RELAZIONI FUNZIONALI TRA GRANDEZZE

(DIPENDENZA A POTENZA)

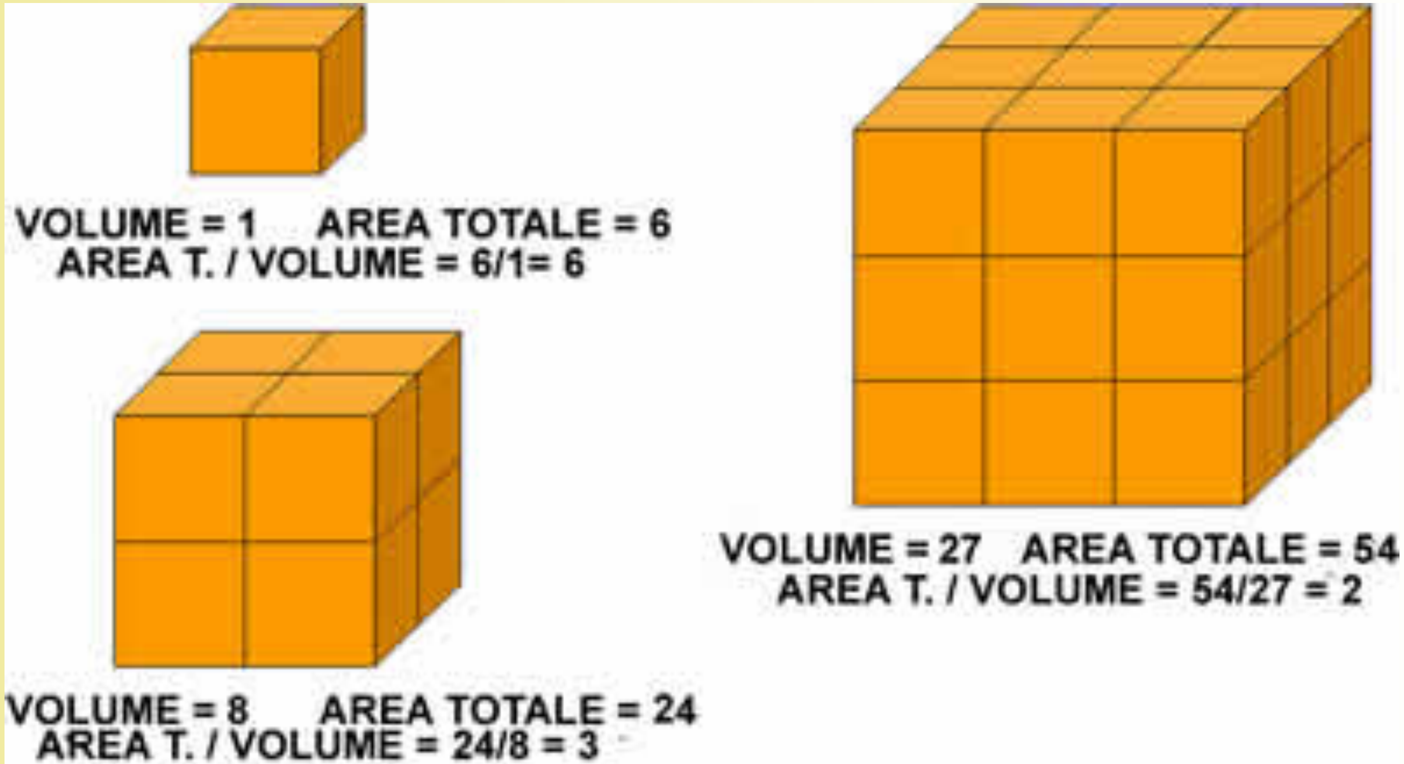
Perché gli organismi viventi non crescono indefinitamente?

Perché all'accrescimento di tutto l'organismo corrisponde un preciso accrescimento di una parte? (Non esistono organismi con braccia o zampe o foglie abnormi?)

