido il teorema di Stokes, allora il potenziale dipenderà dal percorso fatto e sarà quindi una funzione a più valori.

$$\int_{l_1} \underline{u} \cdot \underline{ds} = \int_{l_2} \underline{u} \cdot \underline{ds} + \Gamma \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 + \Gamma$$

6.3 FLUSSI POTENZIALI 3D

Flusso uniforme

Consideriamo un flusso uniforme ed indichiamo con U_∞ la velocità del fluido indisturbato. Dato un sistema di assi cartesiani orientato in modo che l'asse x_1 coincida con la direzione del flusso (come in figura 18), il vettore \underline{u} sarà $\underline{u} = (U_\infty, 0, 0)$

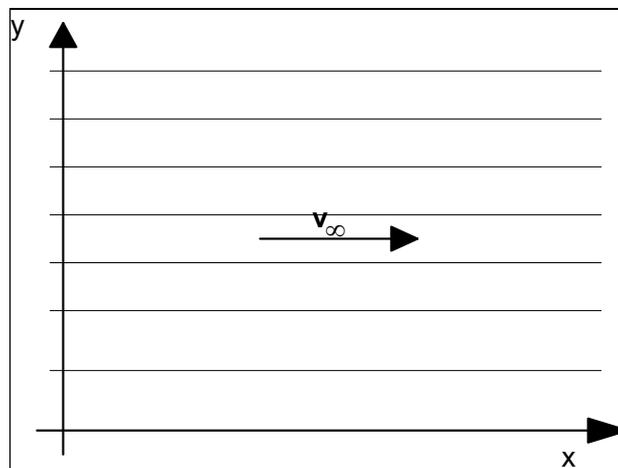


Figura 18. Flusso uniforme in flusso potenziale 3D.

Il campo di moto scelto è irrotazionale e il potenziale sarà dato da

$$\varphi = U_{\infty} x_1 + \text{cost} \quad (129)$$

la quale soddisfa in modo banale l'equazione di Laplace. Le superfici equipotenziali saranno in questo caso piani con coordinata $x_1 = \text{cost}$. Dall'equazione di Bernoulli nella forma (118) senza forze esterne, la pressione risulta ovunque uguale alla pressione di riferimento p_{∞} ($C_p \equiv 0$).

Sorgente o pozzo puntiforme

Immaginiamo che da un punto P del dominio esca (sorgente) o entri (pozzo) una portata volumetrica di fluido pari a m . Ovviamente il punto P sarà una discontinuità del campo perché in tale punto non vale l'equazione di conservazione della massa (non sarà quindi valido il teorema della divergenza). Possiamo però calcolare il flusso attraverso una qualsiasi superficie sferica, S , intorno a P avente normale uscente \underline{n} , che sarà proprio m

$$m = \int_S \underline{u} \cdot \underline{n} \, dS \quad (130)$$

Ci si riconduce in questo modo ad un problema a simmetria sferica nel quale l'unica grandezza geometrica definita è la distanza radiale, r , di P da un punto della superficie S . Dovrà quindi risultare che il potenziale e la velocità saranno solo funzione della coordinata r (in quanto non vi sono moti tangenziali o azimutali). In coordinate sferiche la funzione gradiente di velocità può essere scritta come

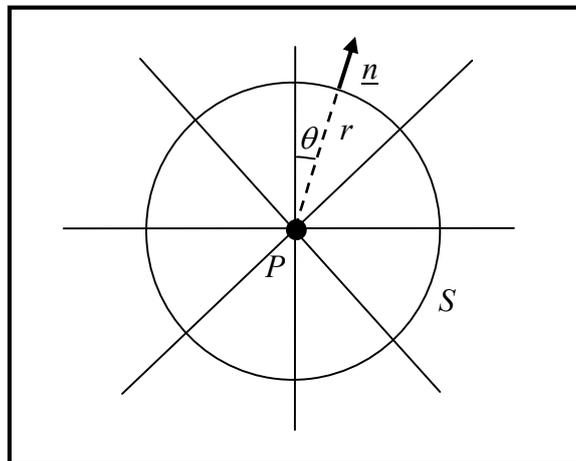


Figura 19. Sorgente o pozzo puntiforme in flusso potenziale 3D.

$$\underline{u} = \underline{\nabla}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \\ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\phi} \end{pmatrix} \quad (131)$$

essendo θ e Φ gli angoli tangenziale e azimutale, dato che l'elemento di volume ($dx_1 dx_2 dx_3$) viene sostituito da ($dr r d\theta r \sin\theta d\Phi$). Per la dipendenza puramente radiale, di queste tre componenti solo la prima sarà differente da zero. Di conseguenza anche la velocità avrà come unica componente differente da zero quella radiale (a sua volta funzione di r) e dalla (131)

$$m = \int_S \underline{u}(r) \bullet \underline{n} dS = u_r(r) 4\pi r^2$$

dalla quale si ricava immediatamente l'espressione della componente radiale della velocità

$$u_r = \frac{m}{4\pi r^2}$$

che decresce inversamente al quadrato della distanza. Il campo risultante si può verificare che è irrotazionale (tranne in P). Integrando la precedente si ottiene il potenziale

$$\varphi = -\frac{m}{4\pi r} + \text{cost} \quad (132)$$

che è anche soluzione dell'equazione di Laplace scritta in coordinate sferiche

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial\varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2} \quad (133)$$

Dipendendo φ solo da r , le superfici equipotenziali sono sfere concentriche centrate in P . Si osservi che per $m>0$ c'è un flusso volumetrico uscente dalle superfici che contornano P , quindi la discontinuità rappresenta una sorgente, mentre per $m<0$, il flusso è entrante e la discontinuità rappresenta un pozzo. Dall'equazione di Bernoulli, la pressione risulta una funzione crescente allontanandosi dal punto P (la velocità diminuisce) e $C_p \rightarrow 1$ per $r \rightarrow \infty$.

Semicorpo

Si consideri il campo ottenuto dalla sovrapposizione di una corrente uniforme ed una sorgente (che ovviamente sarà ancora soluzione dell'equazione di Laplace per la proprietà di linearità dell'equazione stessa) per il quale il potenziale sarà dato dalla somma delle (130) e (133)

$$\varphi = U_{\infty} r \cos \theta - \frac{m}{4\pi r} + \text{cost}$$

avendo scelto un sistema di coordinate sferiche, dalla (132) si ottiene per le componenti di velocità

$$\begin{cases} u_r = U_{\infty} \cos \theta + \frac{m}{4\pi r^2}; \\ u_{\theta} = -U_{\infty} \sin \theta \\ u_{\phi} = 0 \end{cases} \quad (134)$$

Con questa semplice sovrapposizione otteniamo che il campo simulato è quello di un semicorpo (come rappresentato in figura 20) che divide le linee tangenti al vettore velocità provenienti dall'infinito da quelle che passano per l'origine ove è posta la sorgente. A conferma della simmetria rispetto all'asse x_1 , risulta $u_{\theta}=0$ lungo l'asse di simmetria ($\theta = 0, \pi$). Come visto nel capitolo precedente, sono definiti punti di ristagno i punti in cui la velocità è nulla.

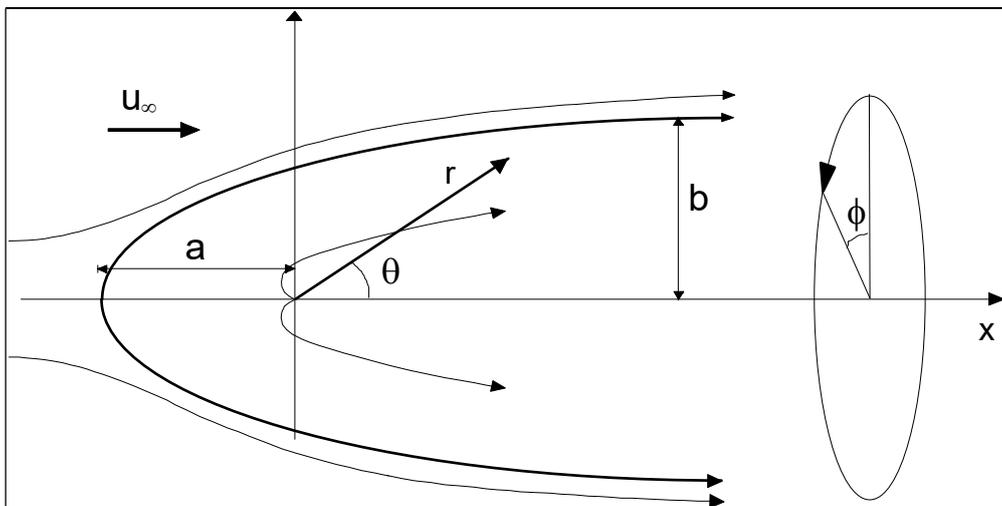


Figura 20. Semicorpo in flusso potenziale 3D.

Nel caso in esame si ha un solo punto di ristagno lungo l'asse x_1 , per $\theta = \pi$, ad una distanza, a , dall'origine, ottenuta annullando la u_r (l'unica componente differente da zero lungo l'asse)

$$a = \sqrt{\frac{m}{4\pi U_\infty}}$$

Il raggio b della sezione trasversale del semicorpo, per distanza assiale tendente all'infinito, si ottiene eguagliando la portata emessa dalla sorgente, m , con quella che attraversa tale sezione dove la velocità è uniforme, $\pi b^2 U_\infty$

$$m = \pi b^2 U_\infty \Rightarrow b = \sqrt{\frac{m}{\pi U_\infty}} = 2a$$

A parità della velocità uniforme, U_∞ , il semicorpo aumenta le sue dimensioni all'aumentare dell'intensità della sorgente e viceversa, a parità dell'intensità della sorgente, le dimensioni del corpo diminuiscono all'aumentare della velocità. Per quanto riguarda il campo di pressione, applicando il teorema di Bernoulli e usando le (135), si ricava

$$p = p_\infty - \frac{1}{2} \rho U_\infty^2 \left[\left(\frac{a}{r} \right)^4 + 2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \cos \theta \right]$$

da cui risulta che di fronte al semicorpo ($r=a$, $\theta=\pi$) la pressione di ristagno è proprio pari alla somma della pressione statica e dinamica e che $C_p=1$ (cioè proprio i valori di ristagno trovati per il tubo di Pitot nel paragrafo 5.3). Invece per $r \rightarrow \infty$, $p \rightarrow p_\infty$ e $C_p \rightarrow 0$. Inoltre, rispettando il bilanciamento tra energia cinetica e pressione, la pressione tende a diminuire lungo il semicorpo dove invece la velocità aumenta. Per esempio nel punto $r=a$, $\theta=\pi/2$ la pressione è pari alla differenza tra pressione statica e dinamica e $C_p=-1$. Questo tipo di andamento (velocità crescente e pressione decrescente) è quello che si riscontra nella parte anteriore di tutti i corpi sia nel caso dei flussi potenziali che reali (le differenze sostanziali sul campo di pressione si avranno nella scia dei corpi).

Corpo chiuso

In maniera analoga al caso precedente, se si sovrappone ad una corrente uniforme una sorgente, S , ed un pozzo, P , di eguale intensità, posti ad una distanza d , si simula un flusso attorno ad un corpo chiuso. Con riferimento alla figura 21, si ottiene:

$$\varphi = U_{\infty} x_1 - \frac{m}{4\pi r_s} + \frac{m}{4\pi r_p} + \cos t$$

dove

$$\begin{cases} r_s = \sqrt{\left(x_1 + \frac{d}{2}\right)^2 + x_2^2} \\ r_p = \sqrt{\left(x_1 - \frac{d}{2}\right)^2 + x_2^2} \end{cases}$$

sostituendo le espressioni di r_s ed r_p e calcolando il gradiente si ottiene la velocità

$$u_1 = U_{\infty} + \frac{m(x_1 + d/2)}{4\pi r_s^3} - \frac{m(x_1 - d/2)}{4\pi r_p^3}, \quad u_2 = \frac{mx_2}{4\pi r_s^3} - \frac{mx_2}{4\pi r_p^3}$$

In generale si simula un corpo chiuso utilizzando pozzi e sorgenti tali che abbiano somma algebrica delle intensità eguale a zero, mentre si simula un corpo aperto se tale somma è diversa da zero.

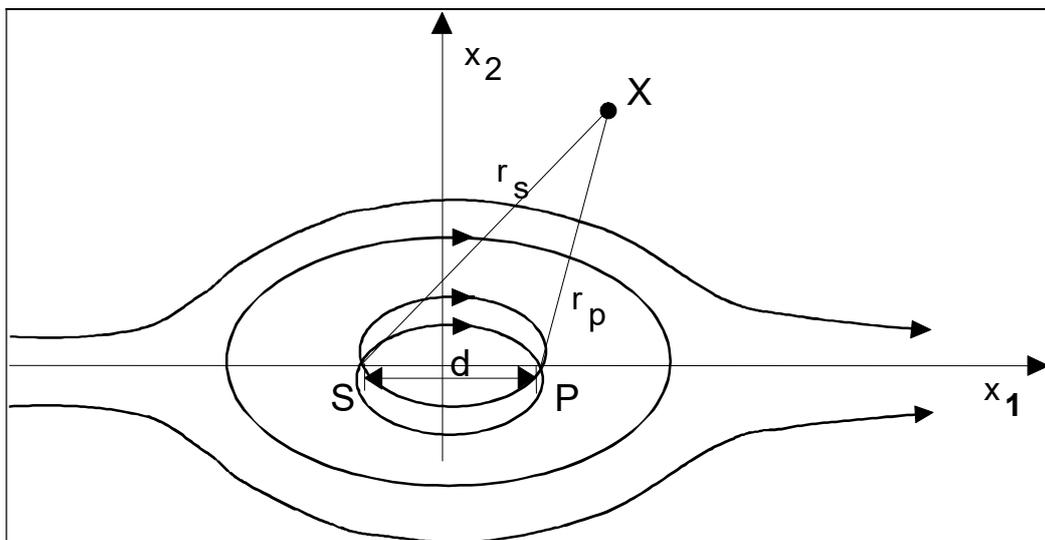


Figura 21. Corpo chiuso in flusso potenziale 3D.

Paradosso di D'Alembert

Si riporta solo l'enunciato senza la dimostrazione di un paradosso dovuto a Jean-Baptiste Le Rond d'Alembert (1717-1783): la risultante delle forze fluidodinamiche agenti su di un corpo chiuso da una corrente euleriana di fluido ideale (flusso potenziale) è nulla. Sebbene riferito ad una condizione ideale questo paradosso trova applicazione nel mondo reale per quei casi in cui le velocità in gioco siano molto basse (moti laminari). Per esempio un rimorchiatore riesce a spostare a bassa velocità una nave di massa molto maggiore minimizzando le resistenze fluidodinamiche.

6.4 FLUSSI POTENZIALI 2D: PRECISAZIONI SULLA FUNZIONE DI CORRENTE

Come visto nel paragrafo 6.1, accanto al potenziale scalare è possibile definire un potenziale vettore che nell'ipotesi di irrotazionalità soddisferà l'equazione di Laplace. Nel caso bidimensionale questo potenziale si riduce ad una funzione scalare detta funzione di corrente. Consideriamo in un campo incompressibile sul piano (x_1, x_2) , una linea chiusa orientata l , e due punti, \underline{x}_0 ed \underline{x} , su di essa come rappresentato in figura 22. Grazie all'ipotesi di incomprimibilità ed al teorema di Green, si può scrivere

$$0 = \int_S \underline{\nabla} \cdot \underline{u} \, dS = \oint_l \underline{u} \cdot \underline{n} \, dl \quad (135)$$

(essendo \underline{n} la normale a dl) e spezzando l'integrale in due parti

$$0 = \oint_l \underline{u} \cdot \underline{n} \, dl = \int_{x_0, l_1}^x \underline{u} \cdot \underline{n} \, dl + \int_{x, l_2}^{x_0} \underline{u} \cdot \underline{n} \, dl$$

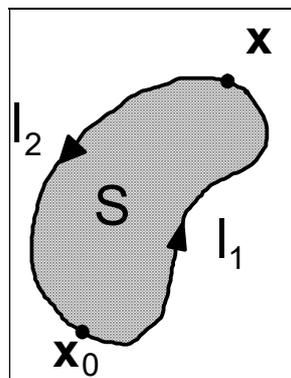


Figura 22. Linea orientata in flusso piano incompressibile.

La relazione precedente può anche essere riscritta come

$$\int_{x_0, l_1}^x \underline{u} \bullet \underline{n} dl = \int_{x_0, l_2}^x \underline{u} \bullet \underline{n} dl,$$

che stabilisce che il flusso attraverso una linea l dipende solo dagli estremi e non dalla forma della linea stessa. Quindi, essendo l'integrale indipendente dal percorso seguito, il differenziale $\underline{u} \bullet \underline{n} dl$ è esatto. Fissato \underline{x}_0 , possiamo definire la funzione di corrente,

$$\psi(\underline{x}) = \int_{x_0}^x \underline{u} \bullet \underline{n} dl \quad (136)$$

Per trovare il legame con la velocità del fluido, essendo un differenziale esatto, è possibile scrivere

$$d\psi = \underline{u} \bullet \underline{n} dl = u_1 n_1 dl + u_2 n_2 dl = u_1 \cos \theta dl + u_2 \sin \theta dl = u_1 dx_2 - u_2 dx_1$$

ma essendo anche

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} dx_2$$

risulta

$$\begin{cases} u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \\ u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \end{cases} \quad (137)$$

In coordinate polari sarà

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \quad (138)$$

Anche questa funzione, come il potenziale scalare, ha un significato fisico ben preciso perché la condizione di linea di corrente, $d\psi=0$, $\psi=cost.$, corrisponde ad avere $\underline{u} \bullet \underline{n} dl=0$, cioè

$$d\psi = -u_2 dx_1 + u_1 dx_2 = 0 \Rightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{u_2}{u_1}$$

cioè le linee di corrente sono tangenti localmente al vettore velocità. Se prendiamo quindi due linee di corrente il flusso non potrà attraversarle e quindi il flusso attraverso di esse sarà nullo. Di conseguenza, essendo il fluido incompressibile, dalle (136) e (137) la differenza tra i valori della funzione di corrente tra queste due linee rappresenterà proprio il flusso (cioè la portata di fluido) attraverso tali linee, $d\psi=dQ$.

Confrontando le relazioni (138) con quelle che legano il potenziale alla velocità, si può facilmente ricavare che $\underline{\nabla}\varphi \bullet \underline{\nabla}\psi=0$ (relazioni di Cauchy-Riemann, Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826-1866) di conseguenza le linee iso-potenziale sono ortogonali alle linee di corrente.

6.5 FLUSSI POTENZIALI 2D

Flusso uniforme

Come nel caso 3D, consideriamo un flusso uniforme ed indichiamo con U_∞ la velocità del fluido indisturbato. Dato un sistema di assi cartesiani orientato in modo che l'asse x_1 coincida con la direzione del flusso, il vettore \underline{u} sarà $\underline{u}=(U_\infty, 0)$ (moto irrotazionale) e il potenziale e la funzione di corrente saranno dati da

$$\begin{aligned} \varphi &= U_\infty x_1 + cost \\ \psi &= U_\infty x_2 + cost \end{aligned} \tag{139}$$

che soddisfano l'equazione di Laplace. Le superfici equipotenziali saranno linee con coordinata $x_1=cost.$, mentre le linee di corrente saranno linee $x_2=cost.$, coincidenti con la tangente al vettore velocità (si veda la figura 18). Dall'equazione di Bernoulli nella forma (118) senza forze esterne, la pressione risulta ovunque uguale alla pressione di riferimento p_∞ ($C_p=0$).

Sorgente o pozzo lineare

Anche in questo caso, come nel caso 3D, immaginiamo che da un punto P del piano esca (sorgente) o entri (pozzo) una portata volumetrica di fluido pari a m . Il punto P sarà una discontinuità del campo. Possiamo però calcolare il flusso attraverso una qualsiasi superficie circolare di raggio r intorno a P avente normale uscente \underline{n} , che sarà proprio m

$$m = \oint \underline{u} \cdot \underline{n} \, dl$$

Ci si riconduce in questo modo ad un problema a simmetria circolare nel quale l'unica grandezza geometrica definita è la distanza radiale, r . Dovrà quindi risultare che il potenziale, la funzione di corrente e la velocità saranno solo funzione della coordinata r (in quanto non vi sono moti tangenziali) e l'unica componente differente da zero sarà la $u_r(r)$. Si potrà quindi scrivere

$$m = \oint \underline{u}(r) \cdot \underline{n} \, dl = u_r(r) 2\pi r$$

dalla quale si ricava immediatamente l'espressione della componente radiale della velocità

$$u_r = \frac{m}{2\pi r}$$

che decresce inversamente alla distanza. Il campo risultante si può verificare che è irrotazionale (tranne in P). Integrando la precedente si ottengono il potenziale e la funzione di corrente

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{m}{2\pi} \ln(r) + \text{cost} \\ \psi &= \frac{m}{2\pi} \theta + \text{cost} \end{aligned} \tag{140}$$

che sono anche soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate cilindriche (134). Dipendendo il potenziale solo da r , le superfici equipotenziali sono circonferenze concentriche centrate in P , mentre le linee di corrente sono linee radiali ($\theta = \text{cost.}$) dal punto P (figura 19). Anche in questo caso il segno di m determina se il flusso è uscente (sorgente) o entrante (pozzo). Dall'equazione di Bernoulli, la pressione risulta una funzione crescente allontanandosi dalla sorgente o dal pozzo (la velocità diminuisce) e $C_p \rightarrow 1$ per $r \rightarrow \infty$.

Vortice

Si consideri un dominio bidimensionale irrotazionale con un punto centrale P intorno al quale la circolazione sia differente da zero. Ovviamente il punto P sarà una discontinuità del campo perché in tale punto non vale il teorema di Stokes (la vorticità nel solo punto P sarà differente da zero). Possiamo calcolare la circolazione, Γ (per la regola della mano destra, la circolazione è positiva in senso antiorario), intorno a P lungo una circonferenza di raggio r , imponendo che il campo di velocità tangenziale sia dipendente solo da r (essendo il problema a simmetria cilindrica)

$$\Gamma = \oint \underline{u} \bullet d\underline{l} = 2\pi r u_\theta(r)$$

da cui,

$$u_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad (141)$$

inoltre, per costruzione, dovendo il flusso di massa essere nullo attorno a P $u_r(r)=0$. Il potenziale e la funzione di corrente si ottengono per integrazione delle (132) e (139)

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + \text{cost} \\ \psi &= -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) + \text{cost} \end{aligned} \quad (142)$$

che sono entrambe soluzioni dell'equazione di Laplace in coordinate cilindriche e sono esattamente invertiti rispetto alle espressioni (141) trovate nel caso di una sorgente (o pozzo) bidimensionale. Le linee potenziali sono quindi linee radiali ($\theta = \text{cost.}$), mentre le linee di corrente sono circonferenze centrate nell'origine ($\psi = \text{cost.} \Rightarrow \ln(r) = \text{cost.}, r = \text{cost.}$) ed il modulo della velocità cresce indefinitamente man mano che ci si avvicina ad essa come rappresentato in figura 23 a sinistra. Il segno di Γ determina il verso di rotazione del vortice. Dall'equazione di Bernoulli, la pressione risulta una funzione crescente allontanandosi dal centro del vortice (la velocità diminuisce) e $C_p \rightarrow 1$ per $r \rightarrow \infty$. In un vortice reale la velocità avrebbe l'andamento dato dalla (142) nella parte esterna mentre nella parte interna avrebbe un andamento lineare (rotazione rigida per effetto della viscosità) come rappresentato in figura 23 a destra. Infatti, l'unica componente della vorticità del campo potenziale (142), ω_3 , in coordinate polari, sarà data da

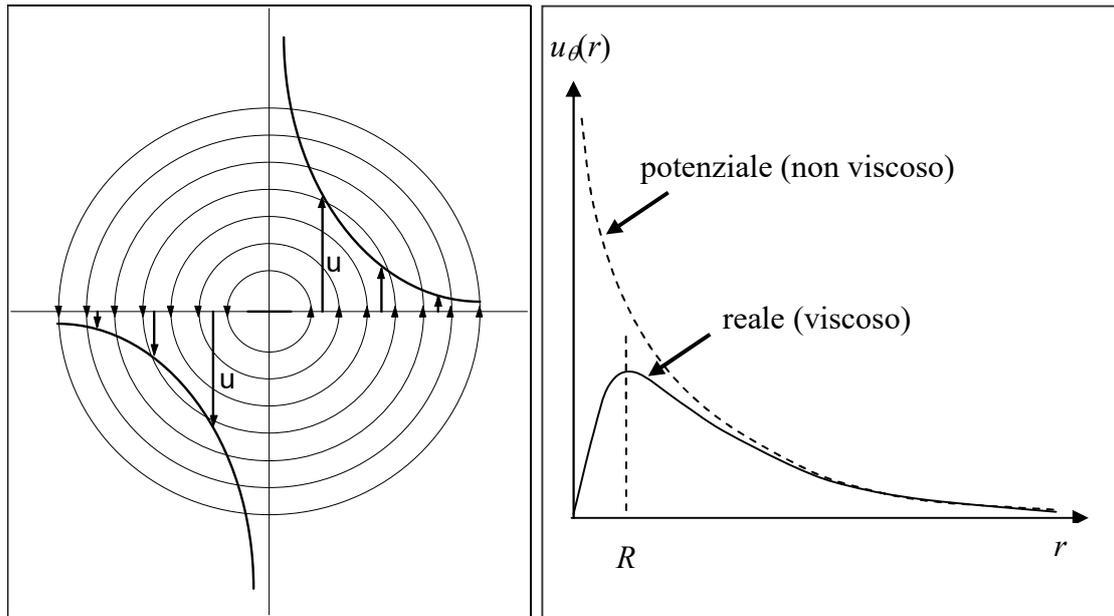


Figura 23. Soluzione vortice in flusso potenziale 2D (a sinistra) e sovrapposizione delle soluzioni potenziale e reale per la componente di velocità tangenziale (a destra).

$$\omega_3 = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (ru_\theta) - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Gamma}{2\pi} \right) = 0$$

cioè come detto esiste una circolazione differente da zero anche se la vorticità è nulla e il teorema di Stokes non è valido perché c'è una "lacuna" al centro del vortice che lo crea (in altre parole ci deve essere un qualche meccanismo "viscoso" al centro del vortice che ha messo in rotazione il campo di moto). Questa "lacuna" corrisponde ad un nucleo rigido, di raggio R , dove gli effetti della viscosità sono importanti. In tale zona la velocità avrà un andamento del tipo

$$u_\theta(r) = \text{cost.} \times r = \frac{\Gamma}{2\pi R^2} r$$

e la vorticità sarà

$$\omega_3 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Gamma}{2\pi R^2} r^2 \right) = \frac{\Gamma}{\pi R^2}$$

cioè è una costante. Il teorema di Stokes, valutato su una circonferenza di raggio R , fornisce per questo campo di vorticità nella "lacuna" proprio il valore di Γ e risulta quindi verificato.

Doppietta

Siano dati una sorgente ed un pozzo di pari intensità, m , posti, rispettivamente, nell'origine e ad una distanza δ dall'origine lungo l'asse x . Il potenziale del campo di velocità in un generico punto P può essere ottenuto grazie al principio di sovrapposizione degli effetti come la somma dei due contributi (141)

$$\varphi = \varphi_s + \varphi_p = \frac{m}{2\pi} \ln(r) - \frac{m}{2\pi} \ln(r')$$

dove r e r' sono le distanze del punto P dalla posizione della sorgente e del pozzo. Se definiamo la funzione $F(\delta) = \frac{m}{2\pi} \ln(r'(\delta))$, possiamo scrivere i due potenziali di sorgente e pozzo come $\varphi_s = F(0)$ e $\varphi_p = -F(\delta)$, infatti $r' = \sqrt{(x-\delta)^2 + y^2}$ e $r = r'(0) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Definiamo inoltre momento della coppia sorgente-pozzo il prodotto $M = m \delta$. La doppietta è definita come il limite per $\delta \rightarrow 0$ della coppia sorgente-pozzo, con la condizione che il suo momento, M , venga mantenuto costante

$$\varphi = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\varphi_s + \varphi_p]_{M=\text{cost.}}$$

Per calcolare questo limite, esprimiamo il potenziale del pozzo per mezzo di uno sviluppo in serie di Taylor al prim'ordine

$$\varphi_p = -F(\delta) = -F(0) - \left. \frac{\partial F}{\partial r'} \frac{\partial r'}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} \delta + \dots = -\frac{m}{2\pi} \ln(r) - \frac{m}{2\pi} \frac{(\delta-x)}{r'} \Big|_{\delta=0} \delta + \dots = -\frac{m}{2\pi} \ln(r) + \frac{m\delta}{2\pi r} \frac{x}{r} + \dots$$

e sostituiamo

$$\varphi = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[F(0) + \left(-F(0) + \frac{M}{2\pi} \frac{x}{r^2} \right) \right]_{M=\text{cost.}},$$

ottenendo infine (essendo $r \cos\theta = x$) la soluzione dell'equazione di Laplace in coordinate cilindriche detta doppietta

$$\varphi = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{r^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{\cos\theta}{r} + \text{cost} \quad (143)$$

(essendo θ l'angolo che definisce la posizione di P insieme alla coordinata radiale r). Da quest'ultima si ricava l'espressione della velocità

$$\begin{cases} u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{M \cos \theta}{2\pi r^2} \\ u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{M \sin \theta}{2\pi r^2} \end{cases} \quad (144)$$

ed infine dalle (138) si ricava l'espressione della funzione di corrente (ovviamente anch'essa soluzione dell'equazione di Laplace)

$$\psi = -\frac{M \sin \theta}{2\pi r} + \cos t \quad (145)$$

Le linee di corrente si ottengono ponendo $\psi = k$ (in k è compresa anche la costante additiva)

$$\psi = -\frac{M}{2\pi r} \sin \theta = k$$

e moltiplicando per r^2 e dividendo per la costante si ha

$$r^2 + \frac{M}{2\pi k} r \sin \theta = 0$$

ovvero

$$x^2 + y^2 + \frac{M}{2\pi k} y = 0 \quad (146)$$

la quale rappresenta un fascio di circonferenze che passano per l'origine e con il centro sull'asse delle y , come rappresentato in figura 24. Le linee equipotenziali saranno ortogonali a queste e quindi un fascio di circonferenze con centro sull'asse delle x (ruotato di 90° rispetto alle precedenti). La configurazione ruota tutta di 90° se la doppietta è separata lungo l'asse y invece che lungo x . Dall'equazione di Bernoulli, la pressione risulta una funzione crescente allontanandosi dal centro della doppietta (la velocità diminuisce) e $C_p \rightarrow 1$ per $r \rightarrow \infty$.

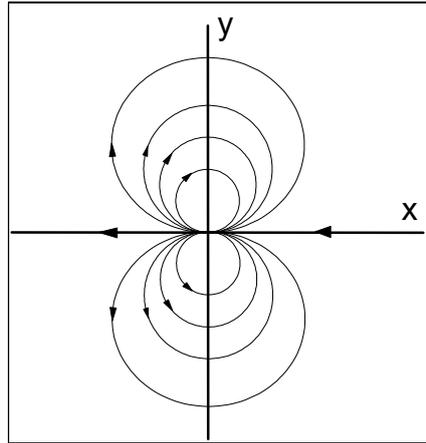


Figura 24. Soluzione doppietta in flusso potenziale 2D: linee di corrente per separazione lungo l'asse x.

Cilindro investito da una corrente uniforme

Il flusso attorno ad un cilindro, di raggio R , investito da una corrente uniforme, U_∞ , si ottiene sommando una doppietta ed una corrente uniforme. Per dimostrare questo fatto dobbiamo verificare che l'equazione di Laplace sia soddisfatta e che lo siano anche le condizioni al contorno che saranno di impermeabilità sul cilindro e di corrente indisturbata all'infinito. Il primo requisito è soddisfatto in modo banale essendo l'equazione di Laplace lineare, quindi la somma di due funzioni che soddisfano l'equazione di Laplace soddisfa a sua volta questa equazione. Per verificare le condizioni al contorno sul cilindro esaminiamo la funzione di corrente di questo problema ottenuta sommando la (140) e (146)

$$\psi = \psi_u + \psi_d = U_\infty y - \frac{M}{2\pi r} \sin\theta + \cos t = U_\infty \left(r - \frac{M}{2\pi U_\infty r} \right) \sin\theta + \cos t$$

che, se definiamo $R^2 = \frac{M}{2\pi U_\infty}$, diventa

$$\psi = U_\infty \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \sin\theta + \cos t = U_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) y + \cos t \quad (147)$$

È facile osservare che per $r=R$ la funzione di corrente è costante ($d\psi=0$), quindi la circonferenza di raggio R è una linea di corrente. Il campo di velocità così generato soddisfa quindi la condizione di impermeabilità su di un cilindro di raggio R . Calcoliamo il potenziale ed il campo di velocità

$$\varphi = \varphi_u + \varphi_d = U_\infty x + \frac{M}{2\pi r} \cos \theta + \cos t = U_\infty \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta + \cos t = U_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) x + \cos t$$

$$\begin{cases} u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = U_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -U_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta \end{cases} \quad (148)$$

dalle quali si verifica che effettivamente sulla superficie del cilindro ($r=R$) la velocità radiale si annulla (ma non quella tangenziale). Nel limite di $r \rightarrow \infty$ il contributo della doppietta tende a zero e la velocità tende a quella del flusso indisturbata, come richiede la condizione al contorno all'infinito (le linee di corrente saranno parallele all'asse x). In conclusione, sia l'equazione differenziale che le condizioni al contorno sono soddisfatte, quindi la sovrapposizione di un flusso uniforme e di una doppietta rappresenta effettivamente un cilindro di raggio R investito da una corrente uniforme. In figura 25 viene mostrata la configurazione delle linee di corrente risultanti. È interessante studiare le condizioni sulla superficie del cilindro, la velocità è

$$\begin{cases} u_r(R) = 0 \\ u_\theta(R) = -2U_\infty \sin \theta \end{cases}$$

Quindi i due punti di ristagno (paragrafo 5.3) si trovano entrambi sull'asse delle x nei punti posteriore e anteriore individuati da $\theta=0, \pi$. La velocità assume invece il suo valore massimo in corrispondenza di $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3/2\pi$, dove ha un valore doppio di quello del flusso indisturbato.