Cerchiamo di rispondere a queste domande in modo quantitativo

LEGGI DI SCALA

Sup. Laterale/
Volume =6



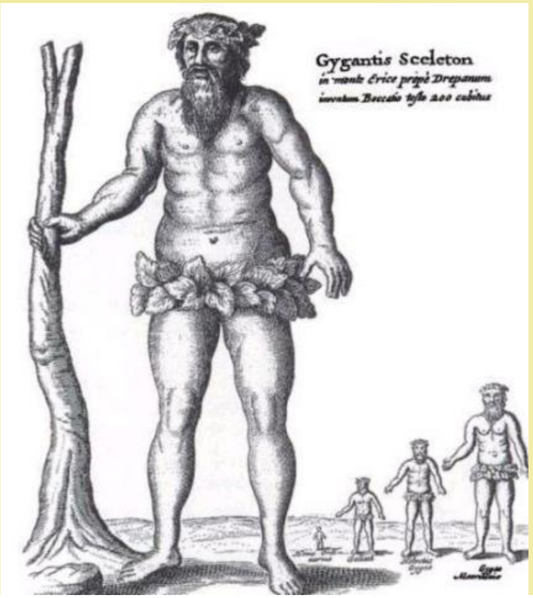
Sup. Laterale/Volume=3

Sup. Laterale/Volume=2

A parità di forma, all'aumentare delle dimensioni diminuisce il rapporto superficie laterale/volume

Una persona che pesa 70 Kg ed è alta 1,70m se diventasse 10 volte più grande, mantenendo tutte le caratteristiche, dovrebbe avere un'altezza di 17m e un peso (proporzionale al volume) di 70 000 Kg=70 tonnellate.

Questo gigante non potrebbe camminare visto che la pressione (p = peso/superficie) che il peso eserciterebbe sulle gambe sarebbe 10 volte maggiore



p'= 1000 peso/100 superficie=10p

L'evoluzione ha favorito organismi che abbiano dimensioni (più limitate), adeguate alla funzionalità degli organi.

Organismi molto grandi esistono

Balenottera azzurra

33m di lunghezza,
180 tonn di peso

ma può vivere solo in acqua, favorita dalla "spinta di Archimede"

Sequoia Gen. Sherman (Foresta gigante California)

Altezza 83,8m
Peso stimato 1919 tonn

E' una "colonna" saldamente ancorata al terreno

Il rapporto superficie- volume è una funzione della dimensione lineare l.

Sup. laterale $S=S(l)= Cl^2$ $(l^2=S/C, l=(S/C)^{1/2})$
Volume $V=V(l)= Kl^3$

$S(l)/V(l)= Al^2l^{-3}=Al^{-1}$ è una funzione potenza di l

(o anche $V=Kl3=Kl(S/C)= K [(S/C)^{1/2}] (S/C)=B (S/C)^{3/2}$)

LE FUNZIONI POTENZA

Se $\quad f: x \longrightarrow f(x)=y=ax^k$

k numero razionale, a numero reale

la f è una "funzione potenza"

(Ad es se a=2 k=1/2

$$f(x)=2x^{1/2}=2\sqrt{x})$$

(ATTENZIONE: k è <u>dato</u>, varia x e bisogna calcolare x^k)

Il dominio delle funzioni potenza dipende dal valore dell'esponente k

Se k è un razionale positivo con il denominatore pari (1/2,3/4, 5/6 ecc. il dominio è l'insieme dei valori x reali e ≥ 0

(ad es. $f(x)=3(x)^{3/2}=3(x^3)^{1/2}=3\sqrt{x^3}$ è una funzione definita solo se $x \geq 0$ perché la radice quadrata di un numero negativo non è un numero reale)

Se k è un razionale positivo con il denominatore dispari (1/3,5/3,2/5 ecc. il dominio è l'insieme di tutti i valori di x reali

(ad es. $f(x)=(2x)^{3/5}=(2x^3)^{1/5}=\sqrt[5]{(2x^3)}$ è una funzione definita per ogni x)