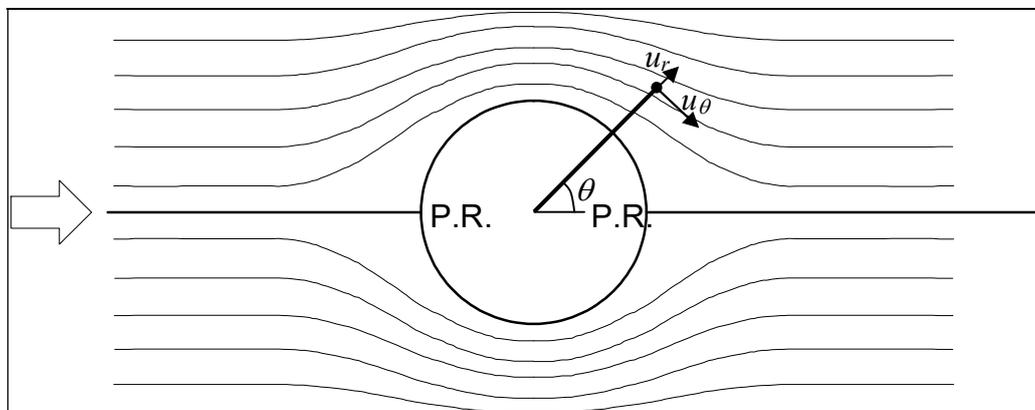


Figura 25. Linee di corrente per un cilindro in corrente uniforme in flusso potenziale 2D.

La distribuzione delle pressioni nel campo può essere ricavata dall'equazione di Bernoulli. Sul cilindro la pressione sarà massima nei punti di ristagno (pari alla pressione totale), mentre assumerà il suo valore minimo in corrispondenza dei punti nei quali la velocità è massima. Sempre essendo valida l'equazione di Bernoulli nella sua forma più semplice (118) senza forze di massa, il coefficiente di pressione potrà essere scritto semplicemente attraverso la velocità

$$C_p = \frac{P - P_\infty}{1/2 \rho U_\infty^2} = 1 - \left(\frac{u}{U_\infty} \right)^2 \quad (149)$$

Sostituendo l'espressione per il modulo della velocità ottenuta nella (149) si ottiene l'andamento in tutto il campo. Se in particolare calcoliamo questo coefficiente sulla superficie del cilindro, si ottiene l'andamento rappresentato in figura 26

$$C_p = 1 - 4\text{sen}^2\theta \quad (150)$$

da cui si ritrova che nei punti di ristagno $C_p=1$, che nel punto di massima velocità e minimo di pressione $C_p=-3$ e che ci sono quattro punti sulla superficie dove il coefficiente si annulla ($\theta = \pm\pi/6$ e $\theta = \pm5/6\pi$). Nella parte destra della figura 26 è anche rappresentato il confronto tra l'andamento nel fluido ideale e quello del caso di flusso reale viscoso (laminare), dove l'attrito impedisce di alla velocità di aumentare fino a $2U_\infty$ e alla pressione di decrescere fino a $C_p=-3$; manca inoltre il completo recupero di pressione nella scia.

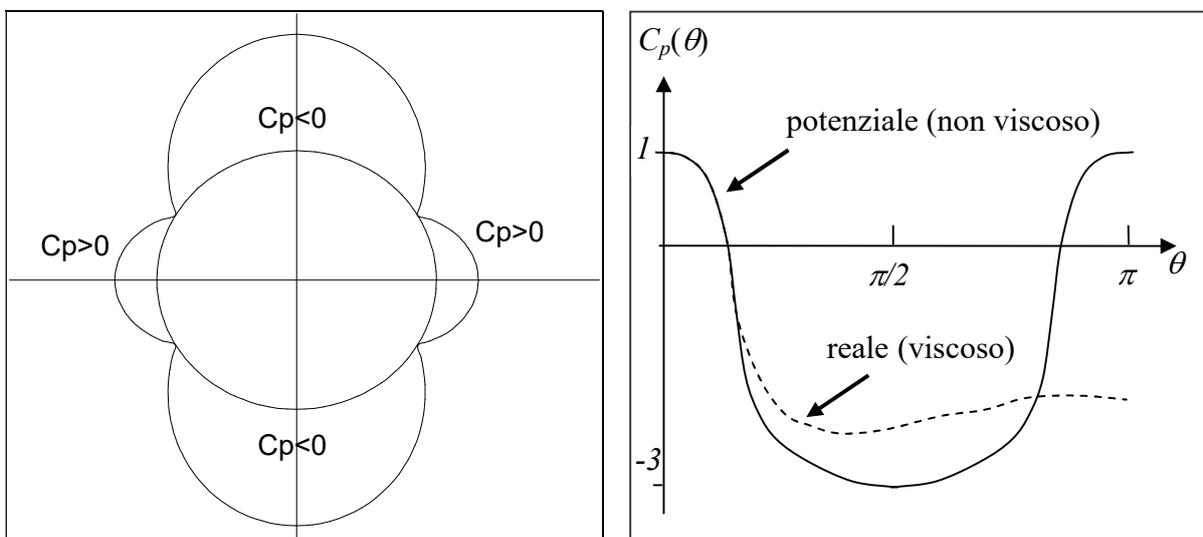


Figura 26. Andamento del coefficiente di pressione intorno ad un cilindro in corrente uniforme in flusso potenziale 2D.

Nelle ipotesi adottate per lo studio dei flussi potenziali, essendo trascurabili gli effetti della viscosità, le uniche tensioni in gioco sono quelle normali, descritte dal campo di pressione. Come mostrato nel paragrafo 2.2, integrando tale andamento moltiplicato per la normale uscente al cilindro su tutta la superficie del cilindro si ottiene la forza risultante sul cilindro stesso

$$\underline{F} = -\iint_S p \underline{n} dS = \begin{cases} -\iint_S p \cos \theta dS \\ -\iint_S p \sin \theta dS \end{cases} \quad (151)$$

Nel caso ideale, dalle (151) non risulterà alcuna forza (in effetti la situazione è simmetrica), risultando quindi verificato per questo corpo particolare il paradosso di d'Alembert, mentre nel caso reale ci sarà una risultante diversa da zero lungo x detta resistenza di pressione o di forma.

Cilindro in rotazione investito da una corrente uniforme

Aggiungiamo al campo studiato nel paragrafo precedente un vortice con circolazione Γ (circolazione antioraria) centrato nell'origine. Come visto nel paragrafo sul vortice, possiamo immaginare che questa circolazione sia generata, attraverso la viscosità, dalla rotazione del cilindro intorno al suo asse. In questa schematizzazione naturalmente la viscosità non può essere introdotta, possiamo però immaginare di rappresentarne globalmente gli effetti, introducendo un vortice elementare. Il potenziale e la funzione di corrente saranno quindi la somma delle (140), (143) e (146)

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_u + \varphi_d + \varphi_v = U_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) x + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta + \cos t \\ \psi = \psi_u + \psi_d + \psi_v = U_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) y - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) + \cos t \end{cases} \quad (152)$$

e il campo di velocità

$$\begin{cases} u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = U_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -U_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \quad (153)$$

Rispetto al caso precedente del cilindro non rotante, si noti che la presenza del vortice ha cambiato la componente tangenziale di velocità ma ha lasciato inalterata quella radiale. La circonferenza data

da $r = R$ è ancora una linea di corrente, e l'effetto del vortice tende a zero quando $r \rightarrow \infty$, dunque le condizioni al contorno sono ancora soddisfatte. Sulla superficie del cilindro la velocità è data da

$$\begin{cases} u_r(R) = 0 \\ u_\theta(R) = -2U_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \end{cases} \quad (154)$$

I punti di ristagno si ottengono imponendo che la componente di velocità tangenziale si annulli,

$$\sin\theta = \frac{\Gamma}{4\pi R U_\infty}$$

La soluzione di questa equazione non è unica. Esistono 2 soluzioni se $\Gamma < (4\pi R U_\infty)$ (con Γ negativo cioè in verso orario questi angoli θ sono compresi tra π e 2π , come rappresentato in figura 27), ne ha una sola se $\Gamma = (4\pi R U_\infty)$ (le due soluzioni di figura 27 tendono ad un'unica con $\theta = -\pi/2$), mentre non ne ha nessuna se $\Gamma > (4\pi R U_\infty)$ (il punto di ristagno è fuori dal cilindro). In assenza di circolazione (cilindro non rotante, $\Gamma = 0$) i due punti di ristagno si troverebbero sui lati opposti come già trovato per il caso non rotante. L'aver introdotto una circolazione differente da zero ha portato un potenziale a più valori con più soluzioni possibili (si veda il paragrafo 6.2). Ovviamente non è valido il teorema di Stokes come nel caso del vortice isolato (questo significa che le soluzioni dell'equazione di Laplace in regioni non semplicemente connesse nel caso 2D non sono univoche, mentre lo sono in 3D). Si noti che la circolazione non compare nelle condizioni al contorno.

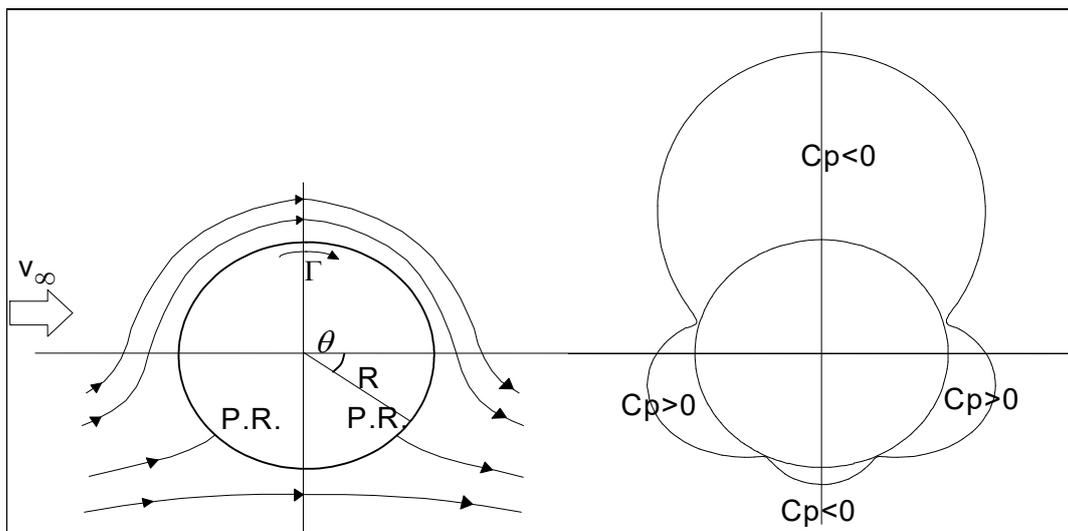


Figura 27. Andamento delle linee di corrente (a sinistra) e del coefficiente di pressione (a destra) intorno ad un cilindro rotante in corrente uniforme in flusso potenziale 2D.

Come per il cilindro non rotante, attraverso il campo di velocità è possibile determinare il campo di pressione attraverso il teorema di Bernoulli e la conseguente relazione (150). In particolare, sulla superficie del cilindro, la pressione e il coefficiente di pressione risulteranno pari a

$$p(R) = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 \left(1 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2 U_{\infty}^2} + 2 \frac{\Gamma}{\pi R U_{\infty}} \operatorname{sen} \theta \right)$$

$$C_p(R) = 1 - \left(\frac{u}{U_{\infty}} \right)^2 = 1 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2 U_{\infty}^2} + 2 \frac{\Gamma}{\pi R U_{\infty}} \operatorname{sen} \theta$$

che contiene due termini aggiuntivi rispetto al caso non rotante. La distribuzione del coefficiente di pressione risultante è mostrata nella figura 27 a destra, nella quale si nota una larga zona di depressione nella parte superiore e una piccola zona di sovrappressione nella parte inferiore. Questa asimmetria della distribuzione lungo l'asse verticale darà presumibilmente origine ad una forza. Si noti che nel caso di flusso reale, la distribuzioni di pressioni lungo la verticale non viene molto alterata (mentre lo è lungo l'orizzontale come visto per il cilindro non rotante) e quindi il risultato trovato resta pienamente valido.

La risultante delle azioni che il fluido esercita su di un corpo dalla (152) sarà ottenuta sostituendo l'espressione della pressione sulla superficie del cilindro appena trovata

$$\underline{F} = -\rho \int_0^{2\pi} \left(\frac{p_{\infty}}{\rho} + \frac{U_{\infty}^2}{2} - 2U_{\infty}^2 \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 R^2} + \frac{\Gamma U_{\infty}}{\pi R} \operatorname{sen} \theta \right) n R d\theta.$$

L'integrale del primo e terzo termine tra parentesi è nullo perché si tratta di un termine costante con l'angolo θ (e dalla normale vengono fuori le funzioni sinusoidali ad integrale nullo perché funzioni dispari), mentre l'integrale del secondo termine risulta nullo perché il prodotto per la funzione seno al quadrato ancora fornisce una funzione dispari (la stessa che si sarebbe ottenuta per un cilindro senza circolazione). Solo l'ultimo termine fornisce un contributo differente da zero e in esso c'è sia il contributo della corrente uniforme che della rotazione. Proiettando lungo gli assi si ottiene

$$\begin{cases} F_{x1} = -\rho \frac{\Gamma U_{\infty}}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta \cos \theta d\theta = -\rho \frac{\Gamma U_{\infty}}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta d(\operatorname{sen} \theta) = 0 \\ F_{x2} = -\rho \frac{\Gamma U_{\infty}}{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \end{cases} \quad (155)$$

Come già detto, la prima costituisce la cosiddetta resistenza di forma, mentre la seconda, in direzione verticale, costituisce la portanza. Tale forza può essere calcolata notando che

$$\int_0^{2\pi} d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = 2\pi$$

ma, dando i due integrali uguale contributo, ciascuno di essi vale π . Quindi, l'unica componente della forza che il fluido esercita sul cilindro, quella ortogonale alla corrente indisturbata, risulta data dalla portanza

$$F_{x2} = -\rho U_{\infty} \Gamma \quad (156)$$

Vettorialmente la relazione precedente può essere anche scritta come

$$\underline{F} = -\rho \underline{U}_{\infty} \times \underline{\Gamma} \quad (157)$$

che fornisce anche il verso della forza (dato quello della corrente uniforme e della circolazione). Questo risultato, appena dimostrato per un cilindro rotante investito da un flusso uniforme, può essere generalizzato al caso di un qualsiasi corpo generato da pozzi, sorgenti, vortici e doppie, investito da un flusso uniforme e, in questo caso, prende il nome di teorema di Kutta-Joukowski (Martin Wilhelm Kutta, 1867-1944; Nikolai Yegorovich Zhukovsky, 1847-1921). In particolare il teorema si applica a tutte le condizioni nelle quali intorno ad un corpo in moto uniforme viene generata una circolazione. Esempi pratici di tali condizioni vanno dai profili alari (e quindi in tutte le applicazioni collegate comprese le pale eoliche), ai boomerang e alle sfere in rotazione in movimento in ambito sportivo e non (effetto Magnus, Heinrich Gustav Magnus, 1802-1870). Quindi, anche in un flusso ideale potenziale su un corpo, purché in rotazione, nasce una forza perpendicolare all'asse di spostamento del corpo e, come detto, questo risultato trova buona conferma anche nel caso di flusso reale al quale può quindi essere esteso. Come vedremo nel prossimo capitolo, infatti, gli effetti della viscosità sono generalmente confinati in un piccolo strato in prossimità del corpo (strato limite) e non viene fortemente alterata la distribuzione delle pressioni intorno al corpo stesso rispetto al caso di flusso ideale.

Capitolo 7

STRATO LIMITE O SOLUZIONI INTERNE

7.1 IPOTESI DI PRANDTL

Nell'affrontare molti problemi fluidodinamici, bisogna considerare che già per un flusso con velocità caratteristica di 1 m/s e dimensione caratteristica di 1 m, il numero di Reynolds (introdotto nel paragrafo 4.8) è dell'ordine di 10^5 (in aria) o più. Di conseguenza, nelle equazioni di Navier-Stokes nella forma adimensionale (104), sembrerebbe possibile trascurare i termini contenenti gli effetti della viscosità visto che questi sono preceduti da un fattore numerico $1/Re$. Ciò comporterebbe la possibilità di ridurre il sistema di equazioni a quelle descritte alla fine del capitolo 5 e valide per i flussi potenziali per tutti queste situazioni. In effetti, però, i termini contenenti gli effetti della viscosità contengono derivate seconde delle componenti di velocità e potrebbero esserci regioni del campo dove queste siano particolarmente elevate compensando così i valori molto bassi di $1/Re$. Questo accade proprio in prossimità di superfici non permeabili (superfici dei condotti degli impianti, superfici dei modelli) dove la condizione al contorno di velocità nulla alla parete impone che ci sia un gradiente di velocità differente da zero: tale zona è detta strato limite.

A partire da osservazioni sperimentali, Ludwig Prandtl (1875-1953) formulò la cosiddetta ipotesi di Prandtl secondo la quale gli effetti viscosi sono significativi e comparabili come ordine di grandezza con i termini inerziali in questo strato limite, in prossimità di superfici, il cui spessore tende a zero al tendere del numero di Reynolds all'infinito, mentre tali effetti sono trascurabili all'esterno. Ciò significa che all'esterno dello strato limite il comportamento del flusso sarà più o meno potenziale, mentre all'interno andrebbero risolte le equazioni di Navier-Stokes in forma completa (in realtà vedremo che l'ipotesi di Prandtl di strato sottile semplificherà le cose). Questa ipotesi permette anche di conciliare le due approssimazioni di poter trascurare gli effetti viscosi per elevati numeri di Reynolds e di soddisfare la condizione al contorno di velocità nulla alla parete.

Come esempio specifico di quanto detto consideriamo il caso della lastra piana investita da un flusso uniforme con velocità U_∞ di un fluido incomprimibile e supponiamo inoltre che il flusso indisturbato sia orientato secondo l'asse x_1 e che tale sia anche la direzione della lastra (figura 28).

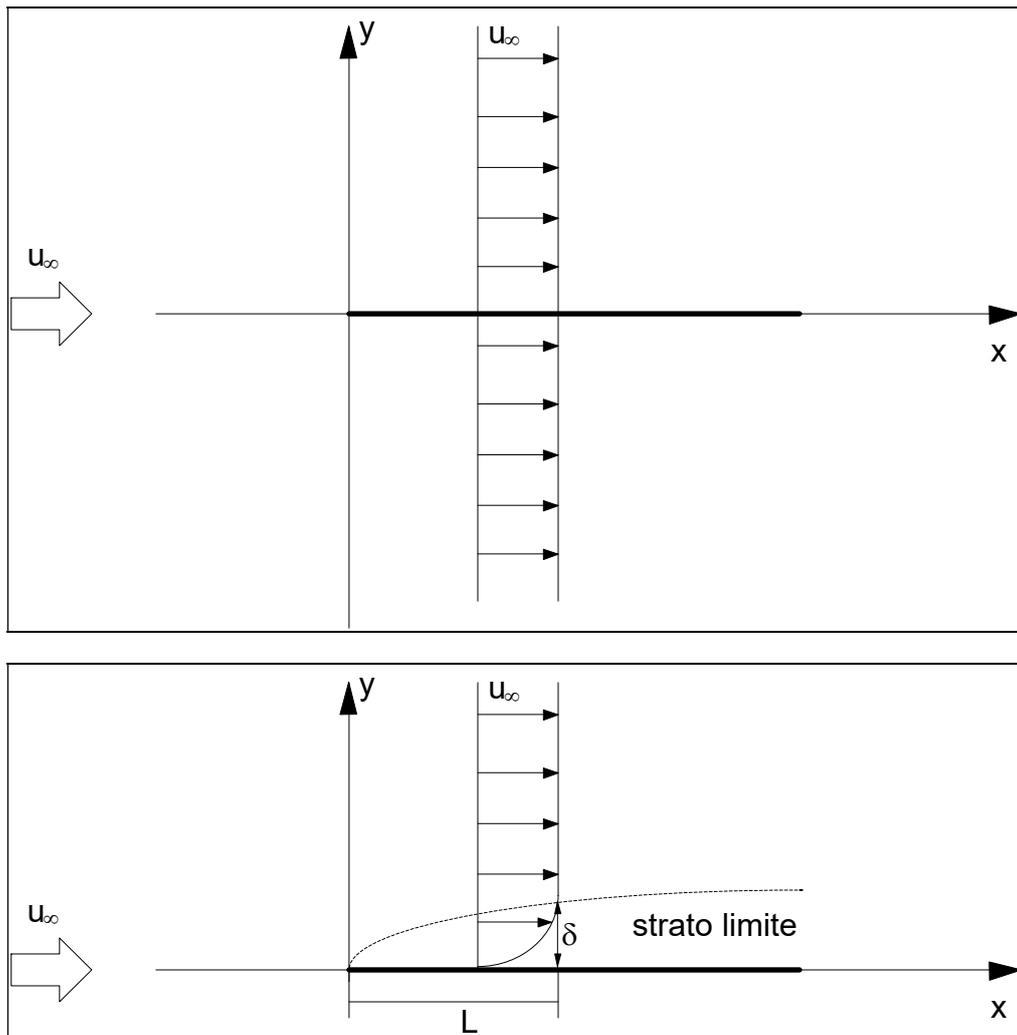


Figura 28. Flusso uniforme su lastra piana nel caso potenziale (in alto) e reale (in basso).

Essendo la lastra di spessore infinitesimo, come mostrato nella figura 28, dalla trattazione dei flussi potenziali del capitolo precedente, questo problema ha la soluzione banale $u_1 \equiv U_\infty$. Quindi, secondo questa soluzione, la presenza della lastra non modifica il flusso uniforme. Tale soluzione soddisfa le condizioni al contorno all'infinito e quella di impermeabilità ma non la condizione di aderenza sul corpo, poiché la velocità sulla lastra è sì tangente, ma non nulla. Affinché sia possibile soddisfare questa condizione di aderenza e contemporaneamente quella di velocità pari alla velocità esterna U_∞ , sarà presente in prossimità della lastra una zona nella quale i termini viscosi saranno dello stesso ordine di grandezza dei termini inerziali, nella equazione di Navier-Stokes. Questa zona è quella che è stata definita come strato limite dove gli effetti della viscosità permettono il raccordo tra ciò che succede alla parete e ciò che succede all'esterno.

7.2 EQUAZIONI DELLO STRATO LIMITE

Senza perdere di generalità, il problema può essere impostato nell'ipotesi di flusso bidimensionale, visto che è possibile ricondurre un generico problema tridimensionale di strato limite a quello su piani separati. Consideriamo un corpo generico affusolato (cioè con bassa curvatura, ovvero con rapporto tra lo spessore dello strato limite ed il raggio di curvatura molto minore di 1), in assenza di forze esterne (forze esterne di tipo conservativo possono in realtà essere sempre incluse insieme al gradiente di pressione come visto nel capitolo 5), investito da un flusso incompressibile avente numero di Reynolds molto elevato (al limite $Re \rightarrow \infty$) come rappresentato in figura 29. Le equazioni che regolano il moto saranno le seguenti (da quelle riportate in 4.10)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} + \nu \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) \end{array} \right. \quad (158)$$

cioè le equazioni di continuità e di Navier-Stokes, nelle tre incognite u_1 , u_2 e p . Le condizioni al contorno saranno ($x_2=0$ identifica la superficie del corpo con piccolo spessore e curvatura)

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_1 = 0, & u_2 = 0 & \text{per } x_2 = 0 \quad (\forall x_1) \\ u_1 = U_e(x_1, t), & u_2 = 0, \quad p = p_\infty & \text{per } x_2 \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

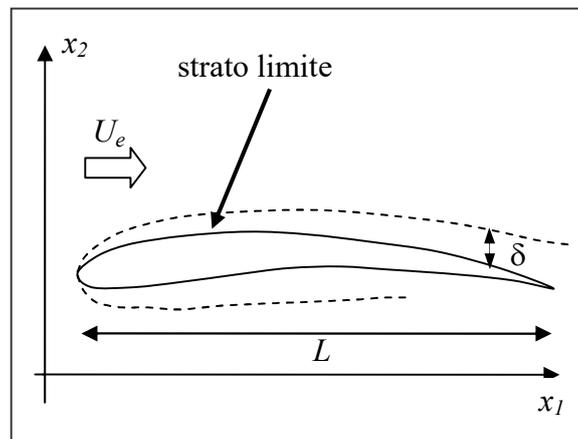


Figura 29. Schematizzazione di strato limite sottile intorno a un corpo.

Dove U_e rappresenta la soluzione esterna, che può essere variabile in dipendenza della geometria del corpo e del tempo e che nel caso della lastra piana è proprio la U_∞ . Le tre equazioni precedenti equivalgono ad un'equazione differenziale del quarto ordine. Questo si può dimostrare derivando la prima rispetto a x_2 e la seconda rispetto a x_1 e sottraendole (o anche facendo il rotore dell'equazione vettoriale). Introducendo la funzione di corrente (caso incompressibile 2D), l'equazione di continuità sarà automaticamente soddisfatta e si otterrà

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \psi) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \right) \nabla^2 \psi = \nu \nabla^4 \psi \quad (159)$$

che è proprio un'equazione non lineare del quarto ordine nell'unica incognita ψ , con le quattro condizioni al contorno per le componenti normale e tangenziale di velocità sulla superficie del corpo

$$\begin{cases} u_n = -\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0 \\ u_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \end{cases}$$

e molto lontano da esso

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = U_e(x_1, t) \\ u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 0 \end{cases}$$

Ponendo $\nu=0$ nella (160), l'equazione si riduce al terzo ordine e bisognerà rinunciare ad una condizione al contorno per risolvere il problema. Se il corpo è impermeabile, si rinuncerà a quella sulla velocità tangenziale poiché le altre sono necessarie alla risoluzione univoca corretta del problema. La velocità di scorrimento sul corpo risulterà quindi non nulla come già detto nel paragrafo precedente.

Per cercare quindi di semplificare il problema costituito dalle equazioni (159) o (160) bisognerà sfruttare l'ipotesi aggiuntiva di Prandtl. Effettuiamo perciò un'analisi degli ordini di grandezza dei vari termini delle equazioni scegliendo come scala delle lunghezze la lunghezza del corpo, L , come scala di velocità la velocità di riferimento della corrente indisturbata, U_∞ , e come

densità quella del fluido (trattato come incompressibile) (figura 29). L'ipotesi di Prandtl si traduce perciò nel dire che lo strato limite sarà caratterizzato da uno spessore, δ , molto piccolo rispetto a L

$$\Delta = \frac{\delta}{L} \ll 1 \quad (160)$$

(tipicamente almeno un ordine di grandezza). Senza ripetere il discorso già fatto nel paragrafo 4.8, introducendo grandezze adimensionali, le (159) si modificano nelle equazioni

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right) \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right) \end{array} \right. \quad (161)$$

dove tutte le quantità sono adimensionali e $Re = LU_\infty/\nu$. Si noti che, rispetto al paragrafo 4.8, si sono scelte grandezze di riferimento per il tempo e per la pressione rispettivamente pari a L/U_∞ e ρU_∞^2 , cosicché i numeri di Strouhal e Ruark siano entrambi pari a 1. Le condizioni al contorno sono le stesse di quanto visto in precedenza ma per le quantità adimensionali. Possiamo allora cercare di capire l'ordine di grandezza dei vari termini utilizzando l'approssimazione (161). Infatti, indicando con l'apice le grandezze dimensionali

$$\left\{ \begin{array}{llll} u_1 = u_1'/U_\infty & \text{essendo} & 0 \leq u_1' \leq U_\infty & \Rightarrow u_1 = o(1) \\ x_1 = x_1'/L & \text{essendo} & 0 \leq x_1' \leq L & \Rightarrow x_1 = o(1) \\ x_2 = x_2'/L & \text{essendo} & 0 \leq x_2' \leq \delta & \Rightarrow x_2 = o(\Delta) \\ \partial u_1/\partial x_1 \approx \Delta u_1'/\Delta x_1 & \text{essendo} & 0 \leq \Delta u_1' \leq 1 \text{ e } 0 \leq \Delta x_1' \leq 1 & \Rightarrow \partial u_1/\partial x_1 = o(1) \end{array} \right.$$

e quindi la prima delle (162), l'equazione di continuità, può essere valutata

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0.$$

$\frac{1}{1} \quad \frac{2}{\Delta}$

e quindi per verificare l'equazione dovrà essere come ordine di grandezza

$$u_2 = \mathbf{o}(\Delta) \quad (162)$$

cioè $u_2 \ll U_\infty$. Allora si può considerare la prima equazione di Navier-Stokes nelle (162) per valutare

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right)$$

$$\frac{1}{1} \quad 1 \frac{1}{1} \quad \Delta \frac{1}{\Delta} \quad ? \quad ? \quad \frac{1}{1 \cdot 1} \quad \frac{1}{\Delta \cdot \Delta}$$

dove tra i due termini in parentesi a secondo membro si riconosce, per la (161), che il secondo è molto maggiore del primo, che quindi può essere trascurato. Di conseguenza, indipendentemente dall'ordine di grandezza del gradiente di pressione assiale (che può anche essere nullo come nel caso della lastra piana), affinché i termini viscosi a secondo membro possano bilanciare quelli inerziali a primo membro, deve essere

$$Re = \mathbf{o}\left(\frac{1}{\Delta^2}\right) \quad (163)$$

in caso contrario ricadremmo nella categoria dei flussi di Stokes (termini viscosi preponderanti) o di Eulero (termini viscosi trascurabili). La (164) ci conferma, come era stato ipotizzato che se lo strato limite è sottile allora il numero di Reynolds è molto elevato e viceversa. Se ora consideriamo la seconda equazione di Navier-Stokes (162)

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial p}{\partial x_2} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right)$$

$$\frac{\Delta}{1} \quad 1 \frac{\Delta}{1} \quad \Delta \frac{\Delta}{\Delta} \quad ? \quad \Delta^2 \quad \frac{\Delta}{1 \cdot 1} \quad \frac{\Delta}{\Delta \cdot \Delta}$$

dove di nuovo il secondo termine tra parentesi a secondo membro è molto maggiore del primo che quindi può essere trascurato. In questa equazione tutti i termini sono di ordine Δ e quindi ci si aspetta che anche il gradiente di pressione verticale sia non superiore a quest'ordine

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = \mathbf{o}(\Delta) \quad (164)$$

cioè la variazione di pressione perpendicolarmente alla superficie del corpo è piccola. Ciò permette di assumere che la pressione in direzione normale al corpo, e quindi allo strato limite che su di esso si sviluppa, sia costante e uguale al valore che assume all'esterno dello strato limite. Quest'ultima è nota dalla soluzione del campo esterno che, essendo non viscoso, con ottima approssimazione è ottenibile dalla soluzione potenziale (quale quelle ottenute nel capitolo precedente). Di conseguenza si può scrivere che la pressione dipende solo dalla coordinata assiale

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{dp}{dx_1} \quad \mathbf{e\ quindi} \quad p = p(x_1, t) \quad (165)$$

Questa forte semplificazione, come detto, permette di ottenere la pressione dalla soluzione del campo esterno, che, dall'equazione di Eulero (100), considerando le approssimazioni (163), (165) e (166), può essere scritta per la sola componente assiale adimensionale come

$$\frac{\partial U_e}{\partial t} + U_e \frac{\partial U_e}{\partial x_1} = f_i - \frac{dp}{dx_1} \quad (166)$$

dove, come già rilevato, le forze esterne, se conservative, possono essere inglobate nel termine di pressione. La relazione precedente permette di sostituire il gradiente di pressione con la soluzione del campo di velocità esterno. Nel caso stazionario, senza forze esterne, la relazione diventa semplicemente

$$\frac{d(U_e^2/2)}{dx_1} = - \frac{dp}{dx_1} \quad (167)$$

che può anche essere ottenuta semplicemente dall'equazione di Bernoulli (valida per il flusso esterno) nella forma più semplice (118).

In base a quanto detto, il sistema di equazioni (162) si semplifica in

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = - \frac{dp}{dx_1} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \end{array} \right. \quad (168)$$

nelle incognite le due componenti di velocità (come detto, la pressione è assegnata dalla condizione esterna) con le condizioni al contorno

$$\begin{cases} u_1 = 0, & u_2 = 0 & \text{per } x_2 = 0 \\ u_1 = U_e(x_1, t)/U_\infty & & \text{per } x_2 \rightarrow \infty \end{cases}$$

e l'eventuale condizione iniziale sul campo di velocità per il caso non stazionario (che viene sostituita da una condizione sul profilo di velocità nella sezione iniziale, $x_1=0$, per il caso stazionario). Le equazioni precedenti sono dette equazioni di Prandtl. La semplificazione ottenuta con le equazioni di Prandtl è notevole perché la seconda equazione di Navier-Stokes si è ridotta alla (165), ma soprattutto nella prima c'è stato un cambio nella natura dell'equazione eliminando uno dei due termini nel laplaciano (l'equazione è diventata parabolica da ellittica che era). Questo fatto permette di ottenere delle soluzioni del campo che non influenzino quello che succede a monte della corrente ma solamente quello che succede a valle e quindi permette un'integrazione del sistema per valori dell'ascissa assiale crescenti. Inoltre le incognite si sono ridotte da tre a due. In effetti, in alcune condizioni, è possibile dimostrare, come verrà fatto nel paragrafo 7.5, che tale equazione è equivalente ad un'equazione del terzo ordine per una funzione scalare con tre condizioni al contorno.

7.3 SPESSORE DELLO STRATO LIMITE

Se consideriamo nuovamente la relazione (164), possiamo scrivere che $Re \approx \frac{L^2}{\delta^2}$, e quindi

$$\delta \approx \frac{L}{\sqrt{Re}} \quad (169)$$

cioè

$$\delta \approx \sqrt{\frac{L\nu}{U_\infty}} \quad (170)$$

o, se al posto di L usiamo la distanza x'_1 dal punto in cui inizia a svilupparsi lo strato limite,

$$\delta(x'_1) \approx \sqrt{\frac{x'_1 \nu}{U_\infty}} \quad (171)$$

(l'apice individua grandezze dimensionali). Le relazioni (170) e (172) ci dicono che lo spessore dello strato limite (anche se per ora genericamente definito) diminuisce al crescere del numero di Reynolds (come la radice quadrata) e cresce al crescere della distanza dal punto in cui inizia a svilupparsi (sempre con la radice). Inoltre tale spessore diminuisce con la radice della viscosità del flusso. Questi risultati confermano la validità delle ipotesi fatte quando il numero di Reynolds è elevato e permettono anche un primo calcolo degli effetti dello strato limite sul flusso indisturbato.

Dalla (172) se calcoliamo lo sforzo viscoso alla parete, come nel paragrafo 5.1, si ottiene

$$(\tau_{21})_0 = (\tau_{12})_0 = (2\mu e_{12})_0 = \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)_0 \approx \mu \frac{U_\infty}{\delta} \approx \mu \frac{U_\infty^{3/2}}{(x'_1 \nu)^{1/2}}$$

ed il coefficiente di resistenza di attrito (la forza adimensionale) sarà dato da

$$C_D = \frac{\int (\tau_{12})_0 dS}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 S} = \frac{(\tau_{12})_0 S}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 S} \approx 2\mu \frac{U_\infty^{3/2}}{\rho U_\infty^2 (x'_1 \nu)^{1/2}} = 2 \left(\frac{\nu}{x'_1 U_\infty} \right)^{1/2} = \frac{2}{Re_x^{1/2}}$$

cioè il coefficiente di attrito diminuisce all'aumentare del numero di Reynolds, ma diversamente da quello all'interno di un condotto dato dalla (115) (dipendenza dall'inverso del numero di Reynolds). In effetti però in quella relazione compariva il numero di Reynolds costruito con la dimensione del condotto e non con la dimensione longitudinale. Se qui analogamente costruiamo il numero di Reynolds con una grandezza ortogonale alla direzione della corrente media, quale ad esempio lo spessore dello strato limite, otteniamo proprio una dipendenza simile a quella del condotto, $C_D \sim 1/Re_\delta$ (da verificare per esercizio). In altre parole la relazione tra i numeri di Reynolds è del tipo $Re_\delta \sim Re_x^{1/2}$ (e così anche per il valore del numero di Reynolds per la transizione laminare-turbolento). Dalla (170) scritta in funzione della coordinata x_1 , si può anche trovare

$$C_D \approx 2 \frac{\delta(x'_1)}{x'_1} \quad (172)$$

cioè il coefficiente di attrito diminuisce muovendosi lungo il corpo (perché aumenta lo spessore dello strato limite e diminuiscono i gradienti di velocità). Inoltre la resistenza di attrito è direttamente proporzionale allo spessore locale dello strato limite.

7.4 SEPARAZIONE DELLO STRATO LIMITE

La trattazione svolta nel paragrafo 7.2 è valida finché la superficie del corpo è piana o con bassa curvatura. Quando invece la curvatura diventa eccessiva, lo spessore dello strato limite tende a crescere e non sarà più possibile formulare l'ipotesi di Prandtl ma solo trattare le equazioni nella loro forma generale. La cosiddetta separazione del fluido avviene quando le linee di corrente che lambiscono la parete si allontanano da questa a causa di gradienti di pressione avversi, provocati dalla creazione, a valle della separazione stessa, di una zona vorticoso nella quale il moto non contribuisce al flusso medio del fluido ma ha la sola conseguenza di determinare elevati tassi di dissipazione di energia. Questo fenomeno può avvenire sul dorso di un profilo investito da un flusso, quando esso sia posto ad un angolo di incidenza sufficientemente grande rispetto al flusso indisturbato, oppure nella parte anteriore e nella scia di oggetti tozzi o in corrispondenza di brusche variazioni della geometria della superficie o dei condotti (per esempio l'allargamento di un tubo) come rappresentato in figura 30.

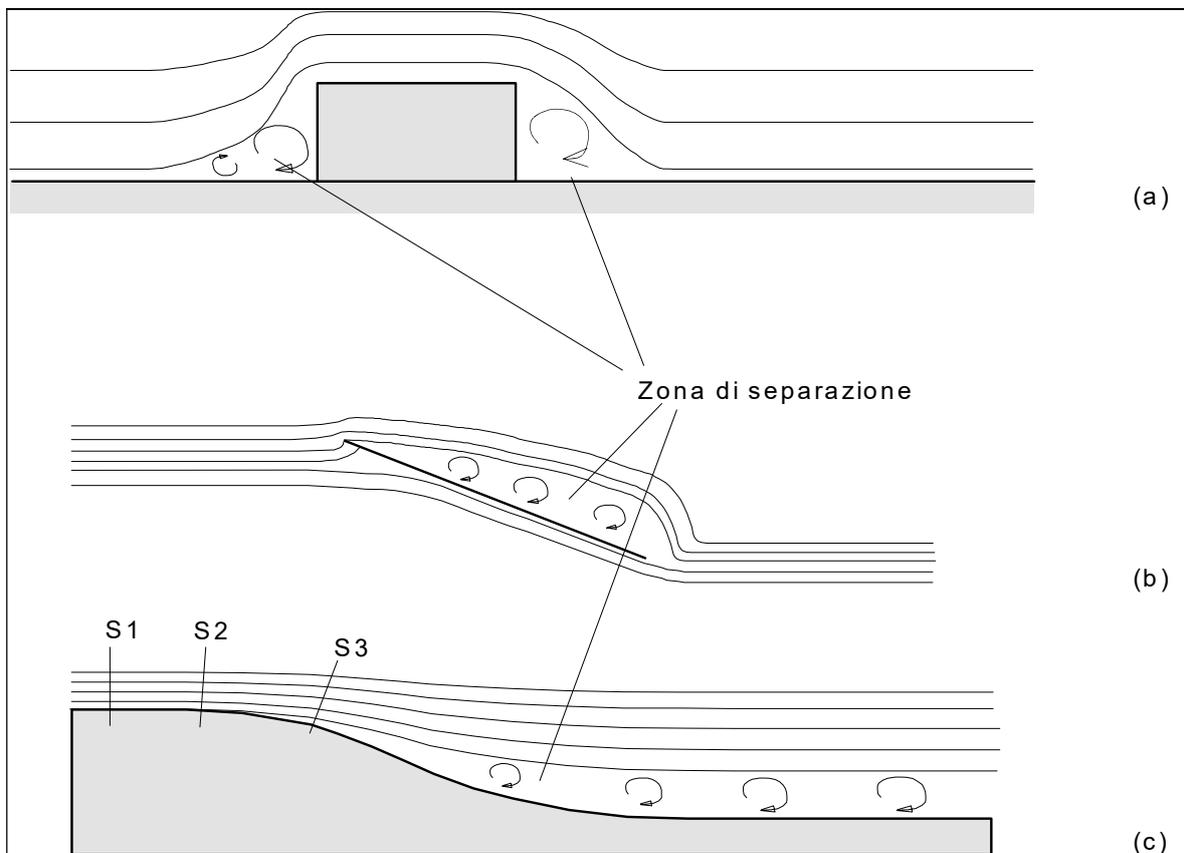


Figura 30. Modalità di separazione della corrente fluida in corrispondenza di corpi tozzi (a), di corpi ad elevato angolo di incidenza (b) e di allargamenti in un condotto o variazioni brusche della geometria della superficie (c).

Il gradiente di pressione avverso è particolarmente sentito proprio in prossimità della parete dove il fluido perde energia cinetica e non riesce a penetrare nella zona a pressione crescente. La conseguenza è quella che il fluido si arresta e si allontana dalla parete di fronte al flusso retrogrado proveniente dalla zona a valle della separazione. Il punto di separazione (o distacco) rappresenta proprio il confine tra la zona di flusso diretto e quella di flusso inverso. Dall'analisi dei profili verticali di velocità assiale a monte, in prossimità e a valle del punto di separazione, mostrati nella figura 31, si deduce che la velocità diminuisce sempre di più all'interno dello strato (sezione S1), con derivata alla parete maggiore di zero, fino a quando, nel punto di separazione, il profilo ha tangente verticale, derivata alla parete nulla, (sezione S2)

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)_{x_2=0} = 0 \quad (173)$$

mentre, a valle di questo punto, si ha una zona di ricircolo, nella quale la velocità si inverte (sezione S3) e la derivata di velocità alla parete sarà negativa. Come detto, a valle di tale punto di separazione, non è più valida l'ipotesi di irrotazionalità del flusso e non si potranno utilizzare le semplificazioni di Prandtl. Però fino a tale punto, le equazioni (169) sono valide e se le calcoliamo proprio sulla parete otteniamo (essendo $u_1 = u_2 = 0$) nel caso stazionario

$$\frac{dp}{dx_1} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \Big|_{x_2=0} \quad (174)$$

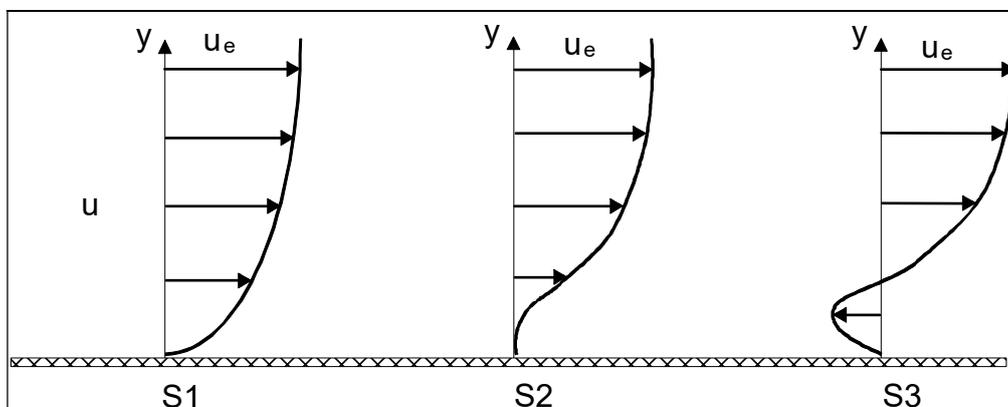


Figura 31. Profili verticali di velocità assiale nelle tre sezioni a monte (S1), in corrispondenza (S2) e a valle (S3) del punto di separazione mostrate in figura 30.

(per la (165) il gradiente di pressione è lo stesso in prossimità e lontano dal corpo), cioè il segno della derivata seconda del profilo di velocità alla parete è determinato dal gradiente di pressione assiale. Con riferimento alla figura 32, notiamo quanto segue:

- lontano dalla parete, in tutte le condizioni, la velocità tende asintoticamente alla velocità esterna e quindi la derivata prima sarà positiva decrescente e quella seconda negativa e tendente a zero;
- nel caso in cui il gradiente di pressione assiale risulti nullo (lastra piana), la derivata seconda alla parete sarà anch'essa nulla dalla (175); ciò vuol dire che alla parete la derivata prima sarà costante e che quindi il profilo di velocità tenderà a zero più o meno linearmente;
- nel caso in cui il gradiente di pressione assiale sia negativo (dalla (168) questo significa che il flusso esterno accelera cioè che siamo in presenza di una sezione che si restringe), allora sempre dalla (175) si avrà derivata seconda negativa alla parete e quindi derivata prima crescente verso la parete e profilo di velocità monotonicamente crescente;
- infine, nel caso in cui il gradiente di pressione assiale sia positivo (dalla (168) significa flusso esterno che decelera cioè che siamo in presenza di una sezione che si allarga), dalla (175) si avrà derivata seconda positiva alla parete che quindi cambia segno rispetto al campo esterno così come la derivata prima e il profilo stesso di velocità che presenta quindi un'inversione.

La separazione avviene proprio nel passaggio tra gradiente di pressione negativa a positivo come riassunto nella figura 32. In particolare si avrà il punto di separazione proprio dove la derivata prima si annulla come nella (174). Questa è una situazione intermedia tra quella del secondo e terzo caso della figura 32 dove la derivata prima passa da positiva a negativa.

Si può concludere quindi che la separazione dello strato limite può avvenire solo in corrispondenza di una zona nella quale il gradiente di pressione (o più in generale di carico piezometrico qualora vi sia la forza gravitazionale come forza esterna) sia positivo, ciò corrisponde ad una zona di flusso rallentato. Se consideriamo, ad esempio, il flusso all'interno di un condotto nel quale sia introdotta una variazione locale della sezione, l'eventuale distacco dello strato limite avviene generalmente in corrispondenza della zona di espansione più che in quella di contrazione.

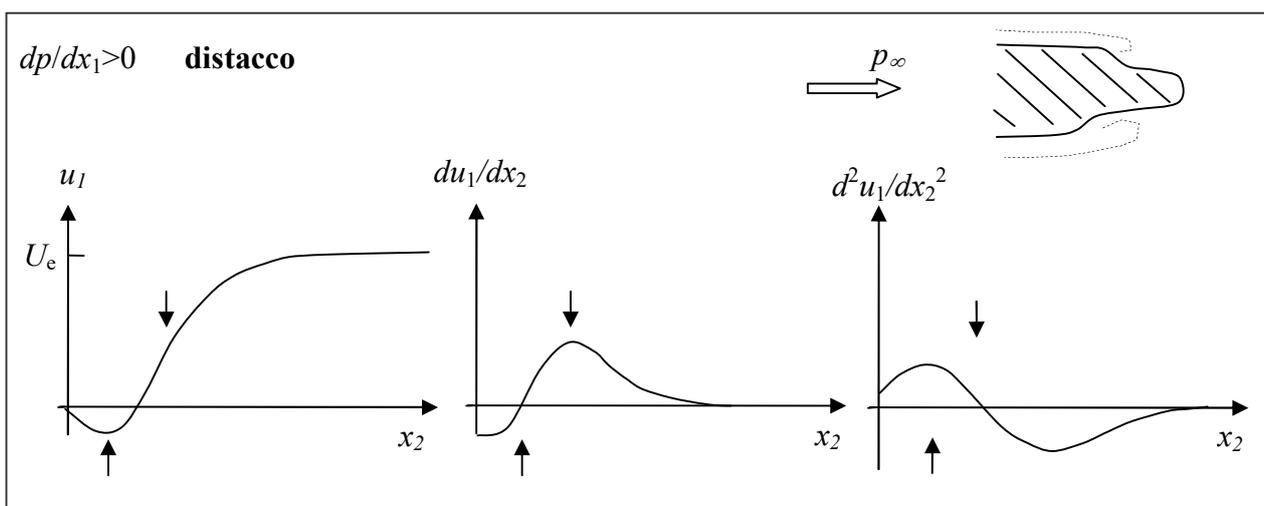
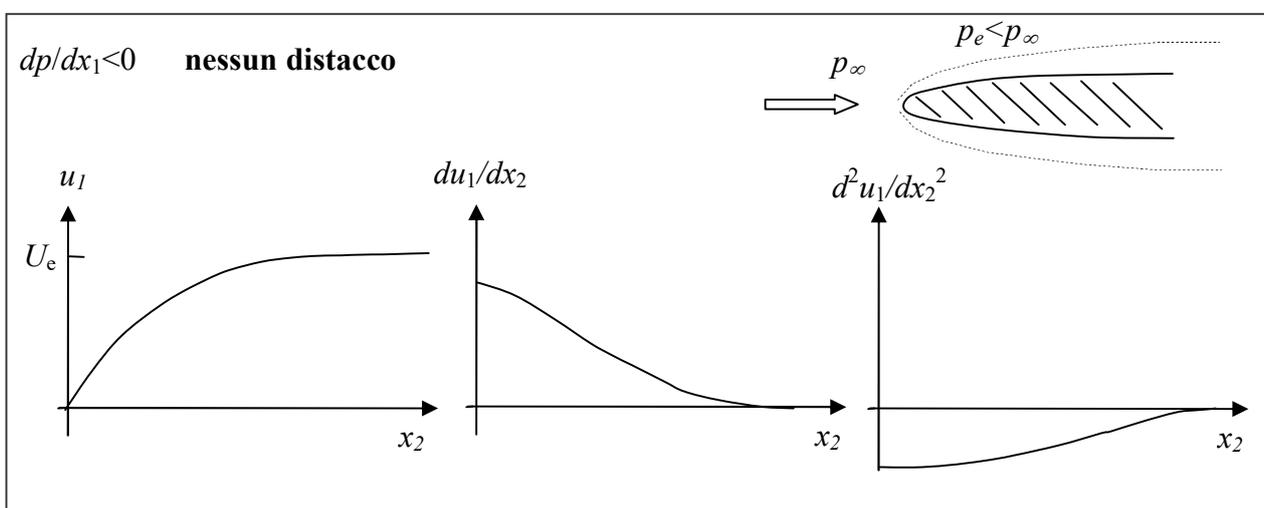
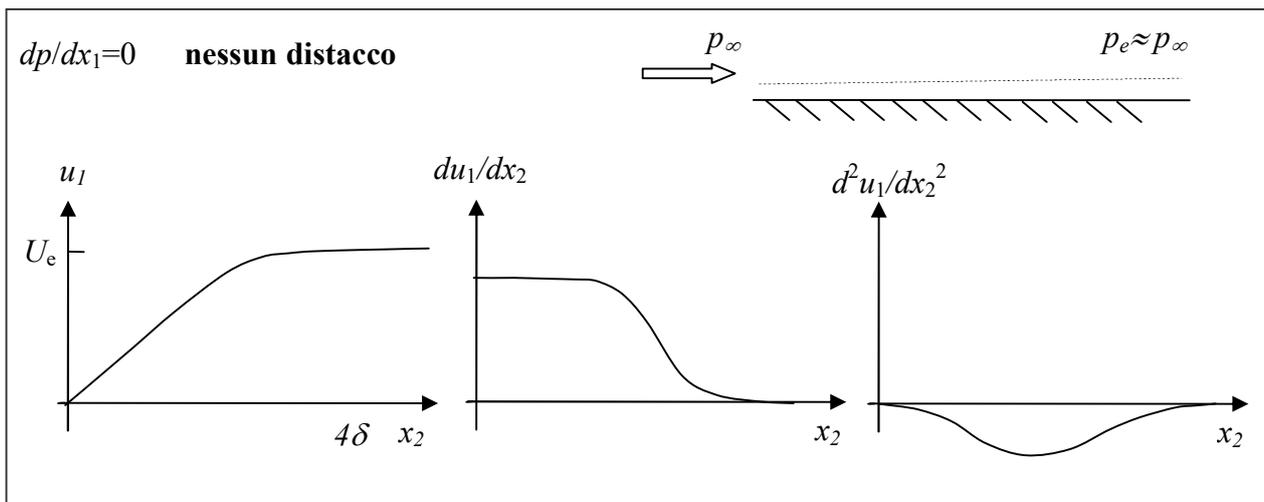


Figura 32. Profili verticali in uno strato limite di velocità assiale e della derivata prima e seconda nelle tre condizioni di gradiente di pressione nullo (in alto), negativo (al centro) e positivo (in basso).

7.5 SOLUZIONI DI STRATO LIMITE

Nelle equazioni (169) pur essendovi grandi semplificazioni rispetto alle equazioni complete di Navier-Stokes, ci sono ancora delle non linearità a primo membro e delle derivate seconde a secondo. Queste equazioni possono essere risolte abbastanza facilmente attraverso metodi numerici in due casi particolari:

- soluzioni simili alla Falkner-Skan, di cui un caso particolare è la soluzione per lastra piana di Blasius, (Paul Richard Heinrich Blasius (1883-1970));
- soluzioni integrali alla Von Karman (Theodore Von Karman, 1881-1963).

Soluzioni simili.

Nel paragrafo 7.2 le equazioni di Prandtl sono state scritte in forma adimensionale utilizzando la stessa unità di lunghezza lungo i due assi, risultando così ordini di grandezza differenti per le coordinate assiale (in direzione del moto medio) e verticale (in direzione ortogonale allo strato limite). Se invece viene usata la nuova coordinata dimensionale $x_2^*=x_2/\Delta$ (con Δ dato dalla (161)), allora è possibile eliminare la dipendenza dal numero di Reynolds nelle equazioni (almeno finché sono valide le condizioni di laminarità del flusso). Infatti, per soddisfare l'equazione di continuità, deve essere introdotta la nuova variabile $u_2^*=u_2/\Delta$ e le equazioni di Prandtl (169) in forma adimensionale diventano

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^*}{\partial x_2^*} = 0 \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2^* \frac{\partial u_1}{\partial x_2^*} = -\frac{dp}{dx_1} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^{*2}} \\ \frac{\partial p}{\partial x_2^*} = 0 \end{array} \right. \quad (175)$$

nelle incognite le due componenti di velocità, con le condizioni al contorno

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = 0, \quad u_2^* = 0 \quad \text{per} \quad x_2^* = 0 \\ u_1 = U_e(x_1, t)/U_\infty \quad \text{per} \quad x_2^* \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

Una soluzione delle equazioni precedenti può essere ottenuta introducendo la variabile $\eta = x'_2 / \delta(x'_1)$, (grandezze dimensionali) cioè scalando la coordinata verticale con lo spessore locale dello strato limite. Il dominio di integrazione viene quindi modificato con η che varia da 0 a 1 mentre x'_2 varia da 0 a δ . Questa posizione viene scelta per indagare se esistano soluzioni simili per il profilo verticale di velocità assiale, $u_1(x_2)$, che possano essere scalate a differenti ascisse x'_1 solo tramite lo spessore locale dello strato limite δ . Dal punto di vista matematico, questo si traduce nel richiedere che la soluzione sia fattorizzabile in una funzione della sola x_1 ed in una della sola η .

Dalla (172) modificata considerando che genericamente la soluzione esterna si può esprimere come $U_e(x'_1)$, si ottiene

$$\delta(x'_1) = \sqrt{\frac{x'_1 \nu}{U_e(x'_1)}}$$

per cui è possibile scrivere la nuova variabile come

$$\eta = \frac{x'_2}{\delta(x'_1)} = \frac{x'_2}{L} \sqrt{\frac{U_e(x'_1)}{x'_1 \nu}} \sqrt{\frac{U_\infty L}{U_\infty L}} = x_2 \sqrt{Re_L} \sqrt{\frac{U_e(x'_1) L}{x'_1 U_\infty}} = x_2^* \sqrt{\frac{U_e(x'_1)}{x_1 U_\infty}} = x_2^* g(x_1)$$

che definisce la funzione $g(x_1)$. Come già detto nel paragrafo (7.2), è possibile introdurre la funzione di corrente tale che

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2^*}, \quad u_2 = - \frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

e inserirla nelle equazioni (169) con l'equazione di continuità automaticamente soddisfatta. Come detto, l'ipotesi di auto-similarità delle soluzioni si traduce matematicamente nel richiedere che

$$\psi(x_1, x_2^*) = \psi(x_1, \eta) = h(x_1) f(\eta)$$

Esaminiamo i termini presenti nell'unica equazione rimasta dalla (169), per il caso stazionario

$$u_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2^*} = \frac{\partial \psi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2^*} = h \dot{f} g$$

$$\begin{aligned}
u_2^* &= -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -\left(\frac{\partial \psi}{\partial f} \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x_1} \right) = -(h \dot{f} x_2^* g + f \dot{h}) \\
\frac{\partial u_1}{\partial x_1} &= hg \frac{\partial \dot{f}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + f \dot{h} g + f h \dot{g} = hg \ddot{f} x_2^* \dot{g} + f(\dot{h}g + h\dot{g}) \\
\frac{\partial u_1}{\partial x_2^*} &= hg \frac{\partial \dot{f}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2^*} = hg^2 \ddot{f} \\
\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^{*2}} &= hg^2 \frac{\partial \ddot{f}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2^*} = hg^3 \ddot{\ddot{f}}
\end{aligned}$$

avendo indicato con il punto la derivata prima, con due punti la seconda e così via. Queste relazioni permettono di ottenere l'equazione alle derivate ordinarie di terzo grado

$$\dot{f}^2 hg(\dot{h}g + h\dot{g}) - \ddot{f} f h \dot{h} g^2 = U_e \frac{dU_e}{dx_1} + \ddot{\ddot{f}} hg^3 \quad (176)$$

con le condizioni al contorno

$$\begin{cases}
u_1(x_2^* = 0) = h \dot{f}(0)g = 0 \quad \text{cioè} \quad \dot{f}(0) = 0 \\
u_2^*(x_2^* = 0) = -(h \dot{f}(0)0 \dot{g} + f(0)\dot{h}) = 0 \quad \text{cioè} \quad f(0) = 0 \\
u_1(x_2^* \rightarrow \infty) = h \dot{f}(\infty)g = U_e(x_1)/U_\infty
\end{cases}$$

Dall'ultima condizione, si può scegliere $f(\infty) = 1$, così che $hg = U_e(x_1)/U_\infty$, e quindi le due componenti di velocità saranno date da

$$\begin{cases}
u_1(x_1, \eta) = \dot{f}(\eta)U_e(x_1)/U_\infty \\
u_2^*(x_1, \eta) = \frac{g}{2} [\dot{f}\eta(1-\beta) - f(1+\beta)]
\end{cases} \quad (177)$$

essendo

$$\begin{cases}
g = (U_e/x_1 U_\infty)^{1/2} \\
h = (U_e x_1 / U_\infty)^{1/2} \\
\dot{g} = \frac{1}{2h} \frac{d(U_e/U_\infty)}{dx_1} - \frac{g}{2x_1} \\
\dot{h} = \frac{1}{2g} \frac{d(U_e/U_\infty)}{dx_1} + \frac{g}{2}
\end{cases}$$

e avendo posto il gradiente relativo normalizzato

$$\beta = \frac{x_1}{(U_e/U_\infty)} \frac{d(U_e/U_\infty)}{dx_1}$$

Inserendo queste funzioni e le derivate nell'equazione (177) si ottiene l'equazione

$$\ddot{f} + \frac{1}{2} f \ddot{f} (1 + \beta) + \beta (1 - \dot{f}^2) = 0 \quad (178)$$

detta equazione di Falkner-Skan che è un'equazione alle derivate ordinarie, non lineare, del terzo ordine con il parametro β che dipende dal campo esterno. L'equazione va risolta con le tre condizioni al contorno $f(0)=0$, $\dot{f}(0)=0$, $\dot{f}(\infty)=1$ e può essere risolta numericamente per la funzione f , una volta assegnato il campo esterno $U_e(x_1)$, scrivendola come un sistema di tre equazioni del primo ordine. Dalla funzione f si trova la funzione di corrente, essendo la funzione h dipendente anch'essa dal campo esterno, e quindi le due componenti di velocità.

Però, se i coefficienti dell'equazione non sono costanti ma dipendono da x_1 , $\beta=\beta(x_1)$, allora non si riesce ad ottenere una soluzione dalla (179). Ciò significa che non è lecita la fattorizzazione sulla funzione di corrente introdotta in precedenza, a meno che

$$\beta = \frac{x_1}{(U_e/U_\infty)} \frac{d(U_e/U_\infty)}{dx_1} = \cos t$$

cioè, a meno di costanti moltiplicative, che

$$U_e(x_1) \approx U_\infty x_1^\beta$$

Per $\beta > 0$ troviamo che la velocità esterna deve aumentare con la coordinata assiale cioè che siamo nella parte anteriore di un corpo (come nella parte anteriore di un cuneo). Per $\beta < 0$ la velocità esterna deve diminuire con la coordinata assiale cioè che siamo nella parte posteriore di un corpo (come in una zona in cui il fluido si allarga). Infine se $\beta = 0$ la velocità esterna resta sempre pari alla velocità lontano dal corpo (come nella lastra piana) (si noti che per $\beta = 1$ la (179) descrive il flusso verso un punto di ristagno).

Nel caso della lastra piana, la (179) si semplifica nell'equazione di Blasius

$$\ddot{f} + \frac{1}{2} f \dot{f} = 0 \quad (179)$$

formalmente analoga a quella e con le stesse condizioni al contorno. La soluzione numerica di questa equazione mostra che già per $\eta \approx 5$ la funzione f risulta tale che $u_1 = U_e \equiv U_\infty$ a meno di 1/100, cioè che lo spessore dello strato limite sulla lastra piana, cosiddetto al 99%, rispetto all'ordine di grandezza trovato nella (172) è

$$\delta_{99}(x'_1) \approx 5 \sqrt{\frac{x'_1 \nu}{U_\infty}} = 5 \frac{x'_1}{\sqrt{Re_x}} \quad (180)$$

Nella figura 33 sono riportati gli andamenti della funzione $f(\eta)$ e delle sue derivate prima e seconda. Da questi si possono facilmente dedurre gli andamenti delle due componenti di velocità ottenute dalle (178) (adimensionalizzate con la U_∞). In particolare la componente assiale coincide proprio con la derivata prima di f (essendo $U_e \equiv U_\infty$) e quindi cresce quasi linearmente, mentre la componente verticale tende al valore

$$u_2 \approx \frac{0.85}{\sqrt{Re_x}} \quad (181)$$

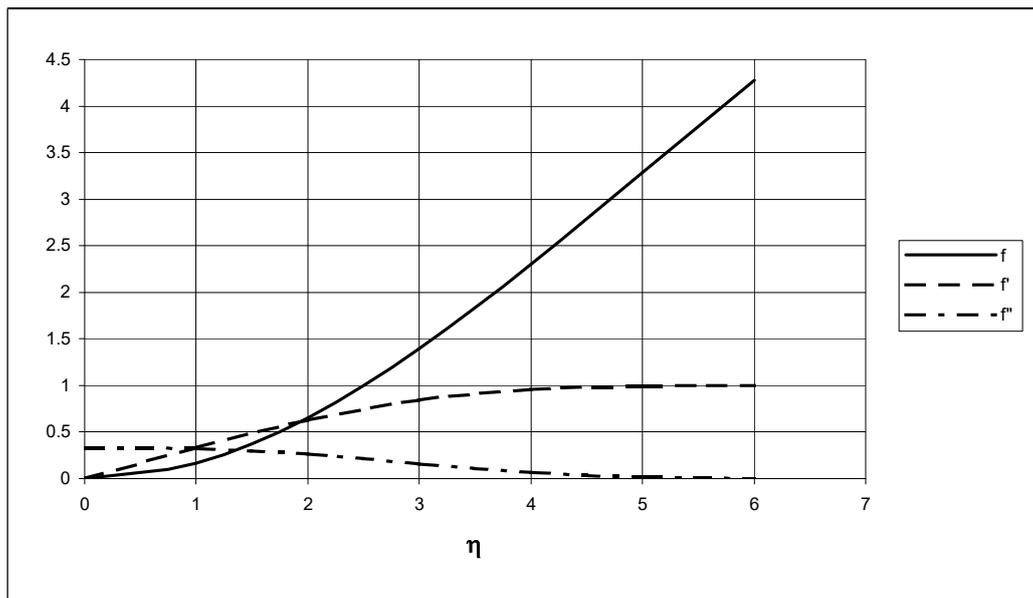


Figura 33. Andamento della funzione f e delle sue derivate prima e seconda per la soluzione lastra piana.

Cioè, pur essendo in presenza di una lastra piana, la velocità verticale ha un valore differente da zero a causa dello spessore crescente dello strato limite. E' anche possibile trovare lo sforzo tangenziale alla parete, dato da:

$$\tau_0 = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2^*} \Big|_{x_2^*=0} = \mu h g^2 \ddot{f}(0) = \frac{\mu U_\infty^{3/2}}{x_1' v^{1/2}} \ddot{f}(0) = 0.332 \left(\frac{\mu \rho U_\infty^3}{x_1'} \right)^{1/2} \quad (182)$$

cioè uguale a quanto ottenuto nel paragrafo 7.3, ma con un coefficiente numerico pari a circa 1/3 di quello ottenuto solo con un ragionamento puramente dimensionale (allo stesso modo saranno moltiplicati il coefficiente di attrito locale, la resistenza complessiva e il C_D , che avrà un coefficiente moltiplicativo pari a 0.664).

Soluzioni integrali.

La seconda possibilità per risolvere le equazioni dello strato limite è quella in cui si effettua un'integrazione delle equazioni di Prandtl e si considera quindi l'equazione mediata su tutto lo strato. Integrando la seconda delle equazioni (169), nel caso stazionario, dalla parete ($x_2=0$) fino all'esterno dello strato limite ($x_2=h$), si ottiene in forma dimensionale

$$\int_0^h \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - U_e \frac{dU_e}{dx_1} \right) dx_2 = \nu \int_0^h \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} dx_2 \quad (183)$$

avendo sostituito al gradiente di pressione quello della velocità esterna. Il termine a secondo membro è pari a

$$\nu \int_0^h \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} dx_2 = \nu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Big|_0^h = 0 - \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Big|_0 = -\frac{\tau_0}{\rho}$$

Invece a primo membro, il secondo termine diventa (indicando $u_2(x_2=h)=u_{2h}$)

$$\int_0^h u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 = u_1 u_2 \Big|_0^h - \int_0^h u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 = U_e u_{2h} - \int_0^h u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2$$

Ma dall'equazione di continuità, cioè la prima delle (169) risulta

$$u_2 = -\int_0^{x_2} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_2$$

e quindi il secondo termine della (184) diventa

$$-\int_0^h U_e \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_2 + \int_0^h u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_2$$

e la (184) può essere riscritta come

$$\int_0^h \left(2u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - U_e \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - U_e \frac{dU_e}{dx_1} \right) dx_2 = -\frac{\tau_0}{\rho}$$

cioè

$$\int_0^h \left(2u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - U_e \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - U_e \frac{dU_e}{dx_1} + u_1 \frac{dU_e}{dx_1} - u_1 \frac{dU_e}{dx_1} \right) dx_2 = -\frac{\tau_0}{\rho}$$

$$\int_0^h \left(\frac{\partial u_1^2}{\partial x_1} - \frac{\partial (U_e u_1)}{\partial x_1} + u_1 \frac{dU_e}{dx_1} (u_1 - U_e) \right) dx_2 = -\frac{\tau_0}{\rho}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^h u_1 (u_1 - U_e) dx_2 + \frac{dU_e}{dx_1} \int_0^h (u_1 - U_e) dx_2 = -\frac{\tau_0}{\rho}$$

Introduciamo ora le due quantità

$$\delta_s = \frac{1}{U_e} \int_0^\infty (U_e - u_1) dx_2, \quad \mathcal{G} = \frac{1}{U_e^2} \int_0^\infty u_1 (U_e - u_1) dx_2 \quad (184)$$

dette rispettivamente spessore di spostamento e di quantità di moto. Il primo rappresenta la distanza della quale viene spostato il campo potenziale esterno a causa della riduzione di velocità nello strato limite (infatti, come riportato in figura 34, $U_e \delta_s$ rappresenta la portata di fluido ideale, non viscoso, attraverso lo spessore dello strato limite che è proprio uguale alla portata del difetto di velocità riportata sotto il segno di integrale).

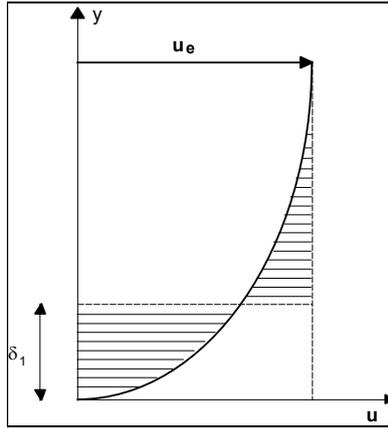


Figura 34. Significato fisico dello spessore di spostamento.

Per i calcoli pratici l'integrale viene di solito limitato ad una distanza dalla parete tale che sia completamente ritrovato il flusso esterno. Per la lastra piana vale

$$\delta_s(x'_1) \approx 1.7 \sqrt{\frac{x'_1 \nu}{U_\infty}} = 1.7 \frac{x'_1}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

cioè circa 1/3 dello spessore δ_{99} . Lo spessore di quantità di moto rappresenta invece la distanza della quale viene spostato il campo potenziale esterno a causa della riduzione di quantità di moto dovuta allo strato limite (infatti $U_e^2 \vartheta$ rappresenta la portata di quantità di moto di fluido ideale, non viscoso, attraverso lo spessore dello strato limite che è proprio uguale alla portata del difetto di quantità di moto riportata sotto il segno di integrale). Anche in questo caso l'integrale viene in pratica limitato al flusso esterno. Per la lastra piana vale

$$\vartheta(x'_1) \approx 0.66 \sqrt{\frac{x'_1 \nu}{U_\infty}} = 0.66 \frac{x'_1}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

cioè quasi dieci volte inferiore a δ_{99} . Come si può notare, non esiste quindi una definizione univoca di spessore di strato limite, ma piuttosto varie forme che vanno utilizzate a seconda del problema specifico.