Se k è un razionale negativo (ad es. $k=-1$, $-1/2$…) la funzione è

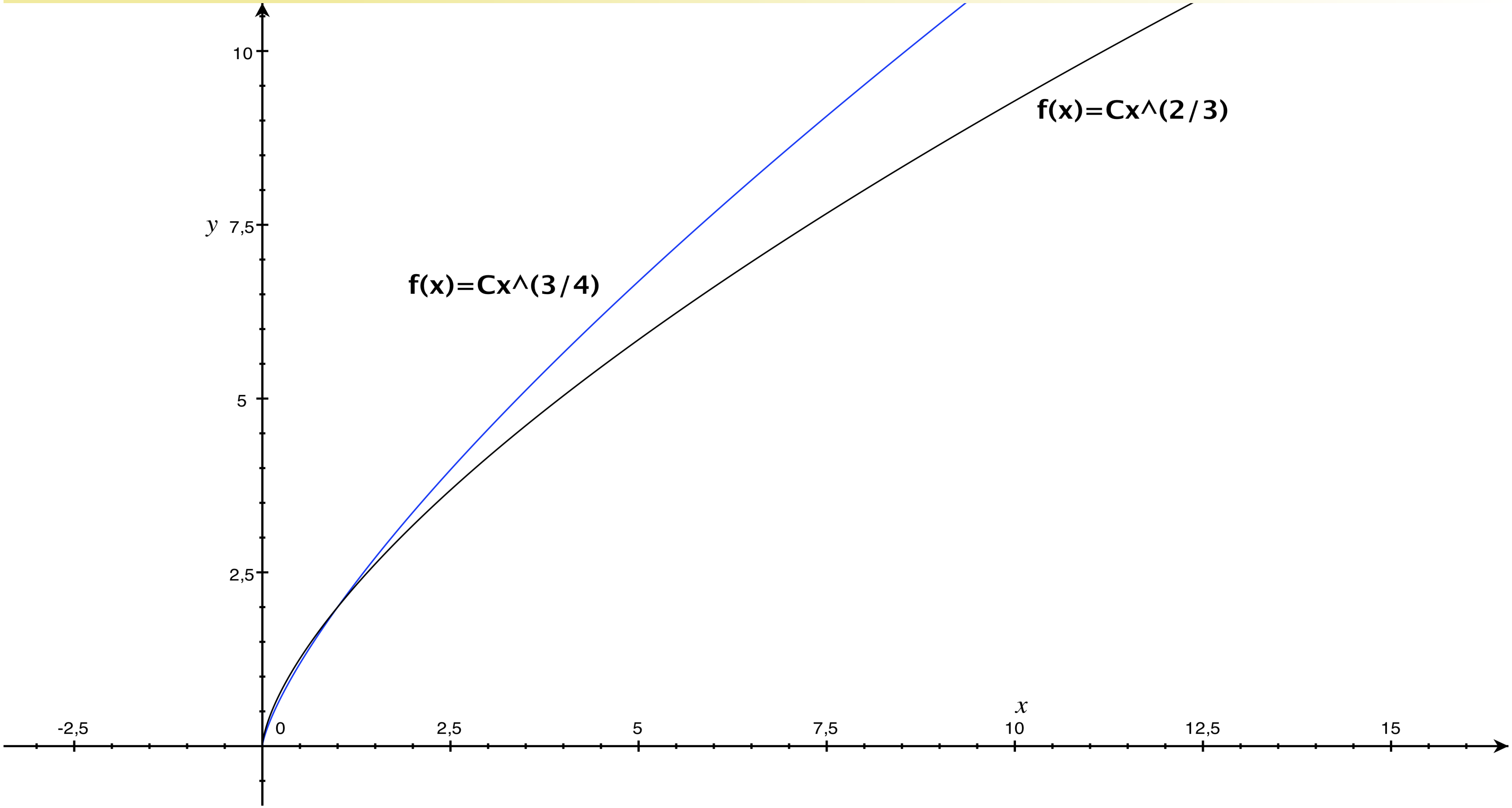
$f(x)=x^{-1} = 1/x$ il dominio è l'insieme degli $x \neq 0$