Con questi due spessori è possibile scrivere la relazione integrale precedente facendo tendere h all'infinito (cosicché gli spessori non dipendano più da x_2)

$$\frac{d}{dx_1} (gU_e^2) + \frac{dU_e}{dx_1} U_e \delta_s = \frac{\tau_0}{\rho} \quad (185)$$

o anche

$$U_e^2 \frac{d\theta}{dx_1} + U_e \frac{dU_e}{dx_1} (2\theta + \delta_s) = \frac{\tau_0}{\rho} \quad (186)$$

che rappresentano due possibili forme dell'equazione di Von Karman. Si tratta di un'equazione del primo ordine (mentre quella di partenza era del secondo, ma c'è stata l'integrazione) alle derivate ordinarie che consente di mettere in relazione gli spessori con lo sforzo di taglio alla parete una volta assegnato l'andamento del campo di velocità esterno (tutte le grandezze sono funzione di x_1). Si ottiene una soluzione per quantità integrali per esempio fissando il profilo di velocità nel punto iniziale dello strato limite (anche per via polinomiale) e valutando da questo gli spessori e lo sforzo di taglio iniziali e con la (186) (o 187) ricavare come varia lungo la direzione del moto.

Nel caso della lastra piana la (187) si riduce a

$$U_e^2 \frac{d\theta}{dx_1} = \frac{\tau_0}{\rho}$$

che permette di ricavare l'evoluzione assiale dello spessore di quantità di moto, noto quello dello sforzo di taglio e viceversa. Per esempio se lo sforzo di taglio è proporzionale a $x_1^{-1/2}$ (come nella (183)), risulta che lo spessore di quantità di moto andrà come $x_1^{-1/2}$ (come in effetti già trovato).

Esercizio. Data una distribuzione lineare di velocità del tipo $u_1 = U_e (x_2/\delta)$ calcolare gli spessori di spostamento e di quantità di moto. Soluzione: applicando le (185) si ottiene $\delta_s = \delta/2$, $\theta = \delta/6$. Ripetere il calcolo per un profilo di tipo parabolico, $u_1 = U_e [2(x_2/\delta) - (x_2/\delta)^2]$.

7.6 CENNI AL CASO TURBOLENTO

Si tenga presente che quanto trovato vale nel caso laminare. Qualora invece ci si trovi nelle condizioni di flusso turbolento, cioè per numeri di Reynolds basati sulla dimensione dello strato limite pari a circa 10^3 (come già detto, il numero di Reynolds basato sulla dimensione longitudinale x_1 , sarà pari a circa $(10^3)^2$ cioè 10^6), le equazioni della fluidodinamica conterranno dei termini

addizionali dovuti alle fluttuazioni turbolente. Dal punto di vista delle conclusioni ottenute per lo strato limite il discorso fatto in precedenza resta sostanzialmente invariato e la pressione sarà sempre individuata dalla soluzione esterna. Per quello che riguarda la lastra piana, in sostituzione della (181) del caso laminare, lo spessore dello strato limite varia in funzione del numero di Reynolds con la legge

$$\delta_{99}(x'_1) \approx 0.37 \left(\frac{x'_1 V}{U_\infty} \right)^{1/5} = 0.37 \frac{x'_1}{Re_x^{1/5}} \quad (187)$$

cioè nel caso turbolento lo spessore, a parità di numero di Reynolds, è maggiore rispetto al caso laminare. Inoltre, a parità di distanza dal punto in cui comincia a svilupparsi lo strato limite, è anch'esso maggiore rispetto al caso laminare. In altre parole sono minori i gradienti di velocità tra la parete e l'esterno; questo accade perché nel caso turbolento c'è una diffusione di quantità di moto maggiore che nel caso laminare (diffusione viscosa più diffusione turbolenta). Lo sforzo viscoso alla parete avrà il contributo della parte viscosa e di quella turbolenta e vale circa

$$\tau_0 \approx 0.03 \rho U_\infty^2 \frac{1}{Re_x^{1/5}}$$

cioè con dipendenza inferiore dalla velocità rispetto al caso laminare (183) (quasi costante rispetto al numero di Reynolds). Il coefficiente di attrito per unità di apertura trasversale sarà quindi

$$C_D = \frac{\tau_0 S}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 S} \approx \frac{0.06}{Re_x^{1/5}}$$

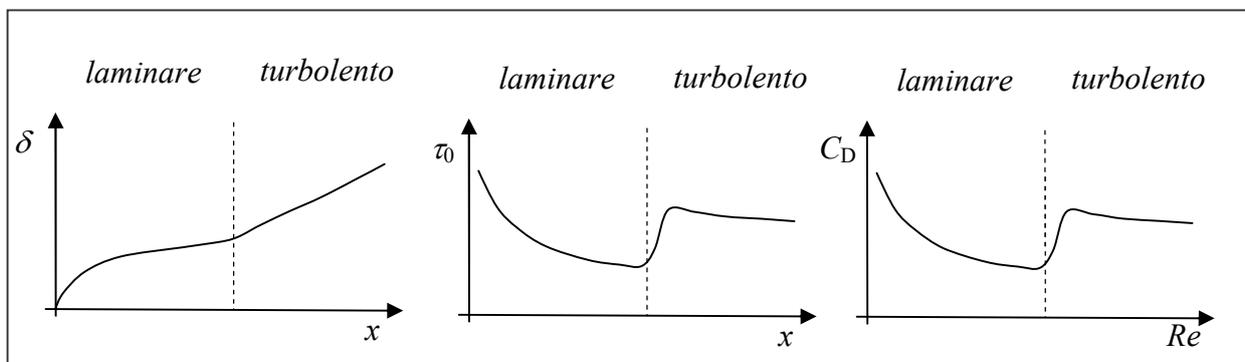


Figura 35. Andamenti dello spessore di strato limite, dello sforzo tangenziale alla parete e del coefficiente di resistenza di attrito nelle condizioni laminare e turbolenta.

cioè il coefficiente di attrito diminuisce all'aumentare del numero di Reynolds, ma molto più lentamente rispetto al caso laminare (attenzione ci si riferisce alla sola resistenza di attrito). La situazione è riassunta nella figura 35 sia per lo spessore, per lo sforzo alla parete e per il coefficiente di resistenza di attrito.

Per quanto riguarda la separazione nel caso turbolento, tenendo conto di questa diffusione turbolenta espressa dalle componenti fluttuanti della velocità, al posto della (175) si ottiene la relazione

$$\frac{dp}{dx_1} = \frac{1}{\text{Re}} \left. \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right|_{x_2=0} - \left. \frac{\partial \overline{u'_1 u'_2}}{\partial x_2} \right|_{x_2=0} . \quad (188)$$

In questa relazione anche se il gradiente di pressione risulta positivo, non è detto che il profilo di velocità medio mostri un distacco (cioè che il primo termine sia positivo) perché il secondo termine può ridurlo nuovamente ad essere negativo. In pratica questo significa che rispetto al caso laminare è necessario un gradiente di pressione maggiore affinché vi sia la separazione dello strato limite (o che a parità di gradiente di pressione la separazione è ritardata, cioè è spostata più a valle). Anche in questo caso la ragione di questo comportamento è legata alla redistribuzione di quantità di moto all'interno dello strato limite per il caso turbolento che lo rende maggiormente energetico rispetto al caso laminare.

Capitolo 8

FORZE AERODINAMICHE SU CORPI IN MOTO

8.1 FORZE NORMALI E TANGENZIALI

Le forze agenti sulla superficie di un corpo sono ovviamente determinate dal campo fluidodinamico che si instaura intorno al corpo stesso (le forze di volume non verranno considerate perché in generale non dipendenti dal campo). Queste possono quindi essere determinate facilmente solo nel caso di soluzioni analitiche, che però sono in numero molto limitato, mentre presentano molta maggiore difficoltà se sono da determinarsi attraverso soluzioni numeriche. E' però spesso possibile misurare queste forze con apparati sperimentali dedicati e con i dati così ottenuti costruire dei modelli empirici che possano essere di aiuto soprattutto in fase progettuale. Appare perciò utile riassumere esplicitamente quali sono le forze che agiscono su di un corpo immerso in una corrente fluida in moto. Come rappresentato in figura 36, immaginiamo una corrente fluida che investe un corpo con un sistema di riferimento definito. A partire dal tensore degli sforzi, $\underline{\underline{\tau}}$ introdotto nei capitoli 1 e 4, è possibile scrivere le forze di superficie come

$$\underline{F} = \int_S \underline{\underline{\tau}} \cdot \underline{n} dS$$

essendo S la superficie che contorna il corpo considerato e \underline{n} la normale uscente da esso.

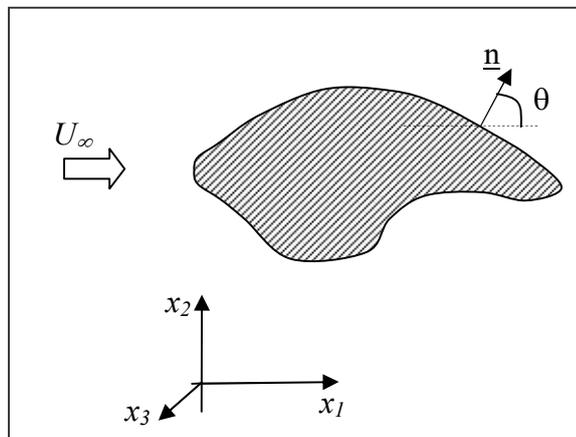


Figura 36. Schematizzazione di un corpo investito da corrente fluida.

A partire dall'espressione per il tensore degli sforzi in un fluido newtoniano (95), è possibile scomporre questa forza in due contributi principali

$$F_i = \int_S \tau_{ji} n_j dS = \int_S \left[\left(-p - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right) \delta_{ji} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] n_j dS = \int_S \left(-p - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \right) n_i dS + \int_S \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j dS$$

dove il primo integrale rappresenta le forze lungo la direzione normale al corpo (infatti le componenti della forza in direzione i sono individuate dalle componenti della normale alla superficie del corpo nella stessa direzione), mentre il secondo integrale rappresenta le forze lungo la direzione tangenziale al corpo (e infatti le componenti della forza sono individuate dalle componenti della normale alla superficie del corpo in direzione j differente da i , cioè dalle tangenti). Consideriamo separatamente ciascuno di questi termini. Il primo termine delle forze normali è dato da

$$F_i = - \int_S p n_i dS$$

e rappresenta le forze normali dovute al campo di pressione che possono essere proiettate sui tre assi assiale, verticale e trasversale (si noti che la direzione della forza è determinata dalla direzione della normale e che quindi le componenti sono date dalla proiezione della normale sugli assi coordinati) per dare sul piano (x_1, x_2)

$$D = - \int_S p \cos \theta dS \quad \text{resistenza di forma}$$

$$L = - \int_S p \sin \theta dS \quad \text{portanza (teorema di Kutta-Joukowski, } \underline{L} = -\rho u_\infty \times \Gamma)$$

e sul piano (x_1, x_3) (dove la normale è individuata dall'angolo θ')

$$Y = - \int_S p \cos \theta' dS \quad \text{forza laterale}$$

$$D = - \int_S p \sin \theta' dS \quad \text{resistenza indotta (} \underline{D}_i = -\rho u_i \times \Gamma)$$

di cui le prime due sono presenti nei flussi bidimensionali, mentre la terza e la quarta nel caso tridimensionale. La resistenza indotta è quindi causata dalla distribuzione delle pressioni lungo la direzione trasversale. Si noti che sul piano (x_2, x_3) si ottengono nuovamente la forza laterale e la

portanza dovute alla distribuzione trasversale delle pressioni. Nelle relazioni precedenti \underline{U}_I è la velocità indotta dal campo di pressione lungo la direzione trasversale e Γ la circolazione che genera la portanza (con direzione di applicazione e verso dati dalla regola della mano destra). Tutte sembrano di origine non viscosa anche se in realtà la resistenza di forma esiste solo in presenza di viscosità senza la quale non si forma la scia e quindi c'è la completa chiusura del diagramma di pressioni. Il secondo termine delle forze normali è presente nel caso di flussi compressibili ed è dato da

$$W_i = -\int_S \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_n}{\partial x_n} n_i dS$$

che rappresenta le forze normali dovute alla compressibilità del fluido che possono essere proiettate lungo gli assi (anche in questo caso le componenti coincidono con quelle della normale) e che nella direzione del moto danno origine alla cosiddetta resistenza d'onda.

Per quanto riguarda la forze tangenziali agenti sulla superficie del corpo, si può scrivere

$$F_i = \int_S \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j dS$$

In questo caso la direzione della forza coincide con quella che viene fuori tra il prodotto scalare delle componenti tangenziali del tensore degli sforzi e il versore normale alla superficie, che coincide con la direzione tangente alla superficie. Tra i gradienti di velocità sulla superficie del corpo i più elevati sono quelli relativi alla componente assiale in direzione ortogonale alla superficie, $\tau_0 = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$, che permettono di scomporre l'espressione precedente in

$$\begin{aligned} D_f &= \int_S \tau_0 \sin \theta dS && \text{resistenza di attrito} \\ L_f &= \int_S \tau_0 \cos \theta dS && \text{componente aggiuntiva di portanza} \end{aligned}$$

dove la seconda componente è in genere molto piccola (essendo in generale l'angolo θ prossimo a 90° tranne per corpi tozzi). Oltre alle forze, la distribuzione di sforzi normali e tangenziali sulla superficie di un corpo provoca anche la generazione di momenti.

Di solito si preferisce introdurre, come già visto, i coefficienti adimensionali di forza definiti come la forza divisa per la pressione dinamica per la superficie

$$C_F(Re, Ma) = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 S}$$

essendo la forza funzione sia del numero di Reynolds che del numero di Mach, lo saranno anche i coefficienti. In definitiva, supponendo che i contributi siano effettivamente separabili e gli effetti possano essere sommati, si può scrivere il coefficiente di resistenza totale come la somma di quello di resistenza di forma, d'onda, indotta e di attrito

$$C_{D_T} = C_D + C_{D_w} + C_{D_i} + C_{D_f} \quad (189)$$

Nel caso non viscoso tridimensionale sarà differente da zero il solo terzo termine, mentre nel caso non viscoso bidimensionale non vi sarà resistenza (ma vi può comunque essere portanza). Alcune tipiche situazioni sono riassunte nella figura 37.

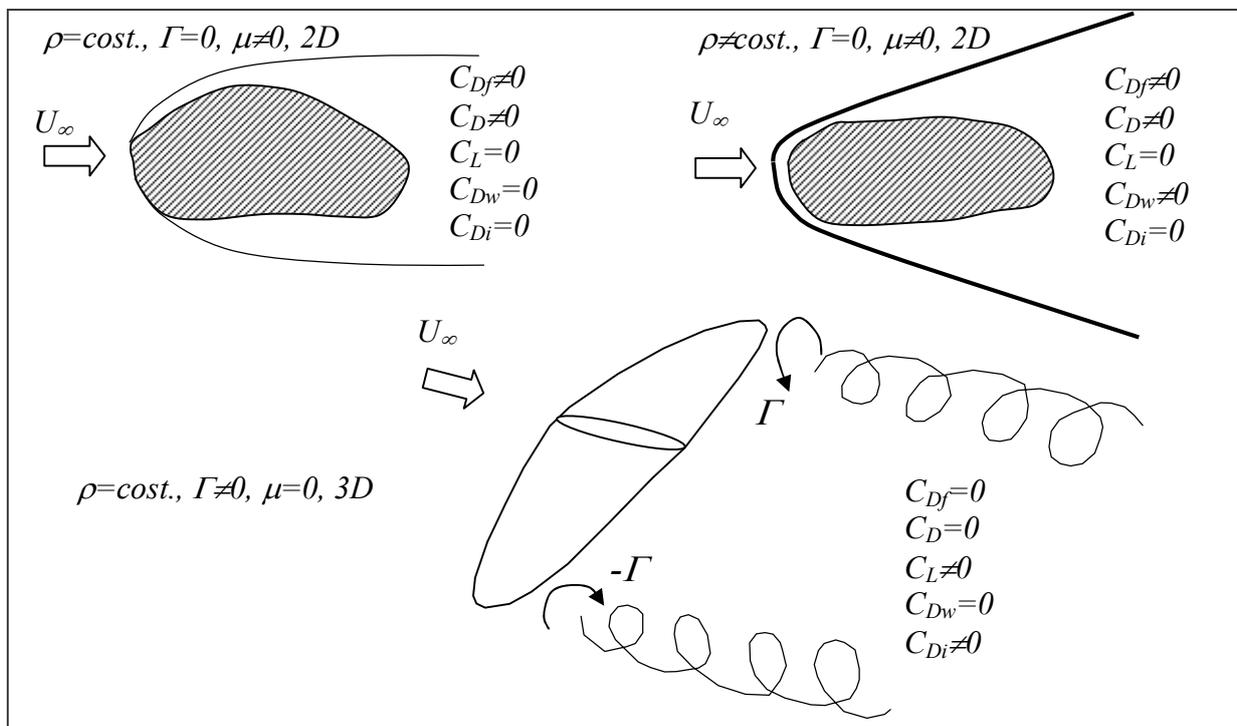


Figura 37. Alcuni esempi di corpi investiti da correnti fluide e coefficienti di resistenza risultanti.

8.2 COMPORTAMENTO IN REGIME LAMINARE E TURBOLENTO

In presenza di un flusso turbolento, le forze definite in precedenza non cambiano. Quello che cambia è il campo di velocità e pressione intorno ad un corpo così che i valori dei coefficienti sono soggetti a variazioni nei vari regimi (un esempio è quello riportato alla fine del capitolo precedente per quanto riguarda la resistenza di attrito). In generale l'andamento del coefficiente di resistenza totale nel caso incompressibile 2D (assenza di resistenza d'onda e indotta come nel caso in alto a sinistra nella figura 37) per un corpo cosiddetto tozzo, quale un cilindro usando il diametro come dimensione caratteristica, e per un corpo cosiddetto affusolato, quale una lastra piana di lunghezza L , sono riassunti nella figura 38 (in scala bilogarithmica). Nel caso del cilindro si osserva l'andamento come $1/Re$ nel regime laminare, già ottenuto nella (115) del paragrafo 5.1 (sebbene con un coefficiente numerico che dipende dallo specifico campo di moto). Questo significa che la forza cresce linearmente con la velocità del fluido. Nel regime di transizione il coefficiente di resistenza diventa circa costante e la forza quindi aumenta con il quadrato della velocità.

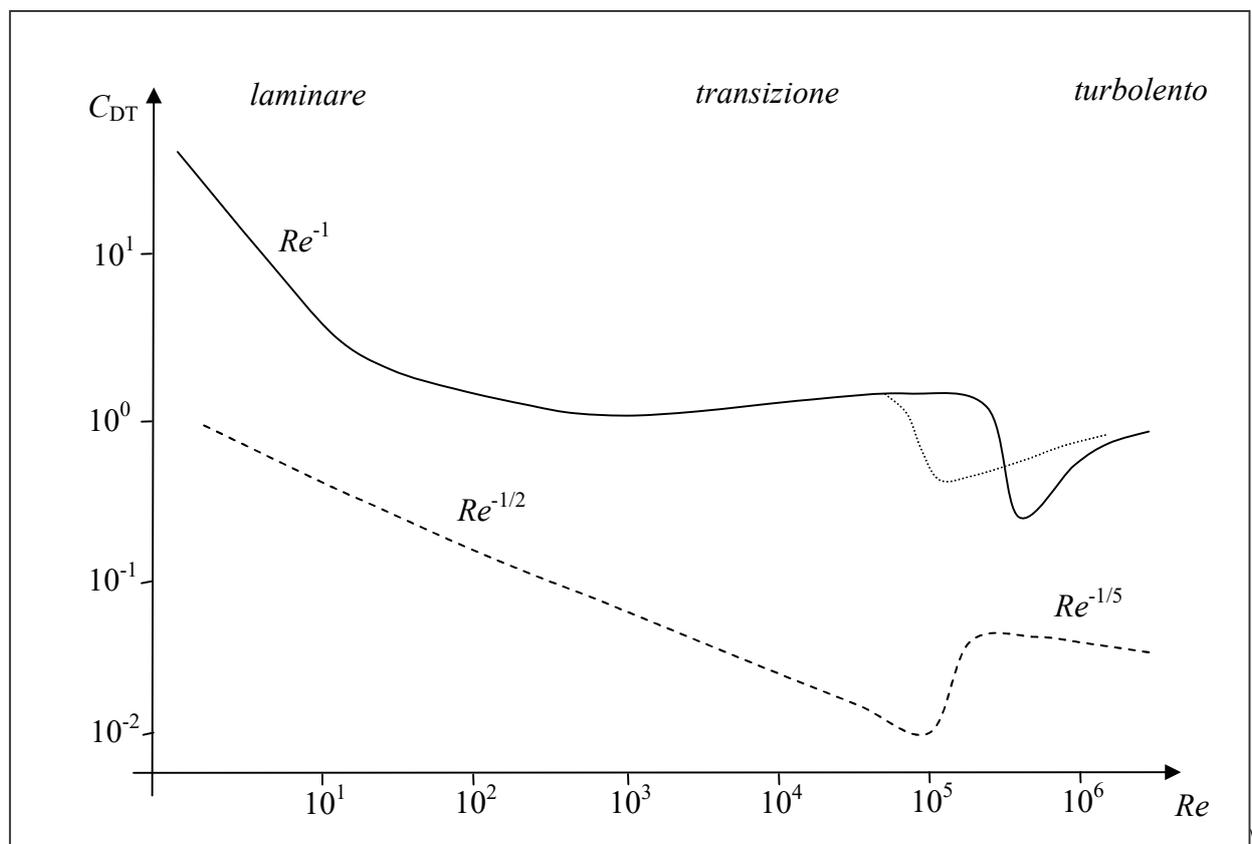


Figura 38. Andamenti del coefficiente di resistenza per un cilindro (linea continua) e per la lastra piana (linea tratteggiata) nei regimi laminare, di transizione e turbolento. I punti sono riferiti a transizione anticipata.

Un ulteriore aumento della velocità della corrente porta alla transizione al regime turbolento nel quale il coefficiente di resistenza subisce una brusca diminuzione che viene poi recuperata lentamente. Il valore del numero di Reynolds al quale avviene questa transizione dipende anche dalla scabrezza superficiale della superficie che, aumentando, permette una transizione anticipata (come nel tratto punteggiato in figura 38). Questa idea di aumentare la scabrezza superficiale per anticipare la transizione e diminuire la resistenza viene applicata nelle palline da golf, da tennis e da baseball per ottenere velocità maggiori. Per un corpo tozzo, quale il cilindro, nel caso laminare, la resistenza è sostanzialmente dominata (circa 80%) dalla resistenza di forma rispetto a quella di attrito (in turbolenza tale rapporto scende al 60%). La resistenza di forma dipende dalla forma del corpo attraverso la posizione del punto in cui avviene la separazione della corrente, cioè dove si inizia a formare la scia. Notiamo che, dalle espressioni delle forze del paragrafo precedente, risulta che la resistenza di forma è proporzionale alla pressione locale e al *coseno* dell'angolo che la normale forma con la direzione assiale, mentre quella di attrito allo sforzo alla parete e al *seno* dell'angolo. Poiché per un corpo tozzo questo angolo può essere pari a 0 o π , il contributo di forma diventa significativo (ovviamente con quello di pressione), mentre quello di attrito risulta più basso.

Per un corpo affusolato, quale la lastra piana, invece, tale angolo è prossimo a $\pi/2$ quasi ovunque sul corpo e quindi il contributo di resistenza di forma diventa basso e contemporaneamente aumenta quello di attrito. Quindi la resistenza di forma rispetto a quella di attrito ha peso inferiore al 50% ed è più importante del caso precedente la condizione di flusso laminare o turbolento. In particolare, dal capitolo 7, paragrafo 7.3, risulta una dipendenza come $Re^{-1/2}$ nel regime laminare (si noti che il numero di Reynolds è costruito con la dimensione L della lastra) e una dipendenza come $Re^{-1/5}$ nel regime turbolento (relazione (188) del paragrafo 7.6 e figura 35). Questo significa che nel regime laminare la forza di attrito è proporzionale alla velocità elevata alla 1.5, mentre nel regime turbolento risulta proporzionale alla velocità alla 1.8. Per tali corpi non è vantaggioso favorire la transizione da laminare a turbolento perché questo aumenta bruscamente la resistenza. Nella figura 39 sono riassunti i risultati per corpi di varia forma ma stessa dimensione caratteristica (i primi tre corpi), in cui il C_D varia da 2 a 0.12 con un significativo incremento della resistenza di attrito rispetto a quella di forma (dal 10% al 65%). Lo stesso valore del coefficiente di resistenza del terzo corpo (affusolato) si ottiene con un corpo tozzo anche se di dimensione caratteristica ben 10 volte minore (quarto corpo). Ciò giustifica la necessità di avere un corpo affusolato per minimizzare la resistenza. Infine per l'ultimo corpo viene mostrato il vantaggio di stimolare la transizione al regime turbolento e diminuire l'ampiezza della scia, con lo spostamento dei punti di separazione e la conseguente diminuzione del coefficiente di resistenza.

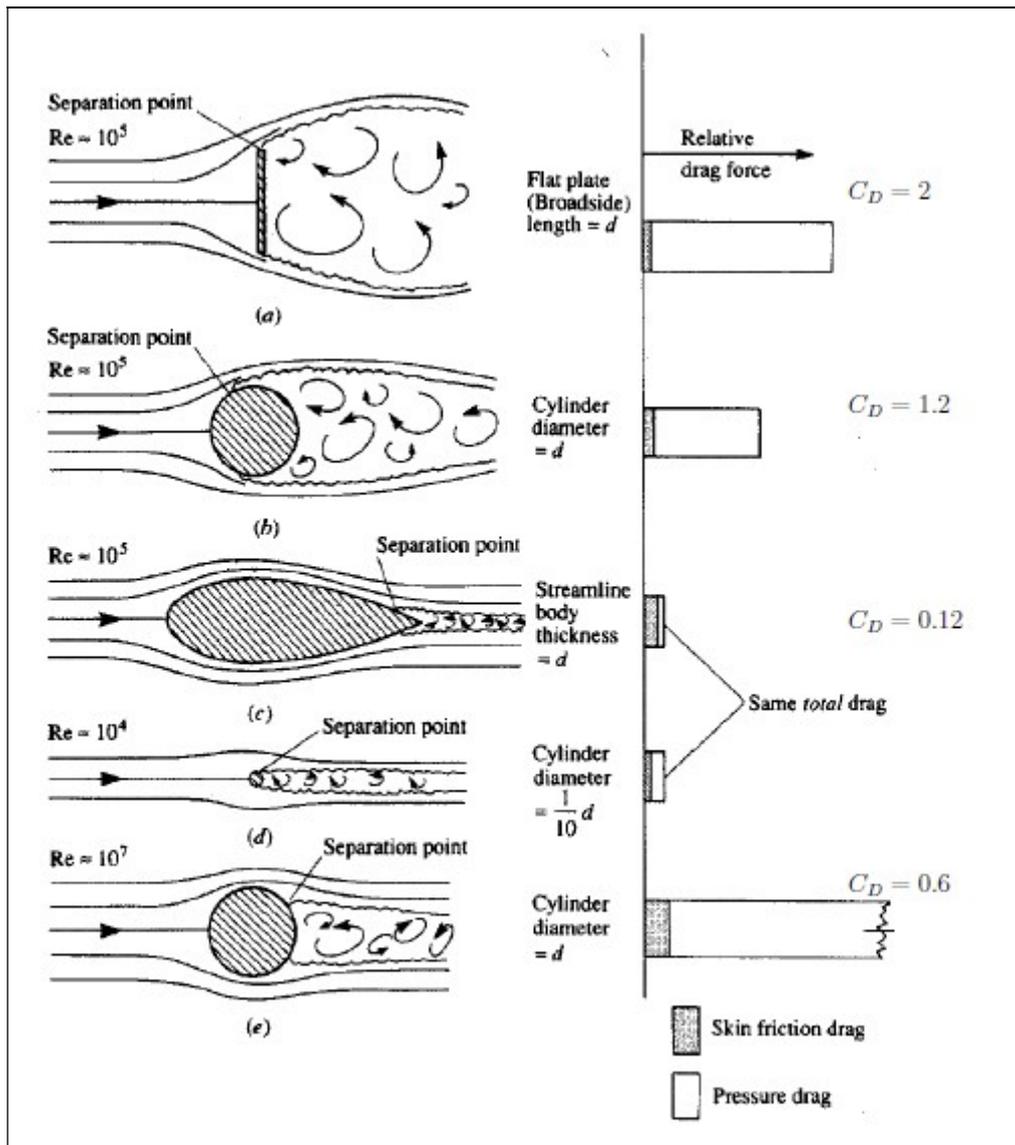


Figura 39. Valori del coefficiente di resistenza per corpi di varia forma e peso relativo di resistenza di forma (pressure drag) e di attrito (skin friction drag). Tratto da T.A. Talay, NASA Report SP-367, 1975).

Bisogna infine considerare che, come detto nel paragrafo precedente, la resistenza è anche funzione del numero di Mach. Ovviamente nel caso incompressibile tale dipendenza non esiste perché la resistenza è costante fino a circa $Ma=0.6-0.7$. Però per velocità maggiori la resistenza aumenta molto velocemente con il numero di Mach fino a raggiungere un massimo a $Ma \sim 1-1.5$ (dipendente dalla forma del corpo, ma comunque pari anche a 2.5 volte il valore del regime subsonico). Tale aumento è giustificato dall'importanza crescente della resistenza d'onda dovuta alla formazione di treni di onde d'urto nella parte anteriore e lungo il corpo stesso e che si muovono con esso. Per numeri di Mach superiori a 2 il coefficiente di resistenza diminuisce di nuovo fino ad un valore costante pari a circa 1.5 quello del regime subsonico.

8.3 COME DIMINUIRE LA RESISTENZA DI UN CORPO

Da quanto visto in precedenza, per diminuire il coefficiente di resistenza bisognerà diminuire ciascuno dei termini che compaiono nella (190). In particolare per diminuire la resistenza di forma bisognerà agire sulla forma del corpo conferendogli

- una forma arrotondata nella parte anteriore;
- una forma allungata e rastremata nella parte posteriore per evitare separazione del flusso.

Esempi di tali corpi che minimizzano la resistenza di forma sono i profili alari, le autovetture sportive e in generale tutti i corpi affusolati. In alternativa, qualora per altri motivi non sia possibile una forma allungata, ma sia necessario troncare il corpo o comunque in tutti i casi in cui si provoca una separazione, si può intervenire attraverso

- dispositivi che aumentino localmente il campo di pressione;
- dispositivi che evitino completamente o ritardino la separazione;
- dispositivi che favoriscono la transizione al regime turbolento.

Esempi dei primi sono il soffiaggio o l'aspirazione di fluido immediatamente a valle del punto di separazione in modo da aumentare localmente la velocità, diminuire la pressione ed evitare il gradiente di pressione avverso che provoca la separazione. Anche appendici aerodinamiche, i cosiddetti ipersostentatori ("flap e slat"), sono utilizzate in impieghi aeronautici e automobilistici per indirizzare flusso veloce sulla superficie alare e ritardare lo stallo (sebbene con un aumento della resistenza di attrito dovuto alla maggiore superficie esposta alla corrente). Esempi dei secondi sono invece gli elementi curvi che si inseriscono sulla parte anteriore di autocarri e gli alettoni posteriori di autovetture tipo monovolume. Esempi del terzo tipo di dispositivi sono asperità superficiali che favoriscano la transizione dal regime laminare a quello turbolento, che, attraverso il maggiore mescolamento, provocano lo spostamento verso valle dei punti di separazione e quindi una minore ampiezza della scia. Si è già fatto l'esempio delle palline da golf, tennis e baseball così come anche accade sulla superficie immersa di imbarcazioni a vela da competizione che viene resa scabra mutuando ciò che avviene sull'epidermide di molti animali marini veloci (squali, delfini).

Per diminuire la resistenza di attrito, sarà necessario invece diminuire quanto possibile la superficie del corpo e questo requisito è in contrasto con quello precedente di avere corpi allungati

nella parte posteriore. Bisognerà quindi di volta in volta considerare fino a quale lunghezza risulti conveniente allungare il corpo per ridurre la resistenza di forma e non incrementare troppo quella di attrito. Sarà anche necessario diminuire quanto più possibile il gradiente di velocità alla parete, mantenendo, per quanto possibile, condizioni di regime laminare, visto che tale gradiente risulta maggiore nel regime turbolento. Di nuovo questo requisito risulta in contrasto con quanto necessario per diminuire la resistenza di forma e bisognerà adottare dei compromessi relativi al caso specifico.

Per diminuire la resistenza indotta, bisognerà cercare di diminuire la circolazione di fluido e le velocità indotte dovute alla forma tridimensionale del corpo (vortici di estremità su superfici alari). Poiché la semplice diminuzione di tutta la circolazione causerebbe la perdita di portanza (si veda dopo), sarà necessario adottare dispositivi che la limitino nella zona di estremità. Tali dispositivi, utilizzati nell'industria aeronautica, automobilistica sportiva ed energetica, consistono in elementi incurvati nella direzione verticale di varia forma e dimensioni dette alette di estremità o "winglets" che hanno lo stesso effetto di un elevato allungamento alare ma senza gli eccessivi svantaggi strutturali (infatti un elevato allungamento alare, come nel caso degli alianti, minimizza la resistenza indotta). Lo svantaggio nell'utilizzo di tali dispositivi è che viene comunque aumentata la superficie esposta alla corrente con conseguente aumento della resistenza di attrito. Alcuni esempi di applicazioni industriali di tali dispositivi sono forniti nella figura 40. Anche la forma in pianta dell'ala può minimizzare la resistenza indotta e in particolare la forma ottimale è la pianta ellittica (si faccia per esempio riferimento agli aerei da caccia inglesi Spitfire durante la seconda guerra mondiale).



Figura 40. Esempi di "winglets" su aerei, autovetture e generatori eolici (Enerkon E82). Tratti da Wikipedia.

Per quanto riguarda la riduzione di resistenza d'onda in regime compressibile, sarà necessario modificare il più possibile la forma anteriore del corpo per evitare il più possibile la formazione di un'onda d'urto anteriore. Da questo punto di vista un'onda d'urto meno intensa si ottiene con un corpo di forma anteriore appuntita piuttosto che arrotondata, ma in tale condizione l'onda d'urto è più prossima alla superficie del corpo stesso.