$f(x)=x^{-1/2} = 1/\sqrt{x}$ il dominio è l'insieme degli $x > 0$

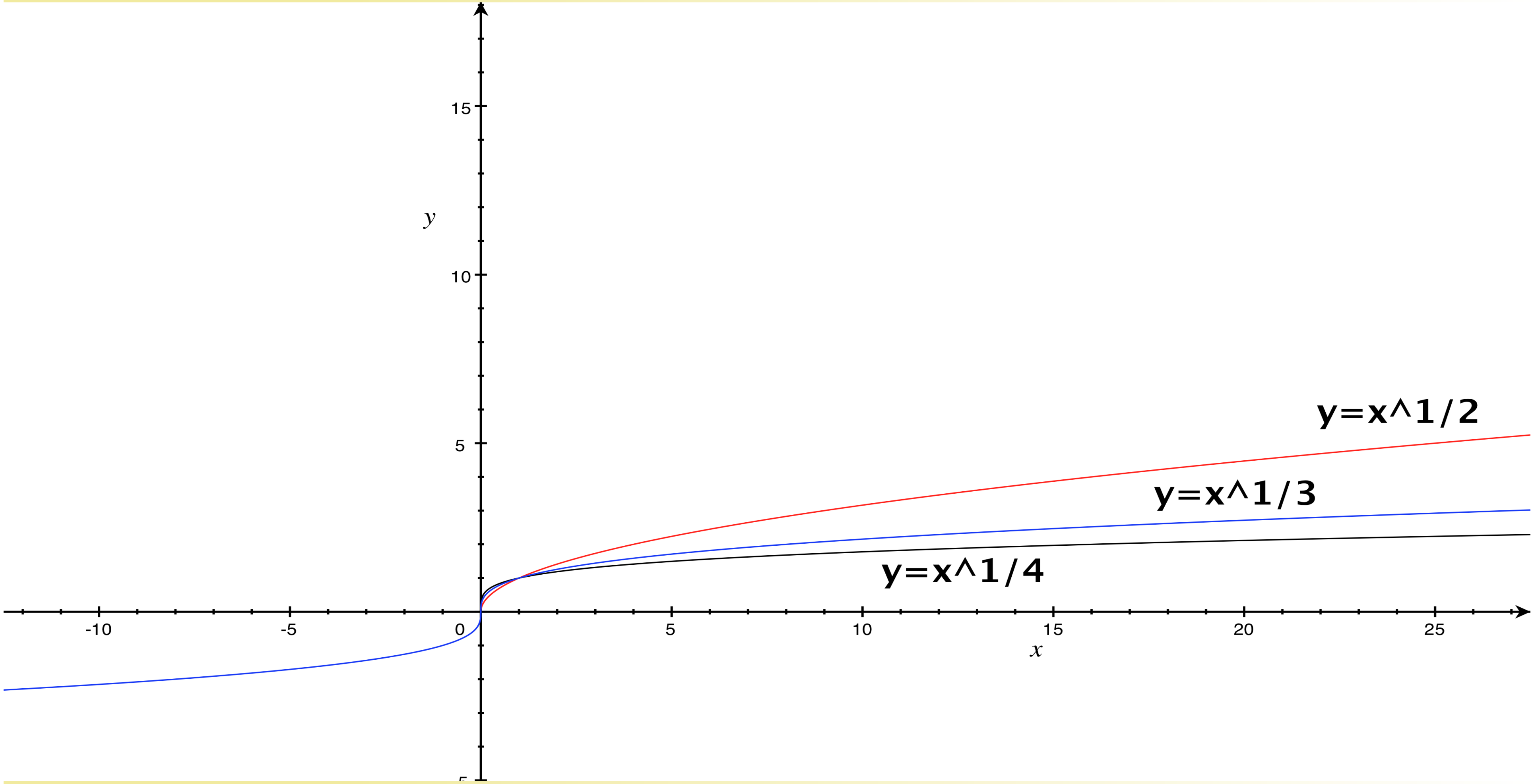
$f(x)=x^{-1/3} = 1/\sqrt[3]{x}$ il dominio è l'insieme degli $x \neq 0$