8.4 COME AUMENTARE LA PORTANZA DI UN CORPO

Per aumentare la portanza (o la deportanza) di un corpo, dal teorema di Kutta-Jukowski del capitolo 6, dobbiamo o aumentare la velocità della corrente fluida (ma ciò non è sempre possibile e comunque comporta un aumento anche di tutte le forme di resistenza) oppure aumentare la circolazione intorno al corpo stesso o la superficie del corpo. Si noti che tale aumento di circolazione aumenta anche la circolazione e le velocità indotte nella scia aumentando così la resistenza indotta. Poiché la circolazione intorno al corpo dipende da quanto si riesce a rendere differente la velocità sulla parte superiore (dorso) e inferiore (ventre) del corpo, sono possibili queste soluzioni:

- agire sulla forma posteriore del corpo per renderla molto affusolata;
- agire sulla forma complessiva del corpo;
- agire sul cosiddetto angolo di incidenza della corrente indisturbata rispetto al corpo;
- mettere in rotazione il corpo stesso;
- aumentare la superficie portante utilizzando dispositivi quali ipersostentatori.

I dispositivi che utilizzano queste soluzioni sono soprattutto profili e ali di derivazione aeronautica impiegati al giorno d'oggi nelle più svariate applicazioni (carrozzerie, alettoni e spoiler automobilistici, appendici, derive, timoni e vele in campo navale, turbine e pale per applicazioni energetiche e persino alette di valvole cardiache artificiali in applicazioni biomediche).

Il primo requisito è fondamentale in quanto permette l'instaurarsi di una circolazione differente da zero anche in un corpo non rotante, cosa che non è possibile in un corpo senza la parte terminale posteriore (bordo di uscita) affusolata. Infatti è proprio questo punto di discontinuità che evita l'aggiramento del bordo di uscita da parte della corrente fluida e permette l'instaurarsi di una

circolazione differente da zero. Anche se la portanza di un corpo può essere ricavata da una teoria puramente potenziale, gli effetti della viscosità intervengono indirettamente nella teoria attraverso la cosiddetta condizione di Kutta che viene imposta al bordo di uscita: il punto di ristagno posteriore deve trovarsi in corrispondenza del bordo di uscita stesso. In altre parole, un corpo non è portante se non ha un bordo di uscita affusolato.

Così impostato il bordo di uscita, la circolazione può essere ulteriormente aumentata (o diminuita) aumentando (o diminuendo) la curvatura del corpo stesso. A parità di condizioni della corrente incidente (velocità e angolo di incidenza), un corpo con linea media incurvata può presentare un significativo aumento della portanza (dal 20% al 40%) in confronto ad un corpo simmetrico rispetto alla direzione di provenienza della corrente fluida.

Come terza possibilità, se consideriamo un corpo portante, è possibile aumentarne in modo significativo la portanza aumentando l'angolo di incidenza della corrente fluida cioè ponendolo ad un angolo di inclinazione rispetto alla corrente differente da zero. In pratica, per evitare la separazione del flusso e quindi un drammatico aumento della resistenza, è necessario limitare tali angoli entro i 10° - 15° . Ovviamente il discorso risulta speculare nel caso in cui si voglia aumentare la deportanza del corpo.

La messa in rotazione del corpo stesso fornisce direttamente la circolazione necessaria a generare la portanza tramite l'effetto Magnus. Come visto nel capitolo 6, questa può essere utilizzata anche per corpi tozzi quale il cilindro anche se la circolazione e quindi la portanza ottenuta saranno sempre inferiori a quelle di un corpo portante (tranne per angoli di incidenza di quest'ultimo inferiori a qualche grado). Questa situazione è quella che si incontra in molte discipline sportive che prevedono un pallone (sferico o meno) nelle quali viene dato "l'effetto" per produrre una deviazione dalla traiettoria rettilinea del corpo. Il discorso risulta più o meno simile nel gioco del frisbee e con qualche complicazione in più nel caso del boomerang. In questi due ultimi casi il corpo in questione non è tozzo ma anzi portante generandosi così un'interazione tra direzione di rotazione del corpo e direzione di avanzamento. La possibilità di sfruttare la rotazione di un corpo portante per convertire il moto rotatorio in moto di avanzamento (o comunque in spinta) viene sfruttata negli elicotteri, nei sistemi propulsivi rotanti assiali (ventilatori, turbine e compressori) e nelle turbine eoliche.

Infine è possibile aumentare la portanza ricorrendo a dispositivi aggiuntivi quali gli ipersostentatori. Come già visto questi permettono di evitare il fenomeno dello stallo attraverso la interazione della corrente fluida con quella proveniente dall'interstizio tra dispositivo e superficie del corpo anche se con qualche svantaggio dal punto di vista della resistenza di attrito. Conferendo

a questi dispositivi delle forme portanti, è possibile aumentare la superficie portante complessiva e realizzare un aumento complessivo della portanza (sebbene a scapito della resistenza) in quelle condizioni in cui la velocità tende a diminuire fino a provocare lo stallo (fasi di decollo e atterraggio di un aeromobile). In questo modo si riescono ad ottenere incrementi della portanza anche molto significativi (dal 50% al 100%).

Alcune delle condizioni riportate in precedenza sono riassunte nel diagramma della figura 41 dove si riporta il coefficiente di portanza in funzione dell'angolo di incidenza per corpi di varia forma.

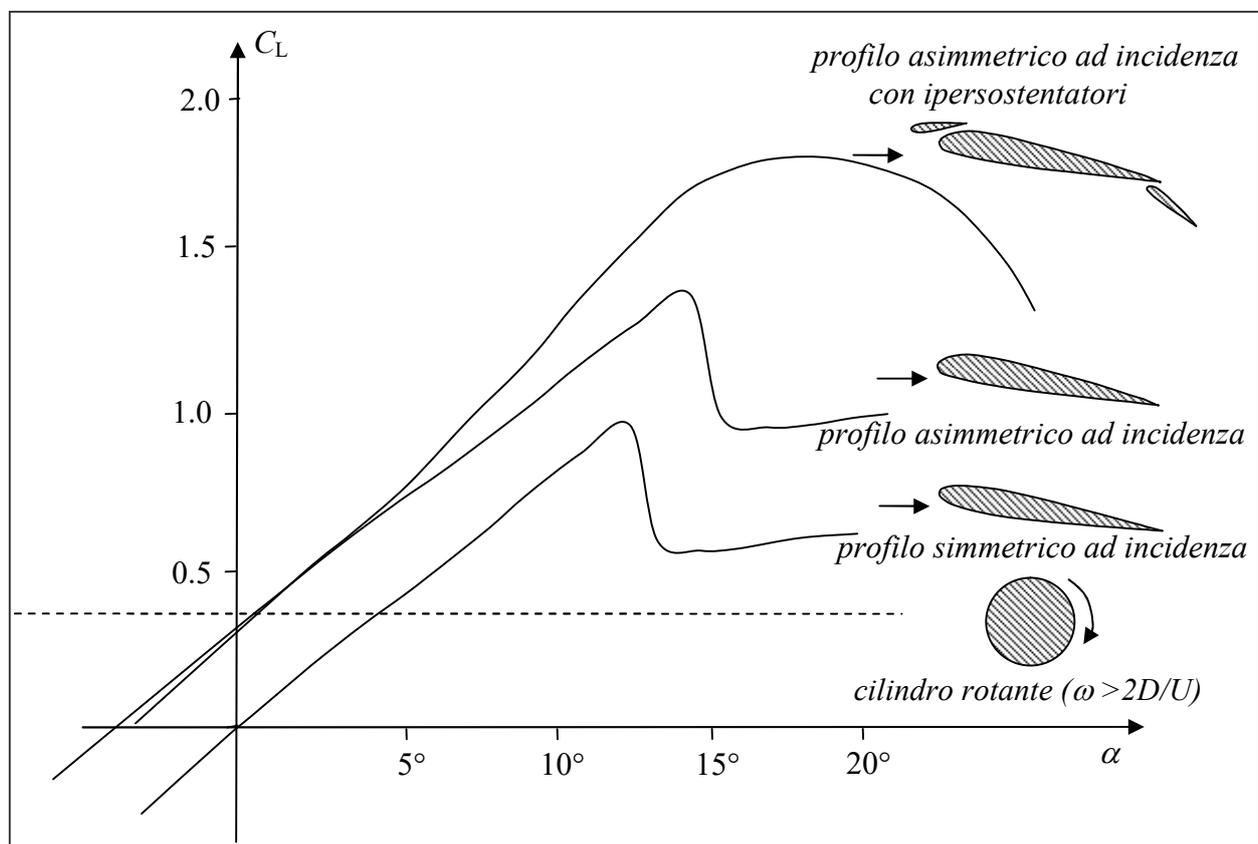


Figura 41. Andamenti del coefficiente di portanza per un cilindro rotante (linea tratteggiata) e profili di varia forma al variare dell'angolo di incidenza.

Capitolo 9

FLUSSI COMPRESSIBILI

9.1 FORMULAZIONE DEL PROBLEMA

Come visto nel secondo e quarto capitolo, sono detti compressibili quei flussi nei quali le variazioni di pressione dovute al campo di moto generano delle variazioni di densità non trascurabili rispetto al valore della densità indisturbata. In generale i liquidi sono poco compressibili (cioè la densità non dipende dal campo di pressione) e per i loro moti è pienamente valida l'ipotesi di incompressibilità. Nei gas invece la condizione di compressibilità o meno dipende dallo stato di moto, cioè dalla velocità della corrente fluida. In particolare il riferimento importante per definire quando la velocità sia alta o bassa è rappresentato dalla velocità del suono definita nel capitolo 2, relazione (30) qui riportata, come la radice della variazione di pressione rispetto alla densità

$$c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)^{1/2}$$

E' immediato notare che nel caso in cui il campo di densità sia indipendente da quello di pressione ($\partial\rho/\partial p \rightarrow 0$) allora la velocità del suono tende a diventare infinitamente alta, $c \rightarrow \infty$. Questa condizione corrisponde al caso incompressibile come si può facilmente verificare scrivendo esplicitamente la derivata sostanziale della densità in termini della velocità del suono, come già fatto nel ricavare l'equazione dell'energia nel capitolo 4,

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial\rho}{\partial x_i} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{u_i}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

che tende a zero per $c \rightarrow \infty$, confermando che la densità non varia né nel tempo né nello spazio (e lasciando il solo termine nella divergenza della velocità uguale a zero nell'equazione di

conservazione della massa). Questo fatto non esclude che dal punto di vista termodinamico la densità non possa comunque variare localmente come funzione della temperatura del fluido.

Nei casi in cui invece la densità sia funzione del campo di pressione (velocità del suono finita), non è più possibile trascurarne le variazioni e l'equazione di conservazione della massa conterrà anche il termine in derivata sostanziale della densità scritto in precedenza. Allo stesso modo saranno modificate le equazioni di Navier-Stokes con l'inserimento del termine contenente la divergenza della velocità (capitolo 4). Inoltre, sarà necessario aggiungere un'ulteriore equazione per la densità (o temperatura) cioè l'equazione dell'energia insieme all'equazione di stato.

9.2 PRECISAZIONI SULLA VELOCITA' DEL SUONO

La relazione (30) del capitolo 2 può essere facilmente ottenuta a partire dai principi di conservazione e bilancio applicati ad un regime di moto compressibile. Consideriamo un'onda piana di disturbo infinitesimo del campo di pressione, dp , in moto nella direzione positiva dell'asse x_1 con velocità c ; questa genererà variazioni infinitesime di densità, $d\rho$, e di velocità del fluido, du , come rappresentato in figura 42. Tale onda è detta onda di compressione, ma il discorso risulta equivalente se riferito ad un'onda che comporti una diminuzione di pressione (che convenzionalmente si muoverà quindi nel verso negativo dell'asse), cioè ad un'onda di espansione. In un sistema di riferimento fermo con il fluido mentre l'onda si muove il fenomeno appare non stazionario con le quantità incrementate a monte (dietro l'onda) e quelle indisturbate a valle (di fronte all'onda). Invece in un sistema di riferimento in moto con l'onda il fenomeno appare stazionario con la perturbazione di velocità che risale verso monte.

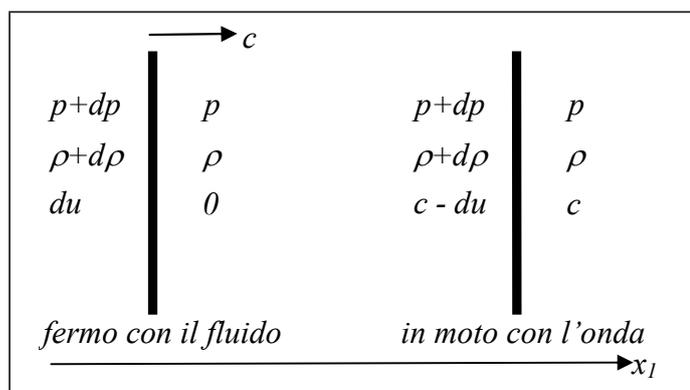


Figura 42. Onda di compressione e grandezze fluidodinamiche a cavallo dell'onda in un sistema di riferimento fermo con il fluido (a sinistra) e in moto con l'onda stessa (a destra).

In quest'ultimo sistema di riferimento la conservazione della massa tra la parte a monte e a valle dell'onda permette di ottenere a meno di infinitesimi del secondo ordine

$$\rho c = (\rho + d\rho)(c - du) \approx \rho c - \rho du + cd\rho$$

cioè

$$\rho du = cd\rho$$

Sempre nello stesso sistema di riferimento il bilancio della quantità di moto rispetto al campo di pressione permette di ottenere

$$p - (p + dp) = \rho c [(c - du) - c]$$

cioè

$$dp = \rho c du$$

e quindi mettendo insieme le due relazioni ottenute si ottiene proprio la relazione (30) del capitolo 2. Nello stesso capitolo si è anche visto che nel caso di gas isentropico (in realtà già ipotizzato in per il precedente procedimento in quanto si è assunto un disturbo infinitesimo che si mantiene tale) la velocità del suono è legata alla sola temperatura del fluido tramite la relazione (36).

9.3 CLASSIFICAZIONE DEI MOTI COMPRESSIBILI

Come già visto nell'adimensionalizzazione delle equazioni del capitolo 4 e del paragrafo 5.4, il parametro che governa l'importanza dei termini contenenti gli effetti di compressibilità è proprio il numero di Mach, $Ma = u/c$, che permette di distinguere tra i vari regimi di moto. Poiché la velocità che compare a numeratore in tale parametro è funzione del punto e dell'istante considerato, così come la velocità del suono (dipendendo da pressione e densità), è chiaro che la classificazione che segue è da riferirsi ad ogni singolo punto anche se generalmente, come per gli altri numeri caratteristici si usa riferirsi alla corrente indisturbata a monte, $Ma_\infty = U_\infty/c_\infty$.

Flussi subsonici incompressibili, $Ma_\infty < 0.3$

Sono quelli per i quali gli effetti della compressibilità sono del tutto trascurabili e si possono considerare le equazioni del caso incompressibile trascurando completamente le variazioni di densità (che a questo punto diventa una costante a meno di variazioni termodinamiche). I moti di gas in queste condizioni sono del tutto analoghi a quelli dei liquidi e sono riscontrabili in molte applicazioni ingegneristiche aeronautiche, automobilistiche, energetiche, biomeccaniche e navali.

Flussi subsonici compressibili, $0.3 < Ma_\infty < 1$

Sono quelli per i quali gli effetti della compressibilità non sono trascurabili, pur non diventando preponderanti. Nelle equazioni si dovranno considerare anche le variazioni di densità come per esempio si è già visto nel caso del punto di ristagno anteriore valutato attraverso l'equazione di Bernoulli con gli effetti di compressibilità nel capitolo 6. Per numero di Mach della corrente indisturbata maggiore di 0.7, è già possibile la formazione di onde d'urto nelle zone in cui il numero di Mach locale risulti maggiore dell'unità. E' comunque possibile ottenere delle forme semplificate delle equazioni sotto ipotesi di piccole perturbazioni. Questi regimi di moto si presentano negli aerei in volo di crociera, nella propulsione e in sistemi utilizzati nelle applicazioni energetiche quali le turbine e le turbomacchine.

Flussi transonici, $Ma_\infty \approx 1$

Sono quelli in cui, pur essendo il numero di Mach della corrente indisturbata pari a 1, vedono il permanere locale di zone in cui il flusso può ancora essere subsonico e di zone in cui è invece già supersonico ($Ma > 1$). La distribuzione di tali zone è dipendente dalla forma geometrica del corpo investito dalla corrente fluida e dalle condizioni di contorno. Sicuramente nelle zone in cui il numero di Mach è maggiore dell'unità vi sarà la formazione di onde d'urto in corrispondenza di condizioni di compressione. Le equazioni non possono essere risolte con semplificazioni, ma solo nella loro forma completa. Queste condizioni, come quelle relative al punto seguente, si incontrano in aerei militari, missili e sistemi propulsivi.

Flussi transonici, $4 > Ma_\infty > 1$

Questi flussi sono teoricamente tutti quelli nei quali gli effetti di compressibilità e variazione di densità diventano preponderanti, aventi numero di Mach superiore all'unità. In pratica però ci si riferisce a questa condizione come a quella in cui il numero di Mach non è eccessivo e possono essere adottate semplificazioni nella forma di flusso irrotazionale e piccole perturbazioni che

permettono di ottenere soluzioni in forma esplicita. Sono sicuramente presenti onde d'urto in tutte le zone del campo dove il campo di moto provoca il realizzarsi di condizioni di compressione.

Flussi ipersonici, $Ma_\infty \geq 5$

Questi flussi richiedono una trattazione differente rispetto a quelli supersonici e sono perciò classificabili in maniera autonoma. In queste condizioni il campo di temperatura in prossimità della superficie di corpi risulta così elevato da provocare fenomeni di ionizzazione delle molecole del gas che non può più essere considerato né perfetto, né irrotazionale. Queste condizioni sono quelle che tipicamente si incontrano nelle condizioni di lancio o rientro in atmosfera di velivoli spaziali.

9.4 ONDE D'URTO

Nel paragrafo 9.2 si è considerata un'onda piana e si è esaminata l'evoluzione di un disturbo del campo di densità e pressione che si propaga con la velocità del suono (tale disturbo può essere generato per esempio da un corpo in moto). In generale però un tale tipo di disturbo viene generato a partire da una sorgente puntiforme P e l'onda risultante assume le sembianze di un'onda sferica che si propaga in tutte le direzioni (nel caso bidimensionale quest'onda si ridurrà ad un'onda cilindrica). Durante la propagazione, l'intensità dell'onda (energia per unità di superficie) andrà diminuendo a causa del maggiore volume (la maggiore superficie nel caso cilindrico) coinvolto, ciò che non accade nel caso di onda piana. Se consideriamo la causa del disturbo in quiete, l'onda si allargherà nel tempo, alla velocità del suono, secondo cerchi concentrici (per semplicità mettiamoci nel caso piano, ma il discorso risulterà equivalente anche in un dominio tridimensionale) centrati nel punto stesso come evidenziato nella figura 43 a sinistra.

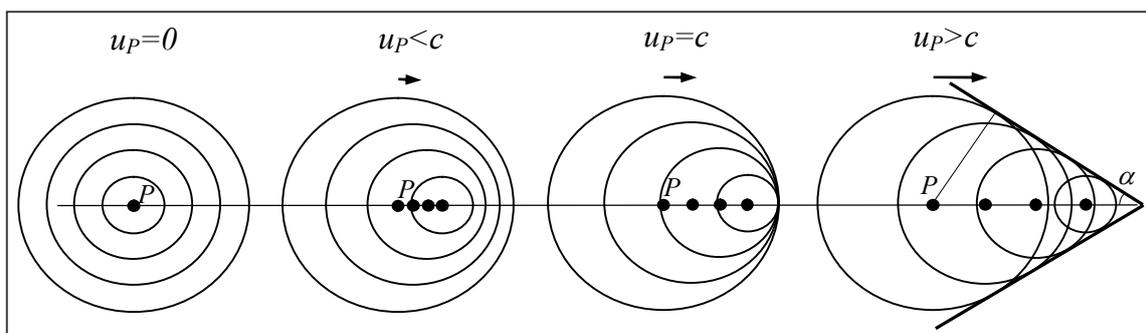


Figura 43. Propagazione di un'onda sferica nei regimi subsonico, transonico e supersonico.

Se la sorgente del disturbo è in moto ad una velocità inferiore a quella del suono nel mezzo (numero di Mach minore dell'unità) i fronti d'onda che trasportano i disturbi tenderanno a accumularsi nella direzione e verso del moto senza però sovrapporsi. Si ricordi che le onde di compressione, quali quelle delle figure 42 e 43, trasportano aumenti di densità e pressione (seppur infinitesimi), che si propagano da monte verso valle. In questo caso di velocità subsonica, il disturbo, che si propaga a velocità del suono, si risente a valle prima che sopraggiunga il punto P in moto. Nel caso in cui la velocità del punto che provoca la perturbazione diventi paragonabile alla velocità del suono nel mezzo (numero di Mach pari a 1), i disturbi coalesceranno di fronte al punto in moto e in quel punto le sovrappressioni e sovradensità si potranno sommare dando origine ad un disturbo macroscopico. Nella regione a monte di questo punto (cioè dietro alla sorgente del disturbo in moto) si propagheranno i disturbi, mentre nella regione a valle (davanti alla sorgente) il fluido risulta indisturbato. Quindi, in questo moto sonico, i disturbi si risentiranno a valle contemporaneamente al sopraggiungere del punto P che origina il disturbo stesso. Infine, qualora la velocità del punto in moto sia maggiore della velocità del suono (numero di Mach maggiore dell'unità) il disturbo si propagerà in avanti e le onde emesse nel tempo saranno tangenti a due piani che ad ogni istante si originano dal punto in moto verso la sua scia. Questi piani sono detti onde di Mach e delimitano la zona nella quale sono confinati i disturbi che, quindi, per un flusso supersonico seguono sempre il punto P che li origina. Il semiangolo che tali piani formano (angolo di Mach) sarà dato da

$$\sin \alpha = \frac{c\Delta t}{u\Delta t} = \frac{1}{Ma}$$

ed è quindi tanto minore quanto maggiore il numero di Mach (si noti anche che dalla relazione precedente se $Ma \rightarrow 1$ l'angolo tende a $\pi/2$ e che tale angolo non esiste per $Ma < 1$).

Sebbene i disturbi di cui si è trattato finora siano stati considerati infinitesimi, è chiaro che in pratica questi saranno generati da corpi finiti e avranno quindi carattere finito e daranno origine nel caso supersonico a vere e proprie discontinuità dei campi di pressione, densità e velocità. Tali discontinuità, in moto alla velocità del suono sono dette onde d'urto e hanno spessori effettivamente quasi infinitesimi (inferiore al micrometro). Le onde d'urto si incontrano in tutti i flussi transonici e supersonici sia esterni (aerei supersonici) che interni (prese d'aria, ugelli e compressori). Queste condizioni sono caratterizzate da alti valori della velocità e quindi da elevati numeri di Reynolds (oltre che di Mach) che permettono ragionevolmente di utilizzare

l'approssimazione di flusso ideale fatta nel capitolo 6 (l'onda d'urto avrà in questo caso uno spessore ideale nullo). Questo però non sarà possibile in corrispondenza delle onde d'urto stesse che rappresenteranno quindi delle discontinuità localizzate (spessore nullo) che, come detto nel capitolo 4, richiedono l'utilizzo delle equazioni nella forma integrale.

9.5 GRANDEZZE DI RISTAGNO E CRITICHE

Come appena detto, per tenere conto delle discontinuità dei campi di pressione, densità e velocità presenti nel campo, le equazioni della fluidodinamica, nei casi in cui gli effetti di compressibilità siano importanti o addirittura preponderanti, devono essere considerate nella loro forma integrale anziché differenziale. Andremo a considerare dei flussi compressibili, non viscosi (l'ipotesi è valida visto l'elevato valore del numero di Reynolds), senza scambi di calore, senza forze esterne e in condizioni stazionarie. Sotto queste ipotesi le equazioni di conservazione della massa, bilancio di quantità di moto e conservazione dell'energia (capitoli 4 e 5, equazioni (62), (84) e (121)) possono essere riscritte come

$$\begin{aligned} \int_V \underline{\nabla} \cdot (\rho \underline{u}) dV &= 0 \\ \int_V \rho (\underline{u} \cdot \underline{\nabla}) \underline{u} dV &= - \int_V \underline{\nabla} p dV \\ u^2/2 + p/\rho \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) &= k_2 \end{aligned} \quad (190)$$

cioè 5 equazioni nelle 5 incognite densità, velocità e pressione (la temperatura può essere ricavata dall'ultima equazione utilizzando l'equazione di stato e l'espressione per l'energia interna).

Notiamo che dalla terza relazione precedente possiamo ottenere le quantità nel punto di ristagno in maniera analoga a quanto fatto nel paragrafo 5.3 (relazione (124)) per la pressione, assumendo l'ipotesi di flusso isentropico

$$p_t = p_s \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) Ma_s^2 \right]^{\gamma/(\gamma-1)}$$

D'altra parte, essendo nel caso isentropico $p = k\rho^\gamma$, si può anche scrivere

$$\rho_t = \rho_s \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) Ma_s^2 \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

che permette di trovare la densità di ristagno. Per quanto riguarda la temperatura, direttamente dall'equazione di Bernoulli nella forma (191), applicata in un punto statico e in un punto di ristagno (totale) si trova

$$c_s^2 Ma_s^2 / 2 + p_s / \rho_s \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) = p_t / \rho_t \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \quad (191)$$

cioè, utilizzando le relazioni $c_s^2 = \gamma p_s / \rho_s = \gamma RT_s$ e $p_t / \rho_t = RT_t$

$$\left(\frac{\gamma-1}{2\gamma} \right) \gamma RT_s Ma_s^2 + RT_s = RT_t$$

$$T_t = T_s \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) Ma_s^2 \right]$$

che esprime la temperatura di ristagno (identicamente viene espressa la velocità del suono di ristagno al quadrato che è linearmente proporzionale alla temperatura). La temperatura totale rappresenta la somma di una parte termica e di una parte meccanica, proporzionale alla velocità del flusso. Se calcoliamo la terza delle (191) per il caso particolare di numero di Mach unitario, otteniamo i cosiddetti valori critici (indicati con pedice c). Per la temperatura, dalla (192)

$$c_s^2 Ma_s^2 / 2 + p_s / \rho_s \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) = c_c^2 / 2 + p_c / \rho_c \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right)$$

cioè

$$\left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \gamma RT_s Ma_s^2 / 2 + RT_s = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma} \right) \gamma RT_c / 2 + RT_c$$

$$T_c = T_s \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) Ma_s^2 \right] \left(\frac{2}{\gamma+1} \right) = T_t \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)$$

e così per pressione e densità

$$p_c = p_s \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) Ma_s^2 \right]^{\gamma/\gamma-1} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\gamma/\gamma-1} = p_t \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\gamma/\gamma-1}$$

$$\rho_c = \rho_s \left[1 + \left(\frac{\gamma-1}{2} \right) Ma_s^2 \right]^{\gamma/\gamma-1} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\gamma/\gamma-1} = \rho_t \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\gamma/\gamma-1}$$

9.6 FLUSSI QUASI UNIDIMENSIONALI STAZIONARI

Un caso particolarmente semplice è quello dei flussi quasi unidimensionali (direzione x_1), nei quali c'è un'unica componente di velocità e le equazioni precedenti si riducono a

$$\int_V \frac{d}{dx_1} (\rho u_1) dA dx_1 = 0$$

$$\int_V \rho u_1 \frac{du_1}{dx_1} dA dx_1 = - \int_V \frac{dp}{dx_1} dA dx_1 \quad (192)$$

$$u_1^2/2 + p/\rho \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) = k_2$$

dove $dV=dA dx_1$ con dA che rappresenta la generica sezione infinitesima perpendicolare alla direzione x_1 . Consideriamo il caso specifico del flusso in un condotto con sezione variabile lungo l'asse, $A=A(x_1)$ come indicato nella figura 44. Questo flusso è detto quasi-unidimensionale perché si considera in prima approssimazione solo la componente di velocità lungo l'asse del condotto pur essendoci una variazione della sezione del condotto che darebbe origine ad una componente perpendicolare. L'approssimazione risulta valida finché la sezione non resta costante ma varia lentamente lungo l'asse. Questo tipo di configurazione trova applicazione nelle prese d'aria, negli ugelli e i diffusori in regime transonico e supersonico. Sotto l'ipotesi di quasi-unidimensionalità, è possibile definire delle quantità mediate nell'intera sezione, per esempio per la densità

$$\bar{\rho}(x_1) = \frac{1}{A(x_1)} \int_A \rho(x_1, x_2, x_3) dA = \frac{1}{A(x_1)} \int_A \rho(x_1, x_2, x_3) dx_2 dx_3$$

Essendo la scelta di dei limiti di integrazione lungo x_1 arbitraria, la prima delle (193) assumerà quindi la forma

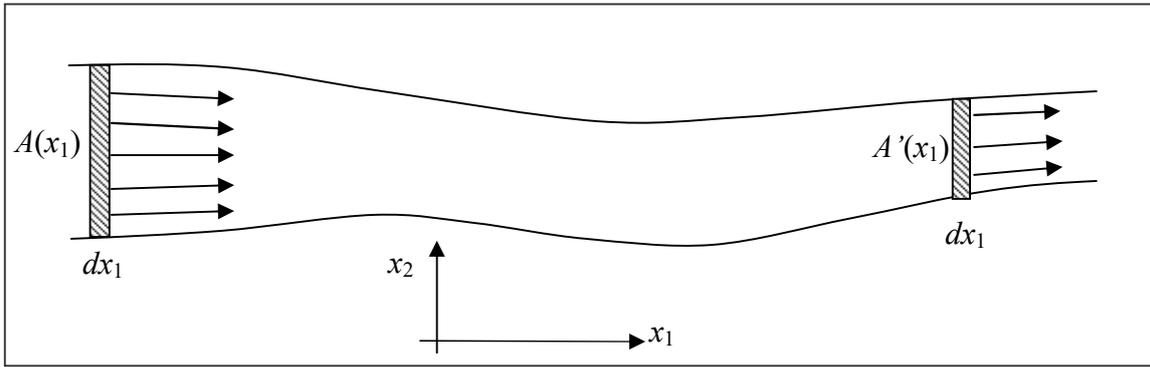


Figura 44. Schematizzazione di un flusso quasi-unidimensionale in un condotto.

$$\int \int_{x_1 A} \frac{d}{dx_1} (\rho u_1) dA dx_1 = \int_{x_1} \frac{d}{dx_1} \left(\int_A \rho u_1 dA \right) dx_1 = \int_{x_1} \frac{d}{dx_1} (\overline{\rho u_1} A) dx_1 = d(\overline{\rho u_1} A) = 0$$

e analogamente per la seconda

$$\int \int_{x_1 A} \left(\rho u_1 \frac{du_1}{dx_1} + \frac{dp}{dx_1} \right) dA dx_1 = \int_{x_1} \left(\int_A \left(\rho u_1 \frac{du_1}{dx_1} + \frac{dp}{dx_1} \right) dA \right) dx_1 = \int_{x_1} A \left(\overline{\rho u_1 \frac{du_1}{dx_1}} \right) dx_1 + \int_A dp dA = A(\overline{\rho u_1 \frac{du_1}{dx_1}} + \overline{dp}) = 0$$

Le (193) si riducono quindi a (evitando di riportare i segni di media)

$$\begin{aligned} d(\rho u_1 A) &= 0 \\ \rho u_1 du_1 + dp &= 0 \\ \frac{u_1^2}{2} + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) &= k_2 \end{aligned} \tag{193}$$

(la seconda è proprio l'equazione di Eulero). Dalla prima delle relazioni precedenti vediamo subito che la conservazione della massa per un flusso compressibile coinvolge sia la sezione del condotto e la velocità (come nel caso incompressibile) ma anche in più la densità. Di conseguenza non è più detto che ad un restringimento di sezione corrisponda sempre un aumento di velocità perché questo potrebbe essere compensato da un aumento di densità. Per rendere più esplicito e quantitativo questo discorso, esplicitiamo la prima delle (194)

$$\begin{aligned} \rho u_1 dA + \rho A du_1 + A u_1 d\rho &= 0 \\ \text{cioè} \quad \frac{dA}{A} + \frac{du_1}{u_1} + \frac{d\rho}{\rho} &= 0 \end{aligned}$$

Se utilizziamo la seconda delle (194) per esprimere du_1 e introduciamo la velocità del suono, si ottiene

$$\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho u_1^2} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{\rho u_1^2} (1 - Ma^2) \quad (194)$$

La relazione appena trovata mostra un risultato fondamentale dei flussi compressibili. In un condotto convergente ($dA/A < 0$), se il flusso è subsonico ($Ma < 1$) deve risultare una pressione che diminuisce lungo il condotto ($dp < 0$) e contemporaneamente (dalla seconda delle (194)) la velocità deve aumentare. Questo è quello che si è già verificato accadere nei flussi incompressibili dove la variazione di velocità predomina su quella di pressione. Viceversa se il flusso è supersonico ($Ma > 1$) deve risultare una pressione che aumenta ($dp > 0$) e contemporaneamente la velocità deve diminuire. Questo comportamento è proprio dovuto al fatto che in regime supersonico simultaneamente aumenta la densità ($d\rho > 0$) che predomina sulla variazione di velocità. Accade l'opposto se siamo in presenza di un condotto divergente ($dA/A > 0$): se il flusso è subsonico ($Ma < 1$) risulta una pressione che aumenta ($dp > 0$) e velocità che diminuisce, mentre se il flusso è supersonico ($Ma > 1$) la pressione diminuisce ($dp < 0$) e la velocità aumenta. La situazione è riassunta nella figura 45 che richiama alla mente l'esempio del traffico automobilistico.