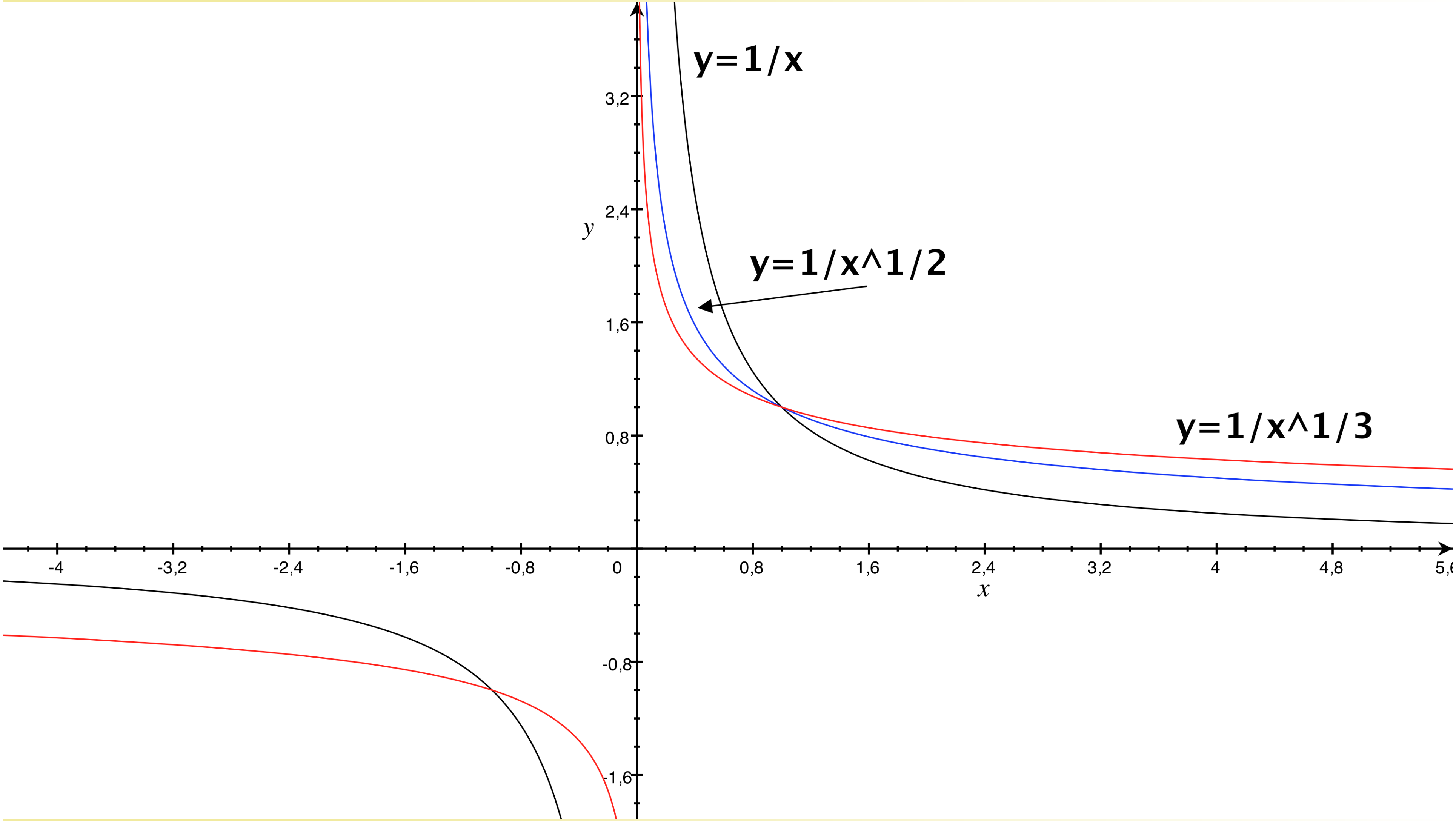
ecc.