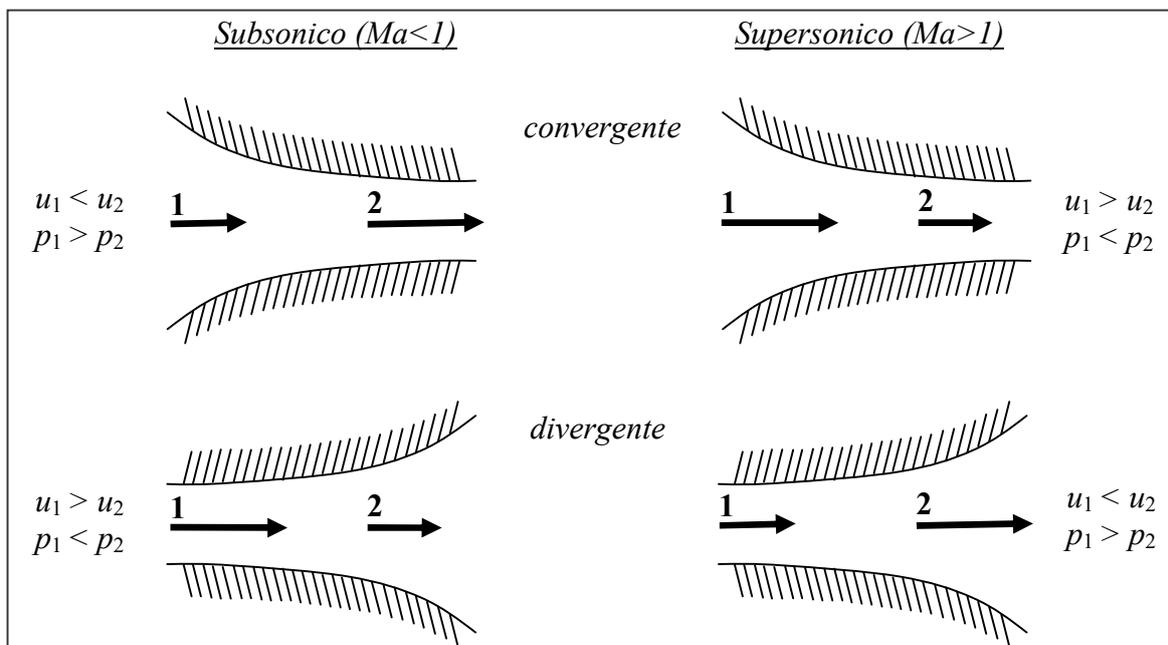


Figura 45. Comportamento di flussi subsonici e supersonici in convergenti e diffusori.

Come detto, nella relazione (194) è da notare che la definizione di portata comprende anche la densità variabile da sezione a sezione. Ricordiamo che nel caso incompressibile, l'aumento di pressione nella scia di un corpo e la conseguente diminuzione di velocità causano il riavvicinamento delle linee di corrente, per la conservazione della portata. Invece, nel caso compressibile, nella scia di un corpo (divergente) la pressione diminuisce e la velocità aumenta e poiché la densità varia con la pressione (equazione di stato), anch'essa andrà diminuendo. Di conseguenza, per avere la stessa portata, essendo la densità diminuita rispetto al caso incompressibile, sarà necessario un allargamento delle linee di corrente.

Una conseguenza di quanto ottenuto è che per realizzare il passaggio da flusso subsonico a flusso supersonico non sarà sufficiente un semplice convergente per aumentare la velocità. Infatti dalla (195) nella sezione in cui si raggiungesse $Ma=1$ (condizioni soniche) ci sarebbe una differenza di pressione che tenderebbe all'infinito, a meno che in tale sezione non ci fosse una cosiddetta gola, cioè un minimo della sezione. In tale caso $dA=0$, la pressione si manterrebbe finita e con un successivo tratto divergente si porterebbe la corrente a numeri di Mach supersonici. E' quindi necessario un tratto convergente-divergente per portare una corrente subsonica ad essere supersonica. Uno stesso tratto sarà necessario per riportare la corrente supersonica ad essere subsonica; questo è proprio quello che avviene nelle gallerie del vento o nei condotti in cui siano realizzate condizioni supersoniche. Ovviamente se si realizzasse invece un tratto divergente-convergente non sarebbe mai possibile accelerare in condizioni soniche una corrente subsonica o decelerare a tali condizioni una corrente supersonica. Si osservi che nella sezione di gola, dove $Ma=1$ sia nel passaggio subsonico-supersonico che viceversa, i valori di temperatura, pressione e densità saranno quelli critici definiti nel paragrafo 9.5.

Utilizzando la relazione (194), in maniera equivalente a quanto fatto per i valori di ristagno nel paragrafo 9.5, è possibile scrivere il legame tra i valori di temperatura, pressione, densità tra due qualsiasi sezioni del condotto (individuate dai pedici 1 e 2). Introducendo la quantità

$$H = \frac{1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) Ma_2^2}{1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) Ma_1^2},$$

è possibile ottenere

$$\frac{T_1}{T_2} = H$$

$$\frac{p_1}{p_2} = H^{\left(\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)}$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = H^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Se sia Ma_1 che Ma_2 sono molto minori di 1, cioè in condizioni subsoniche, si ha $H \cong 1$ e $T_1 \cong T_2$ (il rapporto tra le pressioni è invece proporzionale a $H^{3.5}$ e quello tra le densità a $H^{2.5}$). Altrimenti le relazioni precedenti permettono il calcolo del rapporto. Se consideriamo le relazioni precedenti applicate alla (195) troviamo anche il rapporto tra le aree delle sezioni in funzione del rapporto tra i numeri di Mach nelle sezioni o ancora meglio qual è il rapporto tra i numeri di Mach dato quello tra le sezioni (legge delle aree), data cioè la geometria del condotto

$$\frac{A_1}{A_2} = H^{-\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \frac{Ma_2}{Ma_1}, \quad \frac{Ma_1}{Ma_2} = H^{\frac{(\gamma+1)}{2(\gamma-1)}} \frac{A_2}{A_1}$$

ovviamente il limite in cui uno dei numeri di Mach sia pari a zero fornisce i valori di ristagno, mentre nel limite di numero di Mach pari all'unità si ritroveranno i valori critici. E' importante specificare che quanto trovato vale finché non siano presenti nel condotto onde d'urto, nel qual caso l'ipotesi di isentropicità non sarebbe più valida (fenomeni di dissipazione viscosa e di calore).

9.7 RELAZIONI PER ONDA D'URTO NORMALE

Come già visto nel paragrafo 9.4, in un flusso compressibile possono generarsi onde viaggianti alla velocità del suono che trasportano incrementi (o decrementi) del campo di pressione e densità. Nel primo caso, tali onde (dette di compressione) possono dare origine a discontinuità effettive di spessore finito (sebbene molto piccolo) dei campi fluidodinamici e sono dette onde d'urto. In effetti, per un flusso supersonico, tutte le volte che si realizza una brusca diminuzione locale di pressione (dal paragrafo precedente questo accade in un flusso supersonico quando c'è un tratto divergente o comunque un'espansione) o un improvviso cambio di direzione si viene a formare un'onda d'urto come conseguenza della propagazione del disturbo finito. Risulta allora

importante capire in che modo variano le quantità fluidodinamiche attraverso l'onda d'urto rispetto a quanto ottenuto nel paragrafo precedente per un flusso compressibile ma in assenza di onde d'urto.

Come in precedenza, si farà l'ipotesi di flusso unidimensionale, che corrisponde a considerare un'onda d'urto normale. Assumiamo che l'onda sia diretta lungo l'asse x_1 con l'unica componente di velocità indicata con u e utilizziamo i pedici 1 e 2 per le quantità a monte e a valle dell'onda. Le relazioni (194) possono essere scritte ricordando che la sezione A attraverso un urto resta costante (e che quindi dall'equazione di conservazione della massa il prodotto ρu risulta costante) e utilizzando la velocità del suono

$$\begin{aligned}d(\rho u) &= 0 \\ \frac{d}{dx_1}(\rho u^2 + p) &= 0 \\ u^2/2 + c^2/(\gamma - 1) &= k_2\end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned}\rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2 \\ \rho_1 u_1^2 + p_1 &= \rho_2 u_2^2 + p_2 \\ c_1^2 + u_1^2 \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) &= c_2^2 + u_2^2 \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right)\end{aligned} \quad (195)$$

ma dall'ultima relazione, per la definizione di valore di ristagno e di valore critico, segue che

$$c_1^2 \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) Ma_1^2 \right] = c_2^2 \left[1 + \left(\frac{\gamma - 1}{2}\right) Ma_2^2 \right] = c_t^2 = \left(\frac{\gamma + 1}{2}\right) c_c^2 \quad (196)$$

Dividendo la seconda delle (196) membro a membro con la prima e utilizzando la relazione $p/\rho = c^2/\gamma$, si ottiene

$$u_1 + \frac{c_1^2}{\gamma u_1} = u_2 + \frac{c_2^2}{\gamma u_2}$$

e sostituendovi i valori trovati nella (197) per le due velocità del suono

$$(u_2 - u_1)(c_c^2 - u_1 u_2) = 0$$

che oltre alla soluzione banale $u_2 = u_1$ ammette la soluzione nella forma della cosiddetta relazione di Prandtl (avendo introdotto il numero di Mach critico $Ma_c = u/c_c$)

$$Ma_{1c} Ma_{2c} = 1$$

che ci mostra come attraverso un'onda d'urto normale, dovendo essere il prodotto unitario significa che se il numero di Mach a monte è supersonico quello a valle deve essere subsonico, cioè il flusso a valle dell'urto è subsonico. A questo punto, utilizzando l'espressione completa per le quantità critiche nella relazione precedente, è possibile ottenere il rapporto tra le quantità a valle e quelle a monte in funzione del numero di Mach a monte dell'urto (relazioni di Rankine-Hugoniot, William John Macquorn Rankine, 1820-1872, Pierre Henri Hugoniot, 1851-1887)

$$Ma_2^2 = \frac{1 + \left(\frac{\gamma-1}{2}\right) Ma_1^2}{\gamma Ma_1^2 - \left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = \frac{(\gamma+1) Ma_1^2}{2 + (\gamma-1) Ma_1^2}$$

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2\gamma}{(\gamma+1)} (Ma_1^2 - 1)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} Ma_1^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left(\frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{1}{Ma_1^2} + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)$$

La prima di queste ci conferma quanto già trovato con la relazione di Prandtl e che cioè il numero di Mach a valle dell'onda risulta inferiore all'unità se quello a monte è maggiore con un valore massimo per $Ma_1 \rightarrow \infty$ dato da $[(\gamma-1)/2\gamma]^{1/2} \approx 0.4$ (se il numero di Mach a monte tende a 1 lo fa anche quello a valle, verificare per esercizio la curva risultante). La seconda relazione mostra che la densità a valle dell'onda d'urto è maggiore di quella a monte (infatti è un'onda di compressione), con un valore massimo dato dal rapporto $(\gamma+1)/(\gamma-1) = 6$, ed entrambe tendono allo stesso valore per numero di Mach tendente all'unità (le velocità sono in rapporto inverso). La terza relazione per la pressione ci dice che anche la pressione a valle dell'urto è maggiore di quella a monte con l'uguaglianza nel caso di numero di Mach unitario (in questo caso non esiste un valore limite).

Infine la quarta relazione per la temperatura mostra l'aumento di temperatura a valle dell'onda d'urto (responsabile di forte innalzamento di temperatura e ionizzazione d'aria di fronte di velivoli spaziali in rientro atmosferico). Anche in questo caso non esiste un valore limite e le temperature tendono ad essere uguali quando il numero di Mach tende al valore unitario.

Notiamo che dalla prima delle (196), possiamo calcolare il coefficiente di pressione

$$C_p = 2 \left(1 - \frac{\rho_2 u_2^2}{\rho_1 u_1^2} \right) = 2 \left(1 - \frac{u_2}{u_1} \right)$$

che nel punto di ristagno ($u_2=0$) varrà proprio 2, come già mostrato nel paragrafo 5.3. Dalla relazione precedente possiamo infine calcolare il contributo alla resistenza d'onda nel caso di onda d'urto normale tramite le relazioni di Rankine-Hugoniot, cioè integrare il coefficiente di pressione lungo la superficie dell'onda (assumendolo costante) e ridividendolo per la superficie stessa

$$C_w = 2 \left(1 - \frac{u_2}{u_1} \right) = \frac{4}{(\gamma + 1)} \frac{(Ma_1^2 - 1)}{Ma_1^2}$$

che fornisce valori trascurabili per numero di Mach prossimo all'unità e cresce in importanza fino ad un valore limite pari a 1.67 (questo valore può anche essere ottenuto dalla relazione per la resistenza d'onda ottenuta nel capitolo 8). Il valore trovato per il caso di onda d'urto normale viene a diminuire considerevolmente nel caso di onda d'urto obliqua (i salti di densità e pressione sono attenuati di fattori legati al seno al quadrato dell'angolo formato dall'onda con la direzione del flusso indisturbato). Quest'ultima è la condizione che si verifica più spesso nelle situazioni reali specialmente con oggetti in moto aventi bordo d'attacco affusolato piuttosto che arrotondato.

Capitolo 10

AERODINAMICA DELLE TURBINE EOLICHE

10.1 INTRODUZIONE

L'energia eolica, prodotto della conversione dell'energia cinetica del vento in energia meccanica ed elettrica è una forma di energia solare. Infatti, i venti sono generati dal riscaldamento non uniforme dell'atmosfera da parte del sole, dalle irregolarità della superficie della terra e dalla sua rotazione. Essendo una forma di energia presente quasi ovunque, negli ultimi anni il generale risveglio di interesse verso le forme di energia rinnovabili ha coinvolto anche l'ambito eolico.

I dispositivi che sfruttano questa forma di energia sono caratterizzabili in due grosse famiglie: generatori eolici e mulini a vento. Con il termine “generatore eolico”, o meglio “turbina eolica”, si intende un dispositivo in grado di convertire l'energia contenuta nel vento in elettricità, mentre i “mulini a vento” convertono l'energia del vento in potenza meccanica. Nelle turbine attuali il processo di conversione utilizza la portanza generata dall'interazione tra vento e pale della turbina per produrre una coppia su un albero rotante, ciò comporta la produzione di potenza meccanica e successivamente la trasformazione in energia elettrica.

10.2 CENNI STORICI

L'energia eolica è stata ampiamente utilizzata fin dall'antichità e i primi esempi di macchine eoliche si possono trovare in raffigurazioni di area egizio-mesopotamica attorno al 90 a.C., come rappresentato in figura 46 (a sinistra). Per vedere i primi utilizzi in Europa si deve attendere il medioevo e i primi mulini a vento, il cui scopo principale era la produzione di energia meccanica per attivare frantoi e pompe d'acqua (figura 46 a destra). Come rappresentato in figura 47, il meccanismo di conversione dell'energia eolica in meccanica era ingegnoso, mentre la geometria delle pale era piuttosto primitiva (essenzialmente della tela su un telaio). Il loro utilizzo era limitato dal fatto che l'energia prodotta non poteva essere trasportata ma doveva essere utilizzata “in loco”.

Si cominciarono ad usare le prime vere turbine eoliche attorno al 1880 negli Stati Uniti, quando vennero collegati ai comuni mulini a vento dei generatori elettrici di piccole dimensioni.

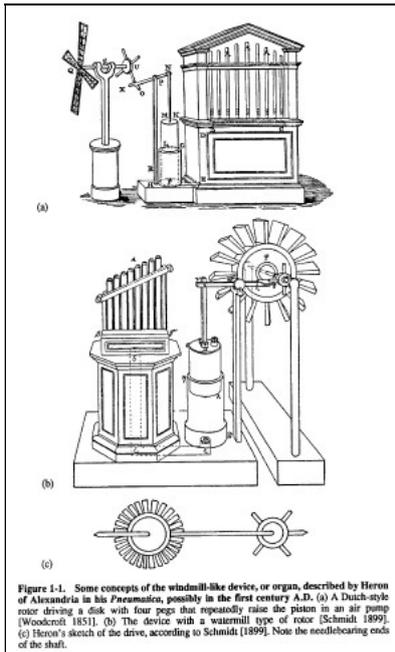


Figura 46. Schema di un dispositivo sonoro con pale rotanti azionate a vento (I secolo a.c.) (a sinistra) e mulino a vento olandese (a destra).

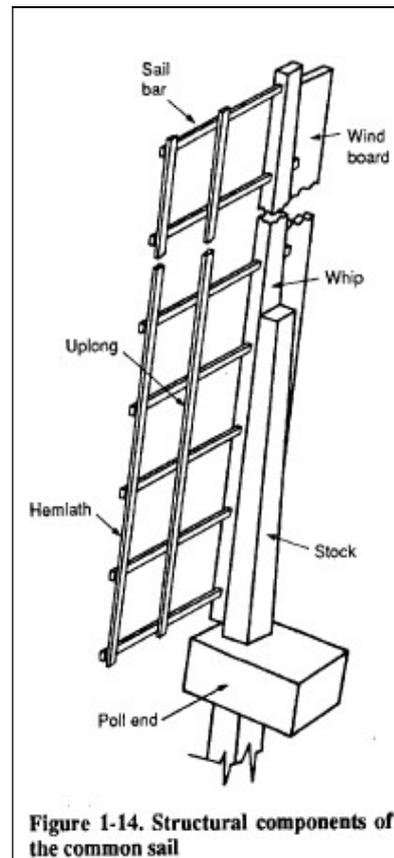
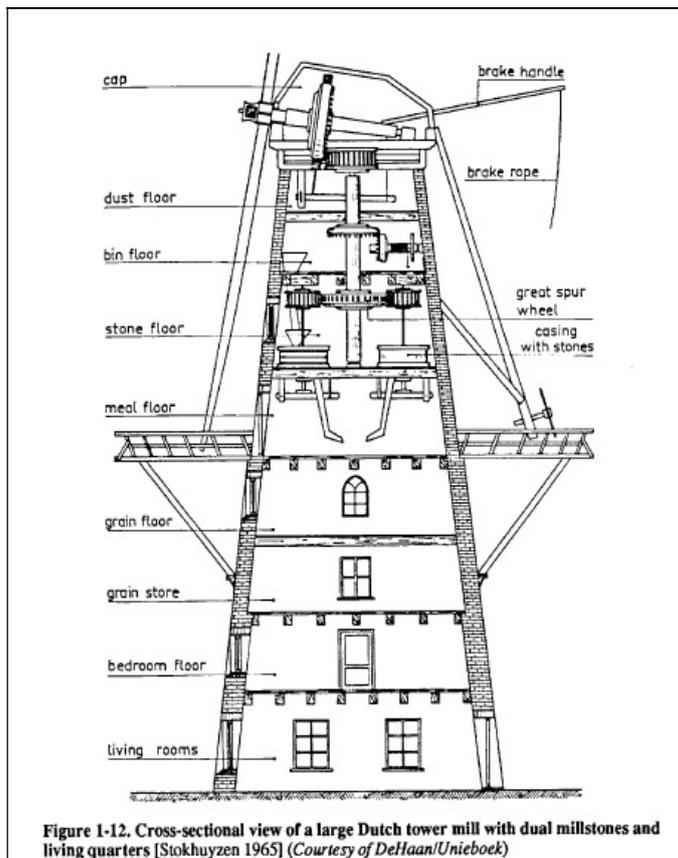


Figura 47. Mulino a vento olandese: sezione della torre con meccanismo di trasmissione (a sinistra) e dettaglio della pala (a destra).

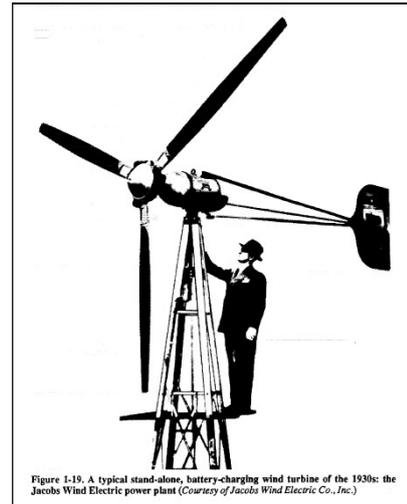
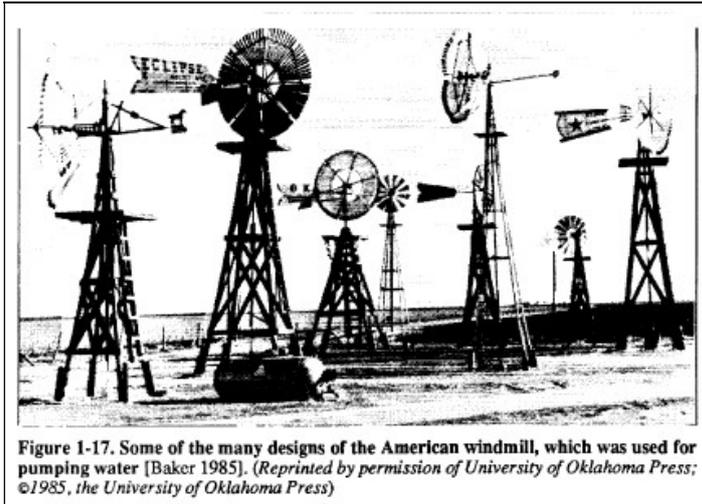


Figura 48. Esempi di mulini a vento americani utilizzati per il pompaggio dell'acqua (a sinistra) e esempio primitivo di turbina eolica degli anni 30 del 900 (a destra).



Figura 49. Esempio di turbina eolica moderna (a sinistra) e di impianto multi-turbina ("wind farm") (a destra).

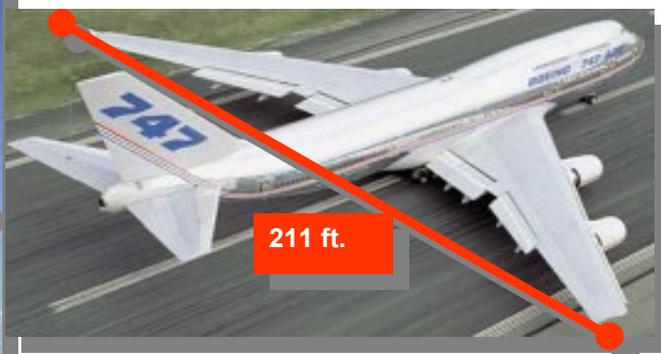


Figura 50. Dimensioni massime di una turbina eolica (a sinistra) rispetto al Jumbo 747 (a destra).

La loro espansione però incontrò grossi ostacoli, in quanto l'energia prodotta era ancora poca e la capacità strutturale delle pale era ancora bassa per poter permettere un utilizzo massiccio di tale forma di generazione di corrente (figura 48 a sinistra). Nei primi anni del 900 si affinarono le tecniche di conversione dell'energia e si cominciò ad applicare qualche nozione di aerodinamica per quanto riguarda la forma delle pale della turbina (figura 48 a destra).

A partire del 1945 fino ai primi '60 molti progetti furono abbandonati, fin quando non si ebbero le conoscenze tecniche ed aerodinamiche per progettare e costruire delle macchine efficienti e potenti. I generatori eolici attuali sono macchine complicate, dall'aerodinamica complessa. I più grandi attualmente in produzione sono dei rotori di 125 m di diametro, un'altezza complessiva di 198 m (più dell'apertura alare del Jumbo 747), con capacità produttiva di 5-6 MW anche in schiere di centinaia di sistemi (figure 49 e 50), ma esistono anche dispositivi microeolici da meno di 10kW.

10.3 TIPOLOGIE DI TURBINE

Le turbine eoliche sono classificabili in grosse famiglie in funzione della configurazione e disposizione delle pale, del modo di funzionamento e del sistema utilizzato per regolare l'uscita di potenza. Una prima classificazione può essere fatta rispetto al tipo di forza che esse utilizzano per generare la rotazione dell'albero: macchine a resistenza (drag type), macchine a portanza (lift type) e macchine miste (drag-lift type). Le più usate attualmente per la generazione di grosse potenze sono le "lift type", in cui un rotore con pale, sfrutta la portanza generata da queste ultime per produrre una coppia. Un'ulteriore suddivisione è quella tra turbine ad asse verticale (VAWT – Vertical Axis Wind Turbine) e ad asse orizzontale (HAWT – Horizontal Axis Wind Turbine), come rappresentato in figura 51. Quelle appartenenti al primo gruppo si distinguono in Darrieus ("lift type") e Savonius ("drag type"), le seconde si dividono nelle configurazioni "Upwind" e "Downwind", a seconda che il rotore si trovi a monte o valle del generatore elettrico. Soffermando l'analisi sul tipo HAWT, si può fare un'ulteriore classificazione, distinguendo tra macchine a velocità costante e macchine a velocità variabile. Mentre il primo tipo funziona mantenendo sempre la stessa velocità rotazionale al variare dell'intensità del vento, nel secondo tipo invece la velocità rotazionale è proporzionale alla velocità del vento (di solito in condizioni di avviamento e a bassa velocità del vento rispetto al di progetto). In entrambi i gruppi vi sono turbine regolate mediante lo stallo progressivo delle pale ("stall-regulated") e mediante la regolazione del passo della pala ("pitch regulated"). Si può agire sulla potenza attraverso il controllo delle pale e delle caratteristiche elettriche del generatore.

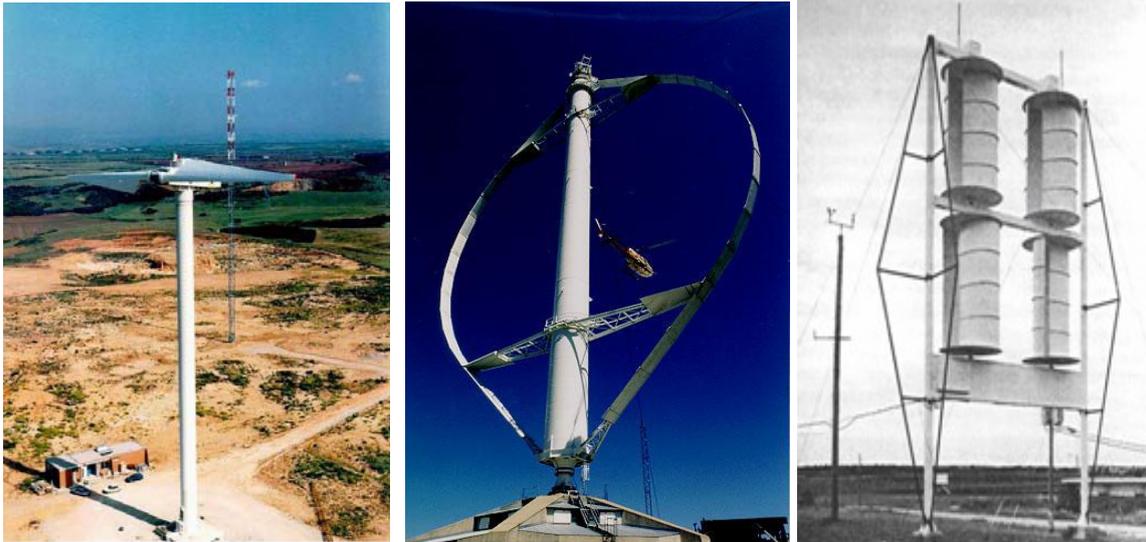


Figura 51. Esempio di turbina eolica ad asse orizzontale (HAWT, a sinistra) e verticale (VAWT, al centro di tipo Darrieus, lift type, e a destra di tipo Savonius, drag type).

10.4 PROFILI ALARI UTILIZZATI

I profili delle pale delle turbine eoliche sono essenzialmente profili aeronautici. La terminologia utilizzata per descrivere un profilo alare è quindi quella di derivazione aeronautica. Come mostrato in figura 52, il punto più avanzato di un profilo alare è detto bordo d'attacco o "leading edge", mentre il punto più arretrato è detto bordo d'uscita o "trailing edge". La parte superiore e inferiore di un profilo sono generalmente indicati come dorso e ventre. La linea orizzontale che corre dal bordo d'uscita al bordo d'attacco e si trova a metà strada tra i punti del dorso e del ventre del profilo viene generalmente indicata come linea media. Il segmento che si trova tra bordo d'attacco e bordo d'uscita è detto generalmente corda del profilo. La massima distanza tra la linea media e la corda indica in percentuale la curvatura del profilo riferita alla corda media. Si definisce angolo d'attacco o di incidenza, α , l'angolo formato tra la corda del profilo e la direzione del flusso incidente, mentre si indica con "angolo di portanza nulla" l'angolo di attacco al quale il profilo non genera portanza (per un profilo simmetrico tale angolo è pari a zero).

Come già visto per un corpo generico, possono essere introdotte le forze agenti su profili, anche in termini di coefficienti di forza, essenzialmente portanza e resistenza, così come i momenti, in particolare il momento picchiante, definito come il momento prodotto dalle forze attorno ad un asse perpendicolare al piano del profilo, e il coefficiente di momento.

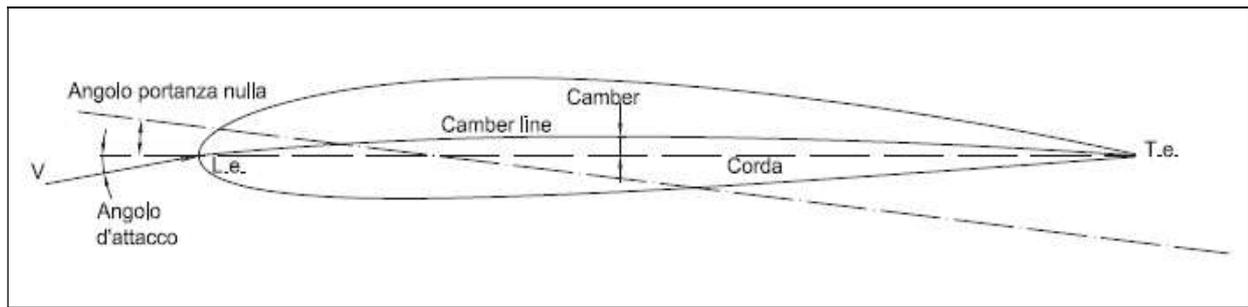


Figura 52. Geometria di un profilo alare.

Come riportato nel capitolo 8 (figura 41), la curva che mette in relazione il coefficiente di portanza di un profilo con l'angolo d'attacco, è una funzione lineare per angoli di attacco fino a circa 12° (tale valore dipende dal profilo specifico e dal numero di Reynolds, che per generatori eolici assume anche valori piuttosto elevati, da 5×10^5 a 10^7 , mentre i fenomeni di compressibilità possono essere trascurati essendo $Ma \approx 0.3$ alle estremità palari). Per angoli di incidenza maggiori, avviene la separazione e stallo che fanno bruscamente diminuire il coefficiente di portanza. Anche la curva che descrive il coefficiente di resistenza è esprimibile in funzione dell'angolo d'attacco.

Considerando quindi che per un generico profilo è possibile sempre determinare i valori di C_L e C_D , si può pensare di costruire il rapporto tra i due coefficienti detto efficienza del profilo, E

$$E = \frac{C_L}{C_D}$$

L'efficienza può essere utilizzata per valutare la capacità di un profilo di generare forza utile (portanza) in relazione alla quantità di forza da spendere (resistenza). Essendo poi entrambi i coefficienti dipendenti dal numero di Reynolds, anche l'efficienza è funzione di tale parametro. Per ogni profilo si può identificare un punto della polare relativamente al quale il rapporto E assume il valore massimo, questa condizione è quella che viene di solito indicata come efficienza massima (di solito per pale eoliche pari a circa 100).

Ogni profilo alare si può dire essere in grado di operare in tre diversi regimi di funzionamento: quello di fluido attaccato, quello di alta portanza/stallo e quello di lastra piana/stallo completo. Nel regime di fluido attaccato, fino a $\alpha \approx 8^\circ$, il flusso rimane attaccato alla superficie del profilo e il coefficiente di portanza aumenta linearmente con l'angolo di incidenza. Nel regime di alta portanza, da 8° a circa 11° , il coefficiente di resistenza aumenta molto più di quanto non lo faccia quello di portanza. In questa condizione il flusso comincia a separarsi dalla

superficie del profilo e ciò causa l'inizio del fenomeno di stallo. Tale condizione viene utilizzata per il controllo di potenza nei generatori del tipo "stall regulated". L'angolo di stallo e la tipologia dello stesso (stallo di bordo d'attacco o di bordo d'uscita) dipendono dal numero di Reynolds e dal tipo di profilo in esame. Il terzo regime è quello di stallo completo, cioè una condizione di flusso completamente separato dalla superficie del profilo. In questa configurazione i due coefficienti assumono pressoché lo stesso valore. Questa caratteristica dei profili permette lo studio delle pale in una condizione post-stallo, approssimandole come lastre piane. I profili per generatori eolici sono di solito disegnati per lavorare a bassi-medi angoli d'attacco e perciò nel regime di flusso attaccato, con valori di coefficiente di portanza abbastanza elevati e di coefficiente di resistenza relativamente bassi.

10.5 AERODINAMICA DEI ROTORI

Per ricavare le prestazioni previste per una data turbina eolica, è necessario schematizzarne il funzionamento aerodinamico. L'aerodinamica del rotore di una turbina eolica può essere vista come una sintesi di tre teorie: quella del disco attuatore, del disco rotorico e dell'elemento di pala. L'unione delle tre formulazioni indicate sopra consente di descrivere interamente il campo fluidodinamico attorno ad un rotore e consente inoltre di determinare le caratteristiche aerodinamiche delle pale a partire dai coefficienti aerodinamici dei profili. L'insieme di queste teorie viene indicata con l'acronimo BEM, Blade Element Momentum Theory.

Teoria del disco attuatore.

Una turbina eolica è una macchina che funziona sottraendo energia cinetica alla corrente fluida, tale sottrazione di energia causa un rallentamento del fluido attraverso il disco. Si suppone inoltre che durante il processo di estrazione d'energia le masse di aria passanti attraverso il rotore e all'esterno di esso non si miscelino mai così separando idealmente queste due masse d'aria mediante un tubo di flusso di sezione circolare, come indicato in figura 53. Supponiamo che la portata in massa nel tubo di flusso, $Q = \rho AV$, risulti essere costante in ogni posizione assiale di sezione A . Indicando con i pedici ∞ , d , w le condizioni relative al fluido a monte, in corrispondenza del disco e a valle, si può perciò scrivere (essendo la densità costante in dipendenza dei bassi valori del numero di Mach)

$$\rho A_{\infty} V_{\infty} = \rho A_d V_d = \rho A_w V_w$$

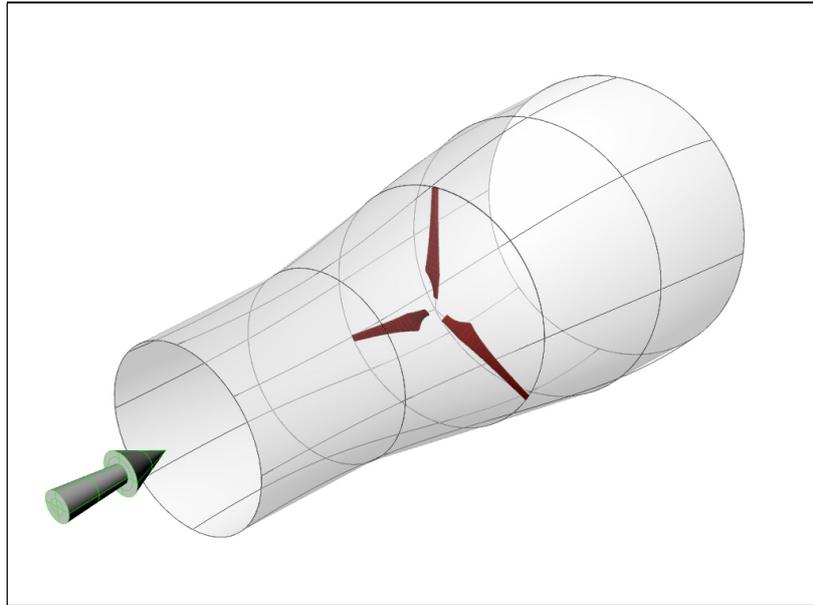


Figura 53. Schematizzazione del tubo di flusso nella teoria del disco attuatore.