ES: LE FUNZIONI $f(x)=ax^{3/4}$ e $f(x)=bx^{2/3}$

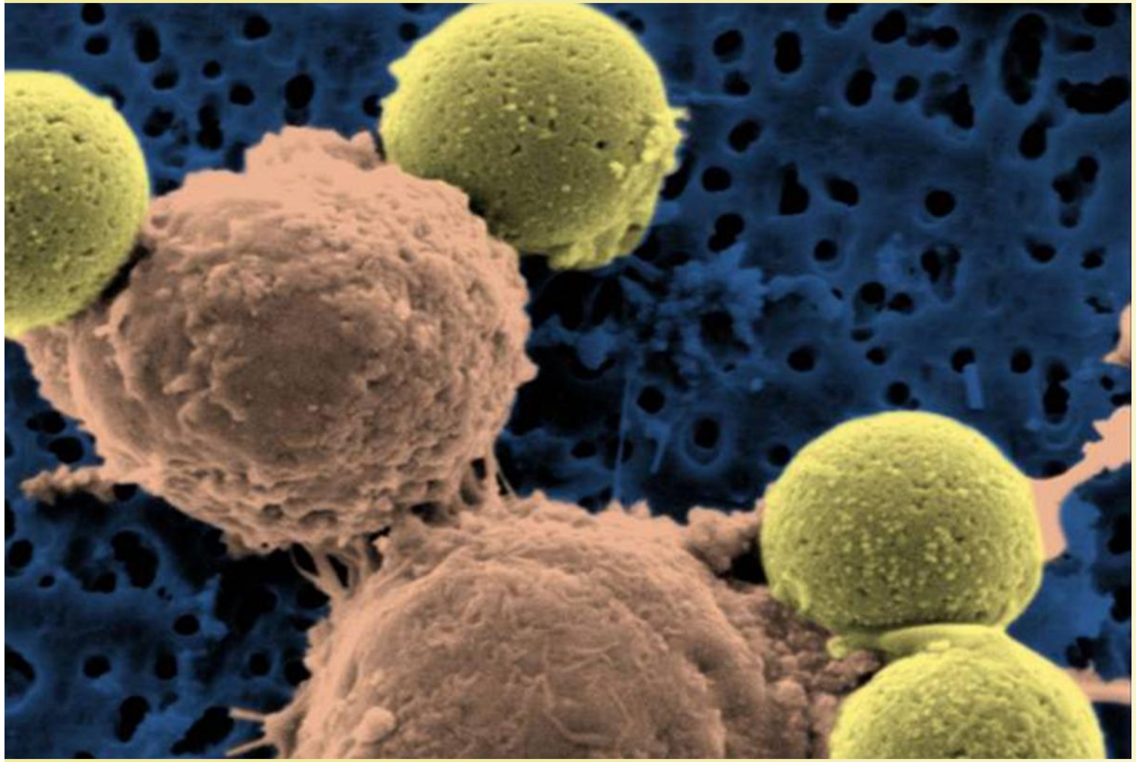


Grafici di funzioni potenza




y=1/x
y=1/x^1/2
y=1/x^1/3
y
x
3,2
2,4
1,6
0,8
-0,8
-1,6
-4
-3,2
-2,4
-1,6
-0,8
0
0,8
1,6
2,4
3,2
4
4,8
5,6

FENOMENI DESCRITTI DA FUNZIONI POTENZA



Cellule sferiche tumorali aggredite da “nanocellule”

Cellule sferiche

Rapporto tra il volume e il raggio della cellula.
Qual è il raggio di una cellula tumorale di volume $V=0.523 micron^3$?

$R \longrightarrow V(R) = 4\pi R^3/3$

$V \longrightarrow R(V)=(3V/4\pi)^{1/3}$: leggi di tipo potenza

Se $V=0.523$ $R(V)=[3(0.523)/4\pi]^{1/3} \approx 0.5$ micron

In una cellula superficie è data da $S(R) = 4\pi R^2$
il volume da $V(R) = 4\pi R^3/3$ quindi il rapporto
superficie/volume é

$S(R)/V(R)=3/R$ qualunque sia il valore di R

Questo vuol dire che se il raggio della cellula cresce ad esempio del 10% ($R'=R+0.1R=1.1R$)
la superficie diventa

$$S(R')=4\pi(1.1R)^2=1.21[4\pi(R)^2]=1.21S(R)=$$
$$=S(R)+0.21S(R)$$ (è aumentata del 21%)

il volume deve aumentare in modo che

$S(R')/V(R')=3/R'$ e quindi

$$V(R')=S(R')R'/3=1.21S(R)1.1R/3\approx 1.33\ S(R)R/3$$

(aumenta del 33%)

Se nel processo di crescita, il raggio di una cellula aumenta del 10%, la superficie NON può aumentare del 50% e il volume NON può aumentare del 40%: i rapporti di proporzionalità tra dimensioni DEVONO essere mantenuti, altrimenti la cellula non riesce a vivere (LEGGE ALLOMETRICA)

INDICE DI MASSA CORPOREA (IMC)

Il rapporto tra peso corporeo di un individuo e la sua altezza è assunto come indicatore della "forma fisica" dell'individuo (indice di massa corporea IMC)

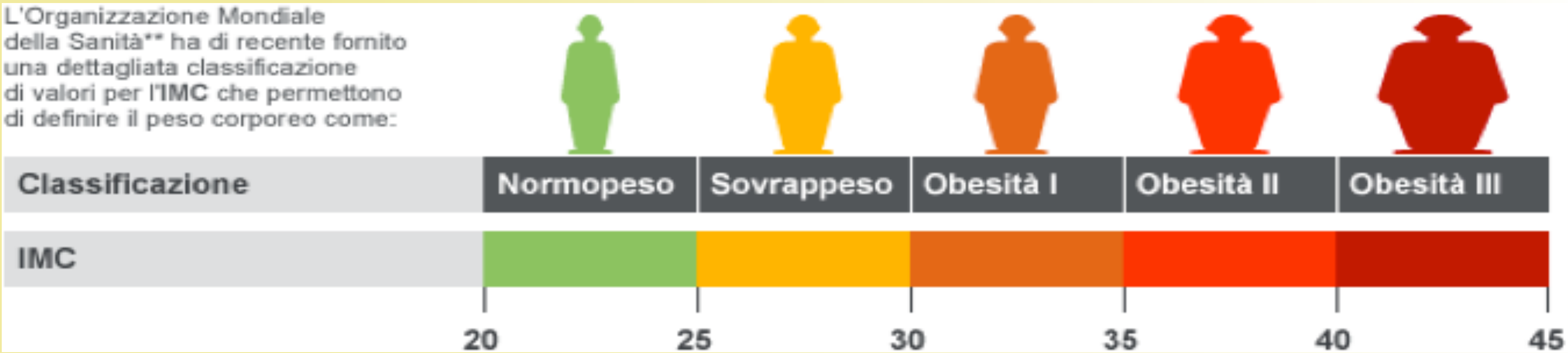
Visto che peso ≈ volume e superficie ≈ h^2

$$IMC = IMC(h) \approx peso/h^2 = peso\ h^{-2}$$

In funzione dell'altezza h, l'IMC è una funzione potenza con esponente negativo

Ad es. se un individuo che pesa 62 chili
è alto 1.7m il suo indice di massa corporea vale

$$IMC \approx 62/(1.7)^2 \approx 21.45$$



L'individuo è di peso normale

LEGGE di KLEIBER

Il metabolismo E degli esseri viventi (cioè la capacità di produrre energia) dipende dalla massa m dell'organismo con una legge del tipo:

$$E=E(m)= k\, m^{3/4}$$

con k costante che dipende dall'organismo considerato.