Se quindi è presente un rallentamento della corrente fluida, dovuto alla cessione di energia cinetica e momento da questa al rotore, sarà $V_w < V_\infty$ e quindi dovrà anche essere $A_\infty < A_w$. Dunque la diminuzione di velocità causata dall'estrazione di energia produce un incremento dell'area del tubo di flusso a valle del rotore.

La diminuzione di velocità nelle varie posizioni assiali lungo il tubo di flusso deve avvenire in maniera graduale e senza variazioni brusche, il rallentamento del fluido comincerà perciò già a monte del rotore e proseguirà a valle. Come conseguenza di questo, per il teorema di Bernoulli tra una sezione a monte del disco rotore la sezione del disco stessa, la pressione statica aumenterà per assorbire la diminuzione di pressione dinamica. Attraversando il rotore il fluido verrà ora privato di una parte dell'energia e ciò causerà una diminuzione della pressione statica. Tra monte e valle della turbina si instaurerà così una differenza di pressione; la superficie di discontinuità della pressione tra monte e valle viene assimilata ad un disco permeabile che viene indicato come “disco attuatore”.

La variazione di velocità e pressione è riportata nella figura 54. Si considera che il disco attuatore induca sul fluido una variazione di velocità ΔV_∞ che è sovrapponibile alla velocità V_∞ della corrente indisturbata, tale variazione è esprimibile come $\Delta V_\infty = -aV_\infty$ che viene definita di solito velocità indotta. Il parametro a viene generalmente indicato come “fattore di influenza assiale” e rappresenta la frazione della velocità della corrente indisturbata “assorbita” dal disco attuatore. Tale coefficiente consente di scrivere la velocità V_d della corrente in corrispondenza del disco

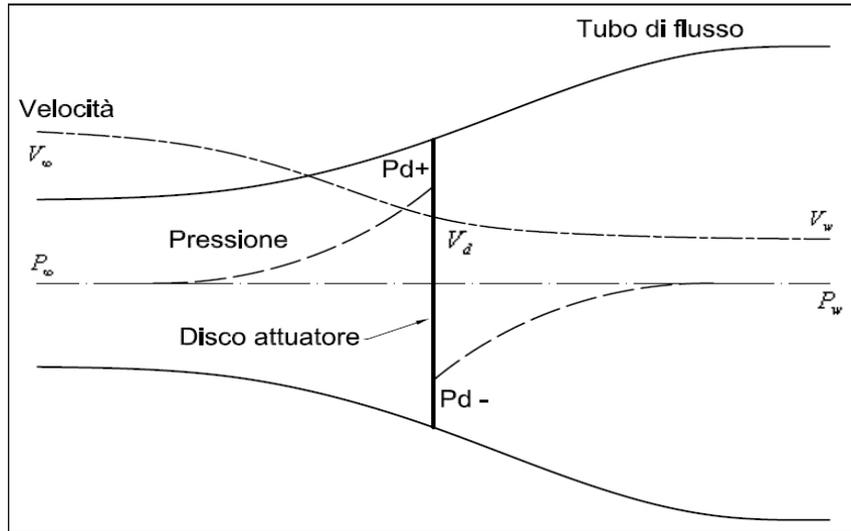


Figura 54. Variazione di sezione, velocità e pressione attraverso il disco del rotore.

$$V_d = V_\infty + \Delta V_\infty = V_\infty - aV_\infty = V_\infty(1 - a)$$

e quindi

$$a = \frac{V_\infty - V_d}{V_\infty}$$

La differenza di pressione tra le due facce del disco attuatore produce su di esso una spinta, T

$$T = (P_{d+} - P_{d-})A_d$$

Questa provoca la variazione della quantità di moto assiale del fluido, Q_m

$$Q_m = \rho A_\infty V_\infty^2 - \rho A_w V_w^2 = \rho A_d V_d (V_\infty - V_w)$$

Sostituendo il valore V_d ed uguagliando le due precedenti equazioni si ottiene

$$(P_{d+} - P_{d-}) = (V_\infty - V_w)\rho V_\infty(1 - a)$$

Per calcolare la differenza di pressione si utilizza il teorema di Bernoulli. Non potendolo applicare attraverso il disco (a causa delle perdite di energia), dividiamo idealmente il tubo di flusso in due regioni, una a monte ed una a valle separate idealmente dal disco stesso

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\rho V_{\infty}^2 + P_{\infty} = \frac{1}{2}\rho V_d^2 + P_{d+} \\ \frac{1}{2}\rho V_w^2 + P_{\infty} = \frac{1}{2}\rho V_d^2 + P_{d-} \end{cases}$$

Sottraendo le precedenti relazioni si ottiene

$$\frac{1}{2}\rho(V_{\infty}^2 - V_w^2) = P_{d+} - P_{d-}$$

e quindi

$$\begin{aligned} (V_{\infty}^2 - V_w^2) &= 2(V_{\infty} - V_w)V_{\infty}(1-a) \\ V_w &= V_{\infty}(1-2a) \end{aligned}$$

Quindi a monte del disco la velocità assiale diminuisce nel tubo di flusso di un fattore $(V_{\infty}-V_d)/V_{\infty}=a$ e a valle di un identico fattore $(V_d-V_w)/V_{\infty}=a$, cioè ha luogo metà a monte e metà a valle.

Avendo determinato V_w , si può esprimere la spinta prodotta dal fluido sul disco rotorico

$$T = (P_{d+} - P_{d-})A_d = \frac{1}{2}\rho(V_{\infty} - V_w)(V_{\infty} + V_w)A_d = \frac{1}{2}\rho(V_{\infty} - V_w)2V_{\infty}(1-a)A_d = 2\rho A_d V_{\infty}^2 a(1-a)$$

La potenza associata alla corrente fluida, W , è data dal prodotto della spinta e della velocità della corrente in corrispondenza del disco rotorico e sarà quindi

$$W = TV_d = 2\rho A_d V_{\infty}^3 a(1-a)^2$$

E' anche possibile definire un coefficiente adimensionale di potenza, che indica la quantità di energia contenuta nella corrente estratta dalla turbina eolica e convertita in energia elettrica

$$C_W = \frac{W}{\frac{1}{2}\rho V_{\infty}^3 A_d} = 4a(1-a)^2$$

Da questa formula si nota che il valore del coefficiente di potenza, attraverso la sola teoria del disco attuatore, è dipendente esclusivamente dal fattore di influenza assiale a . E' ovvio che nel progetto di un generatore si cercherà di massimizzare la potenza estratta dalla corrente fluida, perciò annullando la derivata parziale di C_W rispetto ad a si ottiene

$$\frac{dC_w}{da} = 4(1-a)^2 - 8a(1-a) = 4(1-a)(1-3a) = 0$$

che si annulla per $a=1$ (che però è un punto di minimo dato che la derivata seconda è positiva) e in $a = \frac{1}{3}$ (che rappresenta effettivamente un massimo essendo la derivata seconda negativa). In queste condizioni attraverso il disco viene assorbita una velocità della corrente $2a=2/3 V_\infty$ e la velocità a valle del disco del rotore diventa pari a $V_\infty/3$ (quella in corrispondenza del disco vale $2V_\infty/3$). Simultaneamente la sezione del tubo di flusso passa da $2/3 A_d$ a monte a $2 A_d$ a valle del disco. Sostituendo il valore di massimo nel C_w si ottiene

$$(C_w)_{max} = \frac{16}{27} = 0.593$$

definito come limite di Betz. Nessuna turbina eolica è in grado di eccedere tale valore massimo del coefficiente di potenza, cioè la percentuale massima di potenza estraibile da una corrente fluida è quasi il 60%. Questo è un valore ideale, mentre il valore massimo effettivamente raggiungibile è poi limitato da fattori che coinvolgono gli effetti dissipativi.

La forza agente sul disco, la spinta T introdotta precedentemente, può essere resa adimensionale tramite l'introduzione di un coefficiente, indicato come coefficiente di spinta, tale che se il rotore fosse un disco pieno ne esprimerebbe la resistenza. Quindi per convenzione, la resistenza che una turbina eolica offre al vento e che si trasmette direttamente sul pilone di sostegno è identificata da

$$C_T = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 A_d}$$

da cui, ricordando l'espressione trovata per la spinta in funzione del fattore a , si ottiene

$$C_T = 4a(1-a)$$

Questa quantità è massima quando ($C_T=1$) quando $a = 1/2$ e in queste condizioni il disco sottrae tutta la spinta dal fluido e quindi rallenta completamente la corrente fluida fino all'arresto.

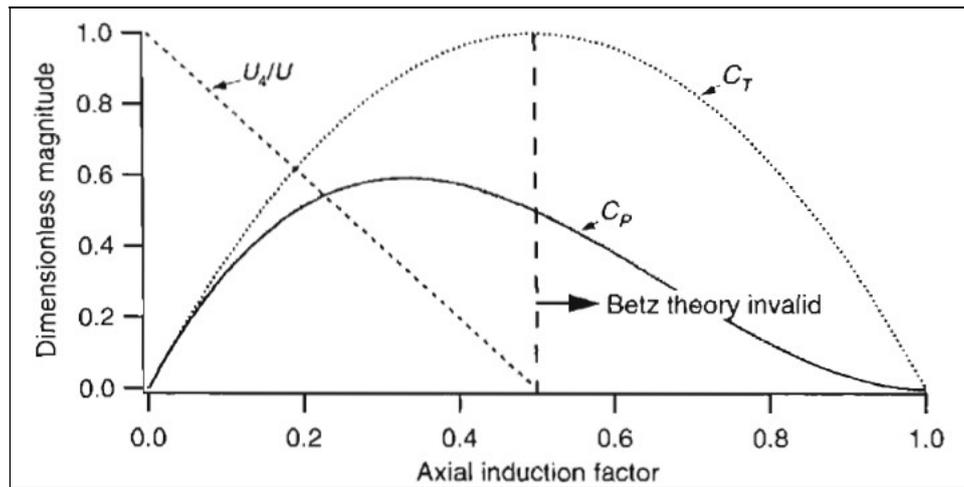


Figura 55. Andamento dei coefficienti di potenza (C_P) e spinta (C_T) e del rapporto tra velocità nella scia e indisturbata (U_4/U) in funzione del fattore di influenza assiale, a .

Quando invece il coefficiente di potenza è massimo ($a=1/3$) $C_T=8/9$. La teoria del disco attuatore non è più applicabile per valori di $a \geq 1/2$: in queste condizioni infatti, la velocità della scia V_w diviene 0 o addirittura negativa, e si renderà perciò necessario introdurre delle correzioni teoriche per approssimare quello che è il reale funzionamento del rotore. Nella figura 55 sono riassunti gli andamenti teorici dei coefficienti di potenza e spinta in funzione del fattore di influenza assiale con l'andamento del rapporto tra la velocità nella scia e quella della corrente indisturbata a monte.

Il limite di Betz non viene nella realtà mai raggiunto perché rispetto a quanto esposto bisognerebbe considerare anche la rotazione della scia dietro al rotore, il numero finito delle pale della turbina e le perdite a queste associate e infine le forze aerodinamiche sulle pale stesse. Di queste cose se ne può tenere conto attraverso un coefficiente $\eta < 1$ nell'espressione del coefficiente di potenza. Dal punto di vista teorico si può considerare che il disco non sia più immobile ma ruoti attraverso la teoria del disco rotorico.

Teoria del disco rotorico.

Il rotore si mantiene in rotazione poiché su di esso agisce una coppia motrice tra il punto di applicazione della spinta e l'asse di rotazione. A causa del principio di azione e reazione, tale coppia dovrà essere presente anche nel fluido a valle del rotore inducendo una rotazione del fluido nella scia opposta a quella del rotore con velocità tangenziale in aggiunta a quella assiale. L'energia cinetica rotazionale della scia si aggiungerà a quella assiale a valle del rotore e la maggiore energia cinetica totale nella scia diminuirà allora la quantità di energia effettivamente estraibile. Essendo

l'energia cinetica rotazionale legata alla coppia di reazione e dunque alla coppia presente sul rotore si avrà che le turbine lente e con elevata coppia presenteranno una maggiore rotazione della scia rispetto alle turbine veloci con bassa coppia. A monte del rotore l'energia cinetica sarà solamente di tipo traslazionale, a valle del rotore l'energia cinetica totale sarà data dalla somma dell'energia cinetica traslazionale e di quella rotazionale: la variazione sarà tutta in corrispondenza del rotore.

Senza entrare nei dettagli, alla velocità assiale V_∞ si sommerà vettorialmente una componente dovuta alla rotazione della scia pari a ωr (ω rappresenta la velocità di rotazione della scia in rad/s, mentre Ω rappresenta la velocità di rotazione del rotore e r la distanza dall'asse) come rappresentato in figura 56. In maniera simile a quanto visto per la componente assiale, si ricava che la componente tangenziale è pari a 0 a monte del rotore, a $\Omega r a'$ sul disco rotorico e a $2\Omega r a'$ a valle (in verso opposto a quello del rotore). La quantità a' è detto fattore di influenza tangenziale

$$a' = \frac{\omega}{2\Omega}$$

Si introduce anche il fattore λ_r indicato come rapporto tra le velocità tangenziale e assiale (“tip speed ratio”)

$$\lambda_r = \frac{\Omega r}{V_\infty}, \quad \lambda = \lambda_r (r = R) = \frac{\Omega R}{V_\infty}$$

Come noto, la coppia motrice di un rotore, C , e la potenza sono legate tra loro dalla velocità angolare del rotore, $W=C\Omega$. Di conseguenza, è possibile anche esprimere la coppia rotorica attraverso il coefficiente di coppia, C_C , legato a quello di potenza tramite il fattore λ , $C_C=C_W/\lambda$. Dalla teoria del disco rotorico si ricava la relazione (introducendo $\mu=r/R$) per la massima potenza

$$a' = \frac{a(1-a)}{\lambda_r^2} = \frac{a(1-a)}{\left(\frac{\Omega r}{V_\infty}\right)^2} = \frac{a(1-a)}{\left(\frac{\Omega R}{V_\infty} \cdot \frac{r}{R}\right)^2} = \frac{a(1-a)}{\lambda^2 \mu^2}$$

Come ricavato dalla teoria del disco attuatore, il valore di a deve essere costante (e si trova pari a $1/3$), mentre a' è dipendente da a , dalla posizione radiale r e dal parametro λ come sopra riportato. Volendo calcolare il C_W ottenibile per l'intero rotore si ottiene che il valore teorico massimo è pari a 0.593 cioè lo stesso valore che si ottiene come limite nel Betz nel caso di assenza di rotazione della scia. L'assunzione della rotazione della scia non va quindi a modificare i risultati ottenuti nel caso del disco attuatore per quanto riguarda il coefficiente di potenza ottenibile.

La teoria del disco rotorico consente quindi di quantificare la variazione della componente tangenziale della velocità da considerare nel disegno della pala. La teoria che non considera la rotazione della scia (disco attuatore), è valida con buona approssimazione per valori di λ superiori a 1.5. Invece, a bassi λ , come nel caso di generatori che attivano macchine dove è necessaria un'elevata coppia iniziale e un'elevata solidità (come nel caso di sistemi che attivano pompe per acqua tipo mulini a vento), l'errore nel trascurare la rotazione può essere alto. Nelle moderne turbine eoliche dove il λ vale tra 5 e 12, la semplice teoria del disco attuatore è applicabile senza un apprezzabile errore.

Notiamo che nella categoria turbine eoliche con rotazione rientrano anche quelle in cui quest'ultima è generata per spinta diretta (che nel paragrafo 10.3 indicate come VAWT "drag type", tra cui rientra la turbina Savonius). Per queste ultime, è possibile calcolare il coefficiente di potenza, come

$$C_W = \frac{W}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^3 A_d} = \frac{\frac{1}{2} \rho \omega R (V_\infty - \omega R)^2 C_D A_d}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^3 A_d} = C_D \lambda (1 - \lambda)^2$$

essendo $V_r = V_\infty - \omega R$, la velocità relativa tra la corrente fluida e la velocità di rotazione della turbina (cioè la velocità in base alla quale si calcola il coefficiente di resistenza della turbina C_D): L'espressione precedente è analoga a quella trovata nella teoria del disco attuatore con la quantità λ al posto di a e il fattore C_D al posto di 4. Anche in questo caso il valore massimo del coefficiente di potenza si trova massimizzando la variazione del coefficiente C_W rispetto a λ , ottenendo

$$(C_W)_{\max} = \frac{4}{27} C_{D\max} = 0.148 C_{D\max} \quad \text{per } \lambda=1/3$$

Poiché di solito il coefficiente di resistenza di un semicilindro ha un valore compreso tra 1 e 2, si ottiene che il coefficiente di potenza massimo ottenibile da una turbina di tipo Savonius è molto inferiore a quello di una turbina HAWT, per la quale vale pienamente la teoria del disco attuatore, pur avendo le turbine ad asse verticale il vantaggio dell'indipendenza delle prestazioni dalla direzione di provenienza del vento. Chiaramente il funzionamento di una turbina Savonius è legato al fatto che il coefficiente di resistenza sulla faccia concava è molto maggiore di quello sulla faccia convessa (circa 1.4 per la prima e circa 0.3 per la seconda). Questo effetto va considerato nella valutazione delle prestazioni a partire dalla formula precedente.

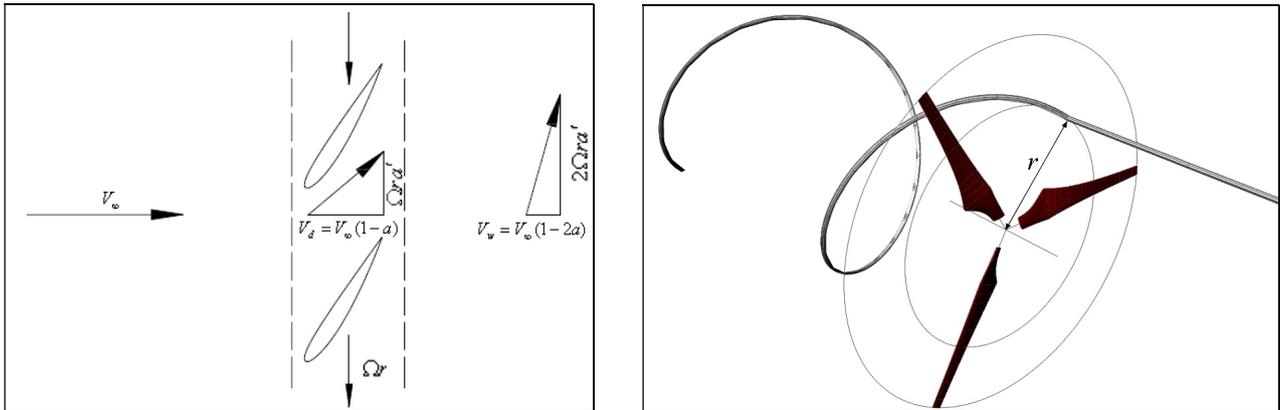


Figura 56. Composizione vettoriale delle velocità di traslazione e di rotazione sulle pale (a sinistra) e schema della rotazione a valle del rotore per una generica distanza r dal centro (a destra).

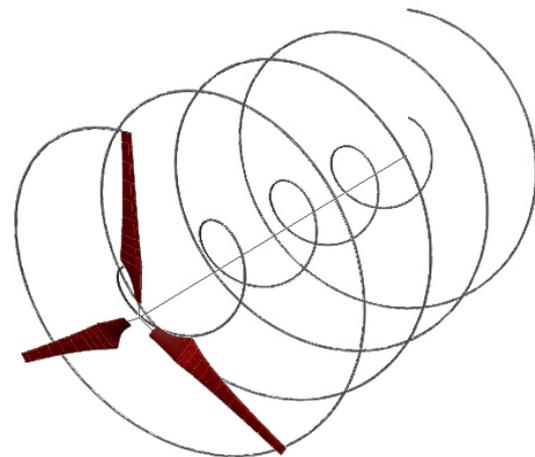


Figura 57. Vortici di estremità e radice su pale eoliche.

Teoria dell'elemento di pala

Nelle teorie del disco attuatore e rotorico il rotore è composto da una superficie permeabile attraverso la quale al fluido passante vengono impartite variazioni di velocità assiale e tangenziale e quantità di moto assiali e tangenziali. Però dobbiamo considerare che il rotore è formato da pale composte di profili alari e quindi esse operano in analogia alle ali. Per tale motivo possiamo immaginare che ai bordi delle stesse, in corrispondenza dell'estremità e della radice, siano presenti dei vortici del tutto analoghi a quelli comunemente osservati su un aereo (figura 57). Inoltre sono proprio le superfici palari, e le forze aerodinamiche che su esse si sviluppano, gli elementi

essenziali che permettono di estrarre l'energia dalla corrente fluida. Si assume che l'elemento di pala in una generica posizione radiale sia il solo responsabile della variazione della quantità di moto del fluido che lo attraversa e che in generale non ci sia interazione tra anelli adiacenti.

Si assumerà che le forze di portanza e resistenza su un elemento di pala possano essere descritte dai coefficienti di portanza C_L e resistenza C_D del generico profilo che compone l'elemento stesso (funzioni dell'angolo di incidenza come riportato nel capitolo 8). L'angolo di attacco in ogni posizione radiale e quindi per ogni elemento che compone la pala verrà determinato sfruttando la velocità della corrente fluida e la sua direzione, in aggiunta a quelli che sono i fattori di influenza assiale e tangenziale e la velocità rotazionale della pala. Conoscendo la variazione dei coefficienti di portanza e resistenza con l'angolo di attacco, sarà possibile ricavare le forze risultanti sull'elemento di pala per un determinato valore di a ed a' . In questo caso parliamo quindi di turbine eoliche con generazione di portanza e quindi HAWT oppure VAWT "lift type".

A tale scopo, consideriamo allora un rotore di raggio R composto da N pale; ogni elemento radiale sarà descritto da una generica corda c , come rappresentato nella figura 58. Supponiamo che le pale ruotino ad una velocità angolare Ω e consideriamo un generico elemento posto a distanza radiale r dall'asse del rotore. La velocità tangenziale dell'elemento di pala di ampiezza radiale dr dovuta alla rotazione sarà espressa da Ωr ($-\Omega r$ per il fluido) e a questa si sommerà la velocità tangenziale della scia (legata al fattore a'), ricavata tramite la teoria del disco rotorico, che in corrispondenza del piano del rotore e pari a $\Omega r a'$.

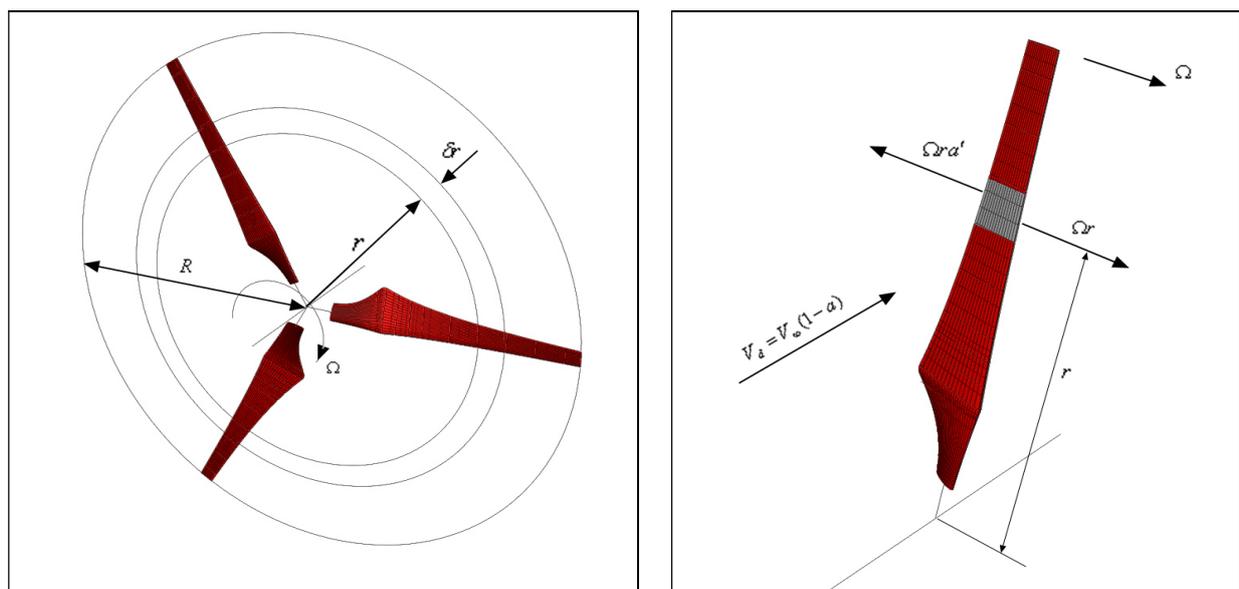


Figura 58. Schematizzazione di un rotore con la teoria dell'elemento di pala.

La velocità tangenziale complessiva del fluido sarà quindi $(1 + a')\Omega r$. La velocità della corrente in corrispondenza del disco, ricavata con la teoria del disco attuatore è pari a $V_d = V_\infty(1 - a)$ e quindi componendo vettorialmente la velocità complessiva sul generico elemento sarà

$$V_{tot} = \sqrt{V_\infty^2(1 - a)^2 + \Omega^2 r^2(1 + a')^2} \quad (197)$$

Da cui si nota che essa, per una fissata velocità del vento e velocità angolare del rotore, è variabile in funzione della posizione radiale dell'elemento e dei fattori di influenza assiale e tangenziale.

Consideriamo ora che l'elemento di pala sia composto da un profilo alare e che l'angolo che la risultante della velocità forma con il piano di rotazione sia Φ (figura 59 a sinistra). Introduciamo ora l'angolo di svergolamento β dell'elemento come quello compreso tra il piano del disco e la corda del profilo dell'elemento (in pratica l'angolo di incidenza della corrente in assenza di rotazione). Entrambi gli angoli possono essere funzione della distanza dall'asse. Si ricava

$$\sin \Phi = \frac{V_\infty(1 - a)}{V_{tot}}, \quad \cos \Phi = \frac{\Omega r(1 + a')}{V_{tot}}, \quad \text{tg} \Phi = \frac{V_\infty(1 - a)}{\Omega r(1 + a')} = \frac{(1 - a)}{\lambda \mu(1 + a')} \quad (198)$$

L'angolo d'attacco effettivo α_{eff} del profilo sarà $\alpha_{eff} = \phi - \beta$. Dati i coefficienti di portanza e resistenza del profilo (funzione dell'angolo di incidenza effettivo e della sezione considerata) rispetto alla direzione della velocità totale si potranno scrivere le forze come (essendo c la corda del profilo alla data sezione)

$$dL = \frac{1}{2} \rho V_{tot}^2 c C_L dr \quad dD = \frac{1}{2} \rho V_{tot}^2 c C_D dr$$

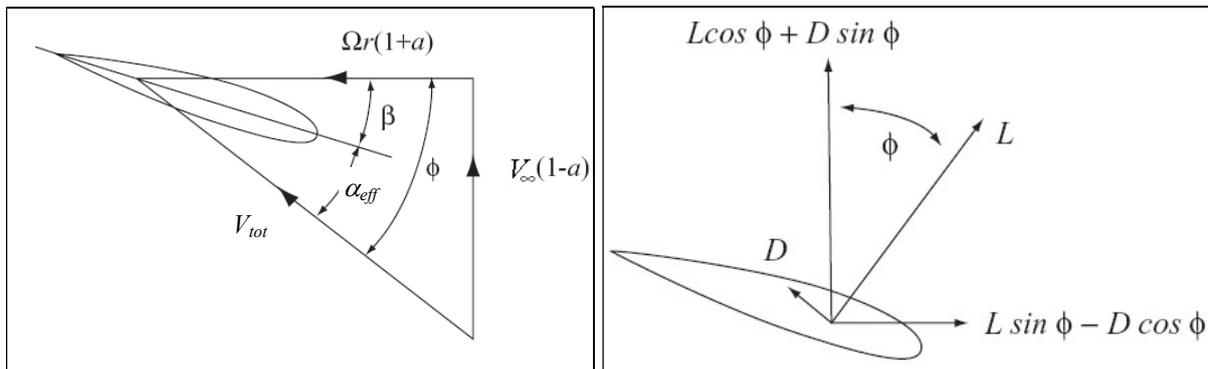


Figura 59. Angoli e velocità assiale e tangenziale sul rotore (a sinistra) e forze agenti (a destra).

Come rappresentato in figura 59 a destra, la forza aerodinamica in direzione assiale sarà data dalla combinazione della portanza, diretta ortogonalmente alla V_{tot} e della resistenza diretta parallelamente. Tale forza sarà quindi generata principalmente dalla portanza essendo l'angolo Φ abbastanza piccolo e corrisponde alla spinta sulla corrente fluida

$$T = N \int_{r_0}^R (\cos \Phi dL + \sin \Phi dD) = \frac{1}{2} \rho N \left(\int_{r_0}^R V_{tot}^2(r) c(r) [C_L(r) \cos \Phi + C_D(r) \sin \Phi] dr \right) \quad (199)$$

avendo integrato sull'apertura della pala (dal mozzo di raggio r_0 all'estremità ad $r=R$) e avendo moltiplicato per il numero delle pale (supposte tutte uguali e non interagenti). Questa equivale alla variazione della quantità di moto assiale già ottenuta dalla teoria del disco attuatore, sostituendo al posto dell'area A_d la quantità $2\pi r dr$ e integrando

$$\Delta Q = \int_{r_0}^R 4\pi \rho V_{\infty}^2 a(1-a) r dr = 4\pi \rho V_{\infty}^2 a(1-a) \left(\frac{R^2 - r_0^2}{2} \right) \quad (200)$$

Dall'uguaglianza tra T e ΔQ è possibile ottenere il collegamento tra i fattori di influenza assiale e tangenziale con i parametri di progetto del rotore e dei profili che ne compongono le pale e quindi ottimizzare la spinta e i valori dei fattori per uno specifico rotore. In effetti è stato trascurato un termine di forza addizionale dovuta alla variazione della componente dinamica della pressione che si ottiene considerando la rotazione della scia $4\pi \rho \Omega^2 r^2 a'^2 \left(\frac{R^2 - r_0^2}{2} \right) = 4\pi \rho V_{\infty}^2 \lambda^2 \mu^2 a'^2 \left(\frac{R^2 - r_0^2}{2} \right)$.

In direzione tangenziale invece forza aerodinamica sarà data dalla combinazione indicata in figura 59 a destra (seni e coseni scambiati rispetto a prima) cioè generata da resistenza e portanza. Questa forza moltiplicata per il braccio r corrisponde alla coppia aerodinamica prodotta dalla pala

$$C = N \int_{r_0}^R \Omega r (\sin \Phi dL - \cos \Phi dD) = \frac{1}{2} \rho N \left(\int_{r_0}^R \Omega r V_{tot}^2(r) c(r) [C_L(r) \sin \Phi - C_D(r) \cos \Phi] dr \right) \quad (201)$$

e sarà equivalente alla variazione della quantità di moto angolare pari al prodotto della portata in massa del fluido ($\rho 2\pi r dr V_d = \rho 2\pi r dr V_{\infty}(1-a)$), della variazione di velocità tangenziale tra monte e valle del disco (che dalla teoria del disco rotorico è pari a $2\Omega r a'$) e del braccio Ωr , ovviamente integrata su tutto il disco rotore

$$\Delta Q_a = \int_{r_0}^R 4\pi\rho V_\infty \Omega^2 a'(1-a)r^3 dr = 4\pi\rho V_\infty \Omega^2 a'(1-a) \left(\frac{R^4 - r_0^4}{4} \right) \quad (202)$$

Anche in questo caso, dall'uguaglianza tra C e ΔQ_a è possibile ottenere il collegamento tra i fattori di influenza assiale e tangenziale con i parametri dei profili delle pale rotoriche e quindi ottimizzare la coppia. Il sistema

$$\begin{cases} T = \Delta Q \\ C = \Delta Q_a \end{cases} \quad (203)$$

dati i coefficienti di portanza e resistenza del profilo quantifica le prestazioni di un rotore mediante un procedimento iterativo. La procedura consiste nell'imporre a ed a' pari a 0 e calcolare poi i coefficienti di portanza e resistenza e l'angolo Φ . Dati questi calcolare i nuovi valori di a ed a' e procedere così iterativamente fino a raggiungere la convergenza del risultato.

Come detto, la teoria BEM è valida solamente nel caso in cui la circolazione sia costante lungo tutta la pala e si può dimostrare che ciò avviene quando a è costante. In caso contrario non si potrebbe affermare l'indipendenza di ogni disco infinitesimo del rotore; in pratica si nota però che l'errore che si ha nel caso in cui a non sia costante è solo apprezzabile per valori del λ inferiori a 3.

Risolviendo il sistema BEM di cui sopra, per un rotore con determinate caratteristiche aerodinamiche e geometriche, si può determinare i valori dei fattori di influenza, a e a' (funzioni di λ) e da questi il valore del coefficiente di spinta, C_W , e del coefficiente di coppia, C_C , in funzione di λ . Un esempio del risultato ottenuto per il primo è mostrato in figura 60 per una turbina moderna.

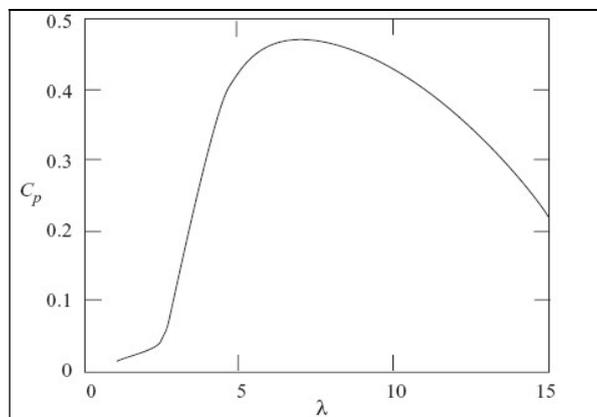


Figura 60. Coefficiente di spinta in funzione del parametro λ .

Proviamo a fare un calcolo semplificato approssimativo, supponendo che il fattore di influenza assiale sia pari al valore ottimale, $a=1/3$. Di conseguenza, il fattore di influenza tangenziale sarà uguale a $a' \approx 4/9\lambda^2$ (avendo approssimato r con R), con $1+a' \approx 1$ già per $\lambda=1$, e sarà possibile scrivere la velocità totale (197) come

$$V_{tot} \approx \sqrt{\frac{4}{9}V_{\infty}^2 + \Omega^2 r^2} = \sqrt{\frac{4}{9}V_{\infty}^2 \left(1 + \frac{9}{4}\lambda^2\right)} \approx V_{\infty}\lambda$$

Le quantità in (198) saranno quindi

$$\sin \Phi \approx \frac{2}{3} \frac{V_{\infty}}{V_{tot}} \approx \frac{1}{\lambda}, \quad \cos \Phi \approx \frac{\Omega r}{V_{tot}} \approx \frac{\Omega R}{V_{\infty}\lambda} = 1$$

Immaginando inoltre che né i coefficienti di resistenza e portanza né la corda dipendano dall'apertura alare, è possibile calcolare la spinta (199) all'apertura media $R/2$ come

$$T \approx \frac{1}{2} \rho N V_{\infty}^2 \lambda^2 c \left(C_L + \frac{C_D}{\lambda} \right) \frac{R}{2} = \frac{1}{2} \rho N V_{\infty}^2 c \frac{R}{2} \lambda (\lambda C_L + C_D)$$

E il relativo coefficiente di spinta come

$$C_T \approx \frac{N}{\pi} \left(\frac{c}{2R} \right) \lambda (\lambda C_L + C_D)$$

avendo usato l'area πR^2 per l'adimensionalizzazione.

In maniera simile è possibile scrivere la coppia (201) e il relativo coefficiente, che rappresenta la potenza ottenibile

$$C \approx \frac{1}{2} \rho N \Omega R V_{\infty}^2 \lambda^2 c \left(\frac{C_L}{\lambda} - C_D \right) \frac{R}{2} = \frac{1}{2} \rho N V_{\infty}^3 c \frac{R}{2} \lambda^2 (C_L - \lambda C_D)$$

$$C_W \approx \frac{N}{\pi} \left(\frac{c}{2R} \right) \lambda^2 (C_L - \lambda C_D)$$

Dalle espressioni precedenti per i coefficienti di spinta e potenza si nota l'importanza relativa dei termini di portanza e resistenza al variare del valore di λ .

In particolare, calcolando il massimo di potenza in funzione del tip speed ratio λ (derivando ed eguagliando a zero l'espressione precedente), si ottiene

$$\lambda = \frac{2}{3} \frac{C_L}{C_D}, \quad C_{W \max} \approx \frac{N}{\pi} \left(\frac{c}{2R} \right) \frac{4}{27} \frac{C_L^3}{C_D^2}, \quad C_{T \max} \approx \frac{N}{\pi} \left(\frac{c}{2R} \right) \frac{2}{9} \frac{C_L}{C_D^2} (2C_L^2 + 3C_D^2)$$

Essendo per un tipico profilo palare utilizzato in ambito eolico, $C_L \approx 1$, $C_D \approx 0.1$ e un rapporto geometrico apertura-corda pari almeno a 10, risulta un valore massimo della potenza per $\lambda \approx 6 \div 7$ con $C_{W_{max}} \approx 0.2N$ (con 3 pale risulta circa 0.6) e $C_{T_{max}} \approx 0.7N$.

Dalla figura 60, si nota in effetti che il massimo coefficiente di potenza si ha solo per un determinato valore di λ , circa uguale a 7 nel caso specifico, in questo caso si può trovare (si veda il paragrafo 10.6) che il fattore di influenza assiale approssima il valore di $1/3$ fornito dal limite di Betz. Quando il valore di λ è basso, allora gli angoli di attacco sono elevati e il profilo può essere in condizioni di stallo, se al contrario questo valore è elevato allora gli angoli di attacco sono bassi. E ovvio perciò pensare che il rotore dovrà essere progettato per funzionare per la maggior parte del tempo in condizioni per le quali il C_W è massimo. Nelle condizioni di elevato valore di λ , il rotore si comporta come un disco con permeabilità variabile e per tende alla condizione (che si verifica anche per $a = 1$) in cui il rotore diviene una piastra circolare solida attraverso la quale il fluido non può passare. Il fluido che raggiunge il bordo del disco tenderà ad aggirarlo creando una grossa zona di separazione nella quale l'energia cinetica in eccesso del fluido verrà assorbita dalla viscosità dell'aria; inoltre a causa di ciò, nella la zona a valle del rotore, sarà presente aria quasi stagnante e la differenza di pressione sul disco rotorico produrrà una resistenza di pressione. Tale fenomeno è del tutto analogo a quello che si riscontra nelle eliche propulsive in regime frenante. Per rendere i risultati sperimentali applicabili a turbine eoliche in condizioni di λ elevati, Hermann Glauert, (1892-1934) ha trovato una relazione empirica che mette in relazione il coefficiente di spinta con il fattore di influenza assiale (figura 61)

$$a = 0.143 + \sqrt{0.0203 - 0.6427(0.889 - C_T)}$$

valida per $a > 0.4 = \frac{2}{5}$, quando si raggiunge la condizione $C_T > 0.96$

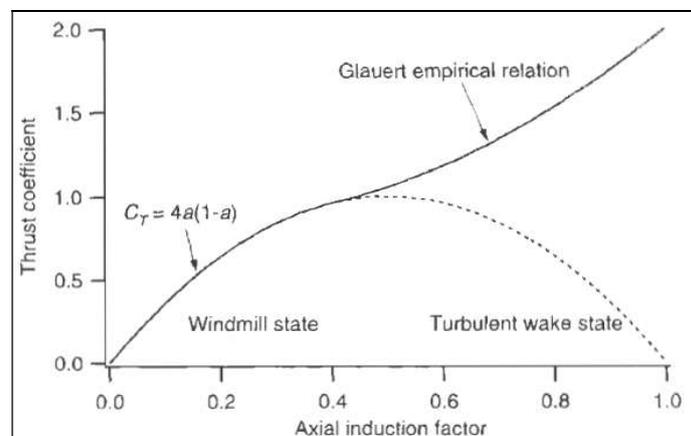
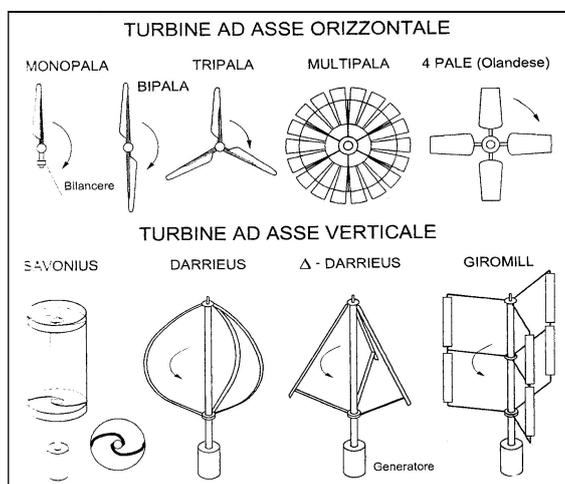


Figura 61. Andamento del coefficiente di spinta (C_T) in funzione del fattore di influenza assiale, a con correzione empirica di Glauert.

Nella figura 62 sono rappresentate alcune turbine eoliche ad asse orizzontale e verticale e i relativi diagrammi di coefficiente di potenza in funzione del fattore λ , rispetto all'andamento ideale. Si trova qui conferma del fatto che le turbine VAWT hanno in generale prestazioni inferiori a quelle HAWT, come ottenuto anche dai modelli semplificati. Nella figura 63 a sinistra è invece riportato l'andamento della solidità del rotore, $\sigma = \text{Area occupata dalle pale} / \text{Area totale del cerchio}$, in funzione del fattore λ per turbine HAWT. Maggiore è il numero delle pale (e quindi la solidità) e minore sarà il valore di λ (cioè minore sarà la velocità di rotazione rispetto alla velocità del vento) per ottenere un funzionamento quasi ideale. Anche da qui si nota che per un rotore con tre pale il funzionamento ideale si colloca per valori di λ compresi tra 4 e 6. Questo trova conferma nell'andamento dei coefficienti di potenza in funzione del numero di pale come riportato a destra.

La distinzione a parità di potenza tra rotorii veloci (bassa σ) e rotorii lenti (elevata σ) non è una semplice classificazione delle macchine ma comporta importanti conseguenze dal punto di vista del momento delle forze aerodinamiche di avvio (velocità del vento di partenza) e dell'impatto ambientale delle macchine (impatto visivo ed acustico). I moderni generatori eolici ad asse orizzontale sono bipala o tripala. Confrontando il coefficiente di potenza di tali rotorii dalla figura 63, a parità di potenza, si nota che un basso valore della solidità produce un andamento della curva più piatto che varia poco attorno al massimo, che però è piuttosto basso. D'altra parte, un alto valore di solidità produce una curva più ristretta, quindi sensibile alle variazioni di λ e con un elevato valore del fattore di potenza. Di conseguenza il rotore tripala rappresenta la soluzione ottimale in termini di solidità, anche se nel caso di rotorii con più di tre pale il valore del massimo non si discosta molto da quello del tripala ma con velocità del vento notevolmente più bassa. Ciò significa che, nonostante la maggiore diffusione dei generatori tripala, esiste la possibilità di utilizzare rotorii a 4-5 pale per applicazioni di potenza nel caso di distribuzioni di velocità del sito aventi un basso valore.



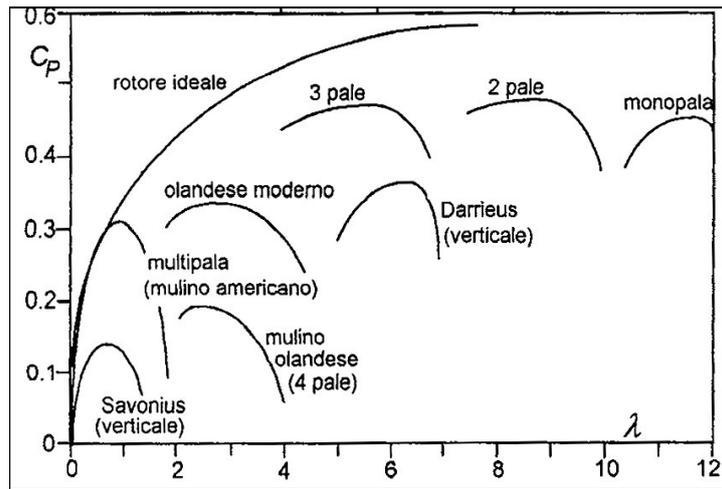


Figura 62. Esempi di turbine eoliche HAWT e VAWT (sopra) e andamento del coefficiente di spinta (C_p) in funzione del tip speed ratio per i differenti tipi di turbine (sotto).

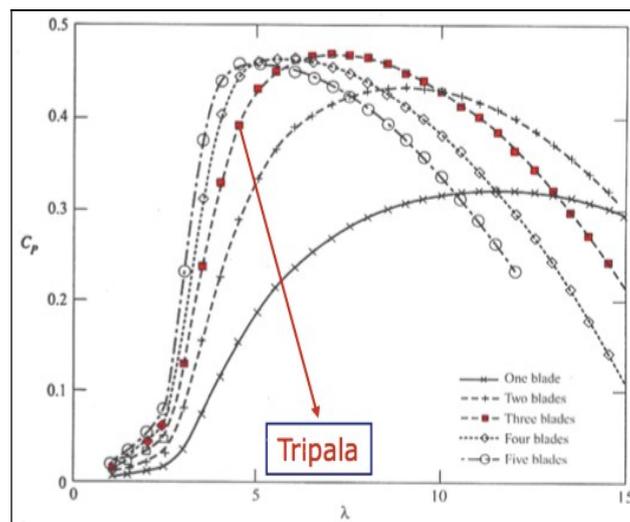
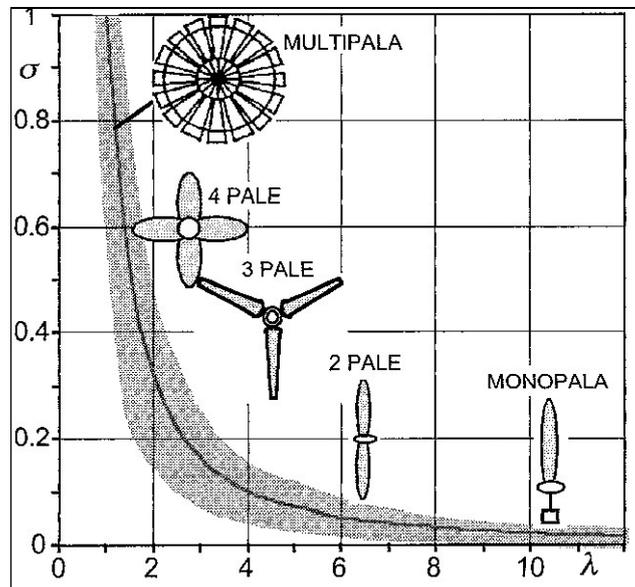


Figura 63. Andamento del rapporto di solidità in funzione del tip speed ratio per turbine HAWT (sopra) e andamento del coefficiente di spinta per differente numero di pale (sotto).

10.6 ESEMPIO APPLICATIVO

Supponiamo che il fattore λ sia fissato da progetto, e che si voglia far funzionare il rotore in modo da produrre il massimo coefficiente di spinta. Ricordando che questo è legato al coefficiente di coppia, si può massimizzare l'espressione (203) rispetto ad a e a' (trascurando il raggio del mozzo rispetto a quello del rotore)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a'}(\pi\rho\lambda V_\infty^2 R^3 a'(1-a)) &= \pi\rho\lambda V_\infty^2 R^3 (1-a) \\ \frac{\partial}{\partial a}(\pi\rho\lambda V_\infty^2 R^3 a'(1-a)) &= -\pi\rho\lambda V_\infty^2 R^3 a'\end{aligned}$$

per ottenere

$$\frac{\partial a}{\partial a'} = \frac{a-1}{a'} \quad (204)$$

Riprendiamo le relazioni (200) e (201) uguagliate come nella prima delle (204) e calcolate per una corona circolare infinitesima del rotore (avendo ommesso la dipendenza esplicita da r delle quantità)

$$\frac{1}{2}\rho NV_{tot}^2 c(C_L \cos \Phi + C_D \sin \Phi) dr = 4\pi\rho V_\infty^2 [a(1-a) + (\lambda\mu a')^2] r dr$$

e così per le (202) e (203), come nella seconda delle (204)

$$\frac{1}{2}\rho NV_{tot}^2 c(C_L \sin \Phi - C_D \cos \Phi) r dr = 4\pi\rho V_\infty^2 \Omega a'(1-a) r^3 dr$$

Le equazioni precedenti possono anche essere scritte come

$$\begin{aligned}NV_{tot}^2 \frac{c}{R}(C_L \cos \Phi + C_D \sin \Phi) &= 8\pi V_\infty^2 [a(1-a) + (\lambda\mu a')^2] \mu \\ NV_{tot}^2 \frac{c}{R}(C_L \sin \Phi - C_D \cos \Phi) &= 8\pi V_\infty^2 \lambda \mu^2 a'(1-a)\end{aligned}$$

Dividiamo ora la seconda per la prima delle equazioni precedenti in modo da ricavare una relazione tra i fattori di influenza assiale e tangenziale

$$\frac{\frac{C_L}{C_D} \operatorname{tg} \phi - 1}{\frac{C_L}{C_D} + \operatorname{tg} \phi} = \frac{\lambda \mu a' (1 - a)}{a(1 - a) + (a' \lambda \mu)^2}$$

Utilizzando la (199) per la tangente dell'angolo Φ , si ottiene

$$\frac{\frac{C_L}{C_D} (1 - a) - \lambda \mu (1 + a')}{\frac{C_L}{C_D} \lambda \mu (1 + a') + (1 - a)} = \frac{\lambda \mu a' (1 - a)}{a(1 - a) + (a' \lambda \mu)^2}$$

o anche

$$\left[\frac{C_L}{C_D} (1 - a) - \lambda \mu (1 + a') \right] [a(1 - a) + (a' \lambda \mu)^2] = \left[\lambda \mu (1 + a') \frac{C_L}{C_D} + (1 - a) \right] \lambda \mu a' (1 - a)$$

Il procedimento può essere semplificato trascurando il coefficiente di resistenza che normalmente è molto più piccolo di quello di portanza (almeno prima dello stallo). Ciò significa che i termini contenenti il fattore C_L/C_D sono più grandi degli altri nelle parentesi e l'equazione si semplifica in

$$a(1 - a) - \lambda^2 \mu^2 a' = 0 \quad (205)$$

Differenziando rispetto ad a'

$$(1 - 2a) \frac{\partial a}{\partial a'} - \lambda^2 \mu^2 = 0$$

e sostituendo la (205) si ottiene

$$(1 - 2a)(1 - a) - \lambda^2 \mu^2 a' = 0$$

che insieme alla (204) permette di ottenere la seguente soluzione di funzionamento ottimizzato

$$a = \frac{1}{3} \quad (206)$$

$$a' = \frac{a(1 - a)}{\lambda^2 \mu^2}$$

cioè proprio quelle ricavate dalle teorie del disco attuatore e rotorico. Ciò è possibile in quanto non sono state considerate perdite aerodinamiche (resistenza ed effetti tridimensionali) e il numero di pale è considerato essere talmente elevato che ogni particella di fluido passante attraverso il rotore sia in grado di interagire con una di esse.

Per mettere in relazione quanto ottenuto con il progetto delle pale, è necessario prendere una delle equazioni del sistema iniziale. Sempre trascurando il contributo della resistenza (e quindi considerando che l'angolo Φ tende a 90°), dalla (203) si ottiene la relazione

$$\Delta Q_a = 4\pi\rho V_\infty \Omega a' (1-a)r^3 dr = 4\pi\rho \frac{V_\infty^3}{\Omega} a(1-a)^2 r dr \quad (207)$$

che va eguagliata alla (202) semplificata

$$4\pi\rho \frac{V_\infty^3}{\Omega} a(1-a)^2 r dr = C = \frac{1}{2} \rho N V_{tot}^2 c C_L \sin\Phi r dr \quad (208)$$

Introducendo il teorema di Kutta-Joukowski per la velocità totale e per unità di apertura alare

$$L = \rho V_{tot} \Gamma, \quad C_L = \frac{2\Gamma(r)}{V_{tot} c}$$

(dove $\Gamma(r)$ indica la circolazione presente su ogni pala a distanza r dall'asse), si ricava un'ulteriore condizione di funzionamento ottimizzato (usando la (199))

$$N\Gamma(r) = 4\pi \frac{V_\infty^2}{\Omega} a(1-a)$$

e cioè il funzionamento è ottimizzato quando la circolazione su ogni pala è costante lungo l'apertura (essendo a una costante). Tale distribuzione viene approssimativamente rappresentata nella figura 64. In particolare per $a=1/3$ si ottiene la dipendenza solo dalla velocità indisturbata e dalla velocità di rotazione del rotore

$$N\Gamma(r) = \frac{8}{9} \pi \frac{V_\infty^2}{\Omega}$$

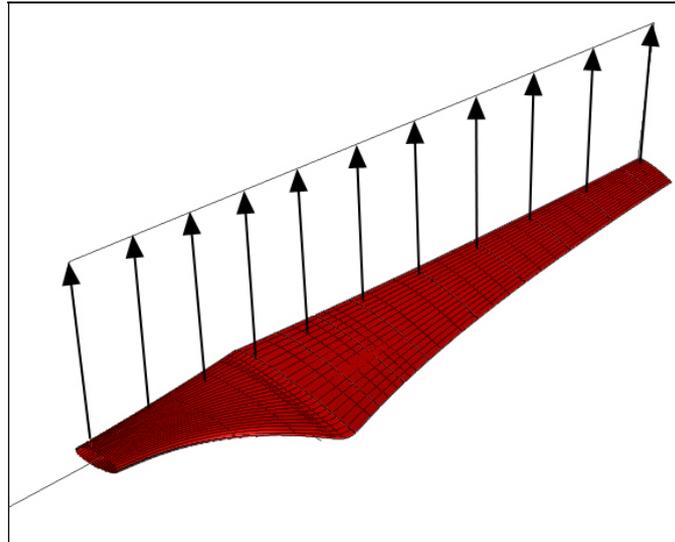


Figura 64. Andamento della circolazione lungo l'apertura della pala per la condizione di funzionamento ottimizzato.

Si passerà ora a determinare quelle che sono le caratteristiche geometriche della pala per quello che riguarda l'angolo β e la dimensione della corda c corrispondente in funzione della distanza dal centro di rotazione. Dalla (208) e (209) possiamo scrivere

$$\frac{V_{tot}^2}{V_{\infty}^2} N \frac{c}{R} C_L \sin\Phi = 8\pi\lambda\mu^2 a'(1-a)$$

sostituendo l'espressione del seno dell'angolo Φ si trova

$$C_L \frac{Nc}{2\pi R} = \frac{4\lambda\mu^2 a'}{V_{tot}/V_{\infty}} = \frac{4\lambda\mu^2 a'}{\sqrt{(1-a)^2 + [\lambda\mu(1+a')]^2}}$$

dove nell'ultima uguaglianza si è sostituito il valore della velocità totale dato dalla (198). Al primo membro sono riuniti i termini incogniti dovuti alla geometria della pala per ciascuna sezione a distanza r dal centro di rotazione (coefficiente di portanza del profilo, numero delle pale, valore della corda del profilo), mentre a secondo membro sono riportati i valori dei fattori di induzione e del prodotto $\lambda\mu$ (detto rapporto di velocità locale, uguale al rapporto tra le velocità tangenziale e assiale all'estremità palare e funzione lineare della distanza r). Introducendo la cosiddetta solidità della corda $\sigma = Nc/2\pi R$, cioè il rapporto tra la lunghezza della corda di tutte le pale e la lunghezza della circonferenza del rotore, il parametro geometrico della pala ($\beta_{GP} = \sigma\lambda C_L$) e le relazioni di funzionamento ottimizzato (207), è possibile scrivere la relazione di funzionamento ottimale

$$\beta_{GP} = \sigma \lambda C_L = \frac{8/9}{\sqrt{4/9 + \lambda^2 \mu^2 \left[1 + 2/9 (\lambda^2 \mu^2) \right]^2}}$$

dove tutto viene espresso in funzione del rapporto di velocità locale, $\lambda\mu$. Se il coefficiente di portanza viene ottimizzato per altra via, per esempio massimizzando l'efficienza del profilo (così che la resistenza possa essere effettivamente trascurata), allora la relazione precedente permette di trovare i valori della corda alle varie distanze radiali, cioè la distribuzione in pianta $c(r)$. Infatti per quanto riguarda le altre grandezze in β_{GP} , il valore di λ è assegnato dalla velocità V_∞ (del vento locale) e dalla velocità di rotazione Ω (da condizioni strutturali e di velocità alle estremità palari), così come è assegnato il raggio del rotore R (da considerazioni strutturali ed ambientali) e il numero delle pale N . L'andamento della corda in pianta è rappresentato in figura 65 in alto.

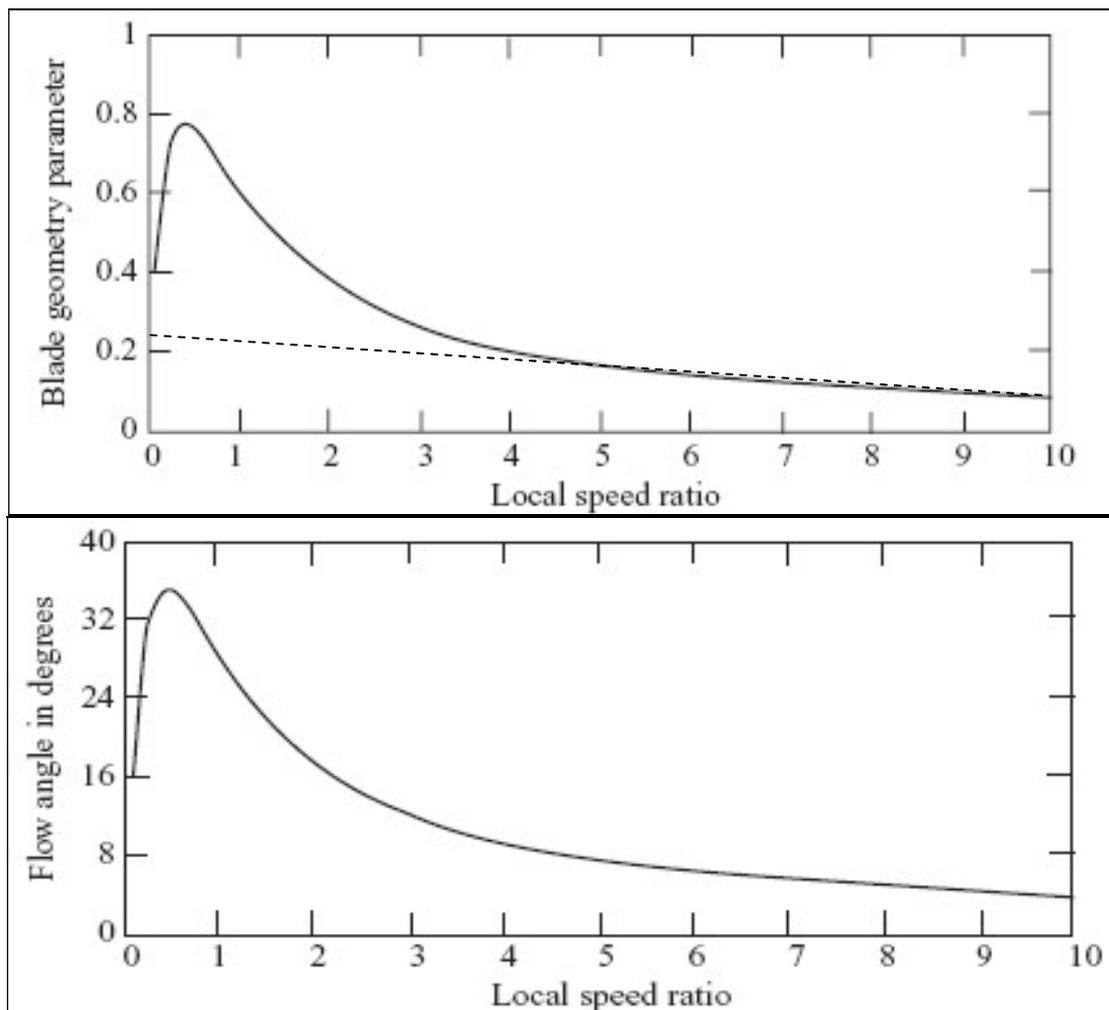


Figura 65. Andamento della corda locale (in alto) con approssimazione lineare (linea tratteggiata) e dell'angolo di svergolamento β (in basso) in funzione del rapporto di velocità locale.

Da questa figura è possibile dedurre che per velocità di rotazione della pala basse rispetto a quella del vento (cioè per le sezioni vicino alla radice, $\lambda\mu < 1$, o anche per pale con basso allungamento, $c/R \sim 1$), la corda locale è una frazione significativa del raggio complessivo (pala corta). Invece per velocità di rotazione della pala alte rispetto a quella del vento (cioè per le sezioni lontano dalla radice, $\lambda\mu > 1$, o anche per pale con elevato allungamento, $c/R \ll 1$), la corda locale andrà diminuendo sempre più fino a valori pari a $1/5 \div 1/8$ del caso precedente (pala allungata).

Dall'espressione (199) è anche possibile trovare la tangente dell'angolo di incidenza effettiva Φ , nella condizione di funzionamento ottimale, rappresentato in figura 63 in basso

$$\tan \phi = \frac{2/3}{\lambda\mu \left(1 + \frac{2}{3\lambda^2\mu^2} \right)}$$

che quindi è elevato in corrispondenza della radice della pala (cosa che può provocare stallo in questa regione e quindi rendere questa parte della pala di poca efficacia) e decresce verso l'estremità. Se il coefficiente di portanza viene ottimizzato, di solito l'angolo di incidenza effettivo α_{eff} sarà costante e quindi la rappresentazione dell'angolo Φ coincide con quella dell'angolo di svergolamento β ($\beta = \phi - \alpha_{eff}$), come indicato in figura 65 in basso. Se invece l'andamento dell'angolo di incidenza effettivo è differente allora sarà differente anche la rappresentazione dell'angolo β rispetto a Φ .

Si noti che la realizzazione pratica di un'ala che abbia una corda in pianta come rappresentato in figura 65 può essere problematica. Si preferisce allora utilizzare un andamento lineare che approssimi tale andamento e che risulta di più facile realizzazione pratica (l'andamento lineare è rappresentato nella figura 65 in alto con linea tratteggiata). Questo corrisponde ad utilizzare una pala con pianta di tipo *b* della figura 66 rispetto a quella di tipo *a*, mentre quella di tipo *c* è con corda costante.

E' bene mettere ancora in evidenza che nelle condizioni di funzionamento ottimale si ottiene la massima estrazione di potenza dalla corrente fluida. Si è ipotizzato nella derivazione della teoria che l'effetto della resistenza viene trascurato rispetto a quello della portanza. Questo ha portato al risultato precedente che il fattore di influenza assiale *a* risulta costante per ogni posizione radiale, mentre il fattore di influenza tangenziale varia radialmente in funzione di *a*.

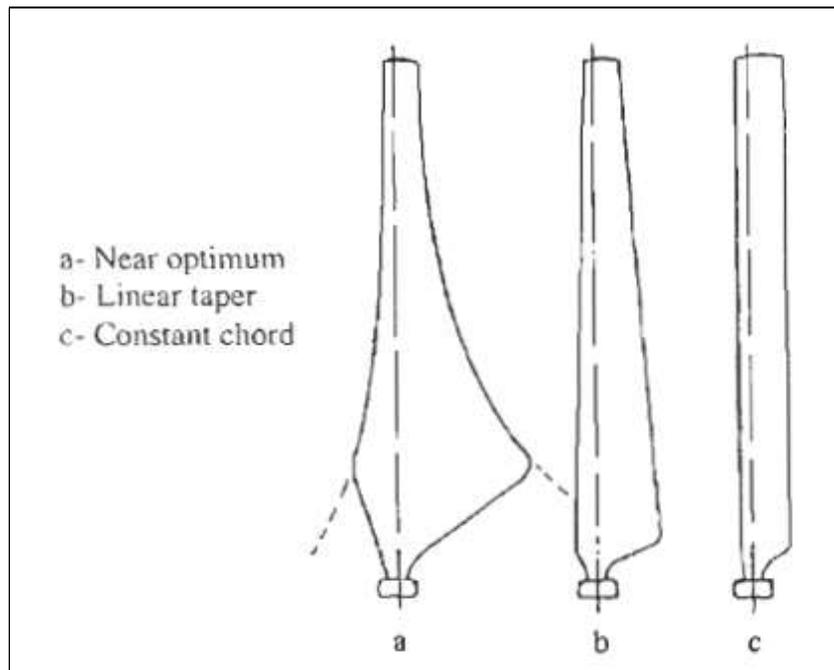


Figura 66. Esempi di pianta di pale eoliche: vicino ottimale (a), con approssimazione lineare (b) e a corda costante (c).

In presenza dei termini contenenti la resistenza nelle relazioni (204), il fattore di influenza assiale non risulta essere più costante; esso è in realtà variabile radialmente rispetto alla condizione ottimale con resistenza nulla, così come di conseguenza a' . La differenza tra i valori di a ed a' con e senza resistenza è comunque limitato e si mantiene tale anche in condizioni di bassa efficienza, pertanto tale effetto viene trascurato nel disegno delle pale. La presenza della resistenza va anche a modificare i parametri geometrici di corda e svergolamento della pala, ma di nuovo risulta essere trascurabile ai fini della determinazione della distribuzione radiale anche nel caso di efficienze molto basse e ciò giustifica il fatto di trascurarla nel progetto delle pale.

Da quanto visto in precedenza la parte delle pale in prossimità della radice risulta di bassa efficienza in quanto gli angoli di incidenza effettivi possono provocare lo stallo. Inoltre in corrispondenza della radice sono presenti dei vortici che limitano di fatto il funzionamento (una cosa simile accade alle estremità palari dove pure vi sono i vortici di estremità che limitano l'efficienza, ma solo per $c/R > 0.9$). La zona di radice di una pala eolica viene quindi riportata ad un profilo cilindrico utilizzato solo per ragioni strutturali.

Per quanto riguarda il numero delle pale, alla base della scelta ci sono considerazioni di carattere ambientale ed economico, che hanno una grande importanza nel caso di turbine reali. Scegliendo un numero di pale basso si hanno

- vantaggi economici in termini di materiale utilizzato;
- rumore aerodinamico più elevato (proporzionale alla quinta potenza del λ) poiché per aumentare il C_p si deve ricorrere a λ più elevati;
- impatto visivo maggiore dovuto alle dimensioni della coppia rotore/torre;
- minore coppia a basse velocità del vento;
- miglior compromesso tra peso e dimensioni,

mentre un numero di pale elevato presenta invece motivazioni completamente opposte

- costi maggiori;
- migliore impatto ambientale in quanto il rotore risulta più compatto;
- maggiore coppia.

Di conseguenza a quanto appena detto e a quanto visto nella figura 65, un rotore per la produzione di energia elettrica, sarà un rotore efficiente e veloce e funzionante dunque quindi ad elevati valori del λ , le corde risultanti saranno piccole e le pale avranno una bassa solidità ed un elevato allungamento, la coppia sarà però limitata (figura 67 a sinistra). Tra queste un numero di pale medio (fino a 3) è utilizzato per rotori di grosse dimensioni mentre rotori più piccoli per basse energie possono venir costruiti con un numero di pale ridotto (1 o 2). Invece un rotore disegnato per produrre coppia elevata (ad esempio un mulino a vento o una pompa per l'acqua) funzionerà a valori di λ bassi dunque avrà pale corte e tozze con elevata solidità (figura 67 a destra).



Figura 67. Rotore eolico per produzione di energia elettrica (a sinistra) e per estrazione d'acqua (a destra).

10.7 CONFRONTI CON ELICHE PROPULSIVE

Le turbine eoliche sono comunque eliche quindi un confronto con quelle propulsive risulta quasi forzato. La differenza principale che si incontra è legata a problemi di vincolo di progetto differenti: mentre un'elica propulsiva è progettata per produrre il massimo della spinta con il minimo della coppia necessaria, una turbina eolica è disegnata per produrre il massimo della potenza, cercando ma non obbligatoriamente, di avere il minimo della spinta. Si noti perciò che in questi due casi i vincoli sono differenti, infatti mentre un'elica propulsiva sarà legata a due vincoli, di coppia e di spinta, una turbina eolica avrà solo un vincolo obbligatorio, quello della potenza e perciò della coppia. Inoltre, essendo descritto il funzionamento di questi due dispositivi dalle medesime teorie di base, si ottengono similitudini talvolta molto marcate, queste sono riassunte di seguito:

- i fattori di influenza assiale sono presenti in entrambi i casi ma hanno un diverso segno (positivo per le turbine e negativo per le eliche);
- il tubo di flusso relativo alle turbine eoliche subisce un'espansione, mentre nel caso di un'elica propulsiva subisce una contrazione a valle del rotore;
- in entrambi i casi è presente l'avvitamento della scia e questo nel caso delle eliche propulsive viene generalmente definito come "swirl";
- in entrambi i casi si può utilizzare un sistema di variazione del passo, ma questo è molto più frequente nelle eliche propulsive.