I dati sperimentali mostrano che questa legge approssima bene le osservazioni

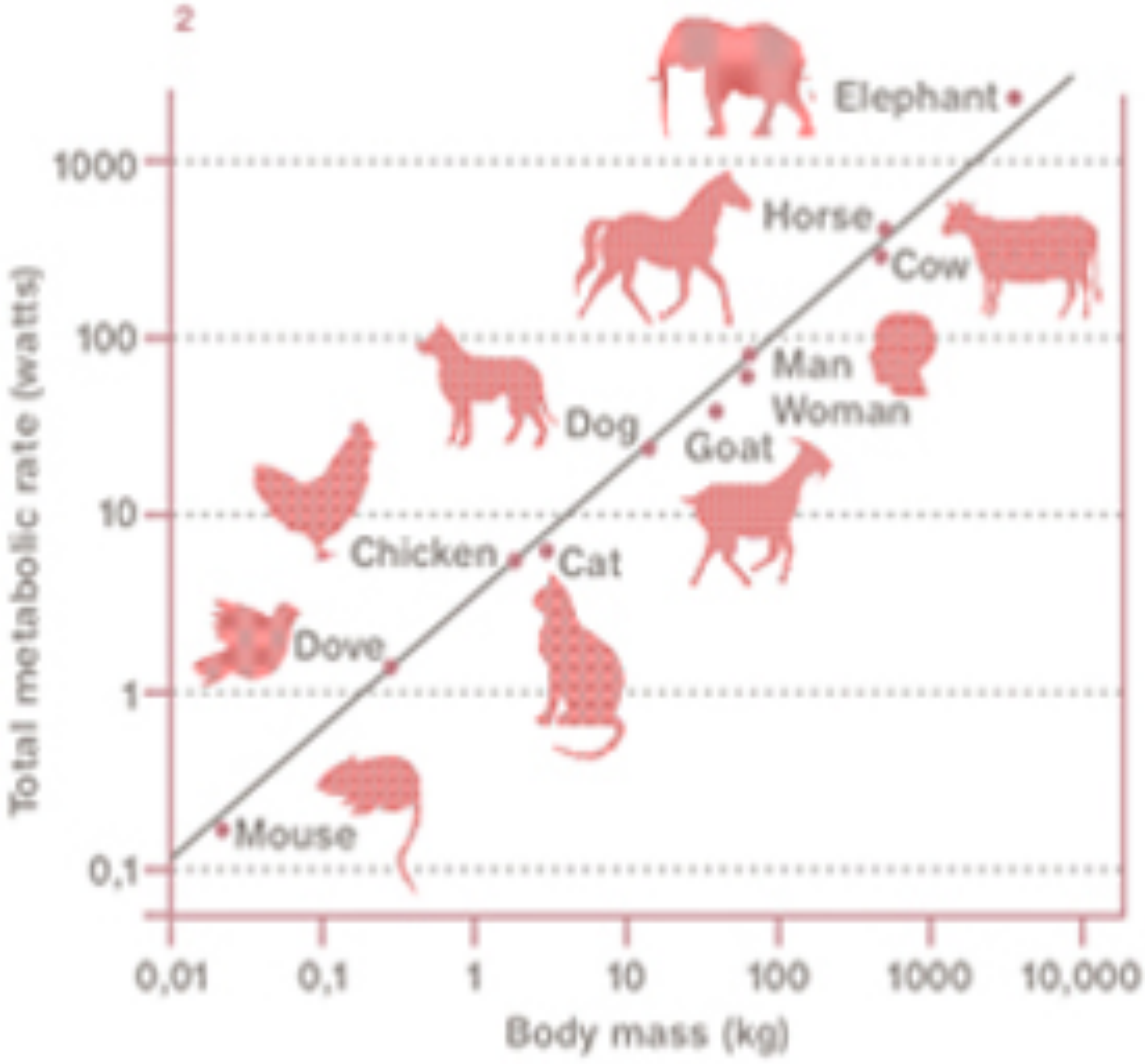


Figura 2. Legge di scala tra la velocità di metabolismo (Basal metabolic rate), misurata in Watt, e la massa dell'organismo misurata in kilogrammi. I due assi riportano il valore dei logaritmi delle quantità mostrate e la retta rappresenta la legge $B \propto M^{3/4}$.

Molti studiosi non concordano con questa legge.
Vediamo perché.

La massa m di un organismo è proporzionale al volume che ha dimensioni di lunghezza al cubo

$$V = Cl^3 = Km \quad (\text{cioè } l = [Km/C]^{1/3})$$

Il metabolismo E è proporzionale alla quantità di energia (calore) che un corpo riesce a sviluppare e E è proporzionale alla superficie del corpo

$$S = Al^2 = BE \quad (A, B, C \text{ e } K \text{ costanti})$$

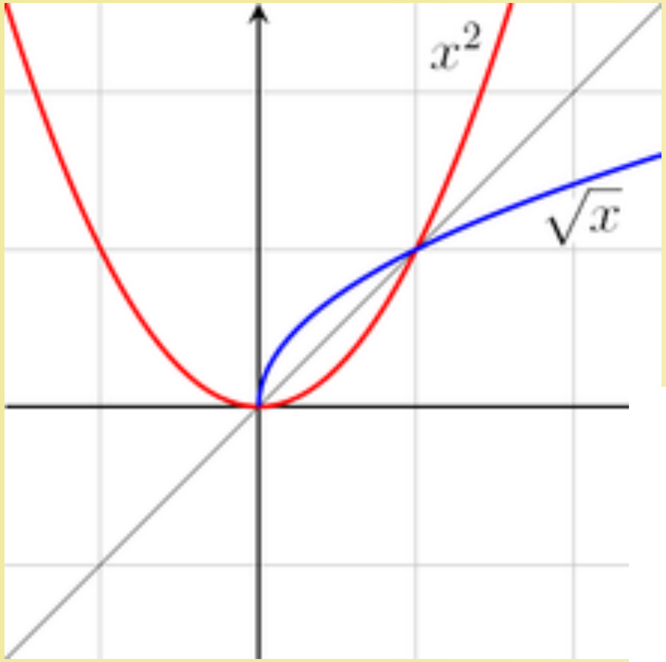
Quindi $E=E(m)=(A/B)[Km/C]^{2/3}$

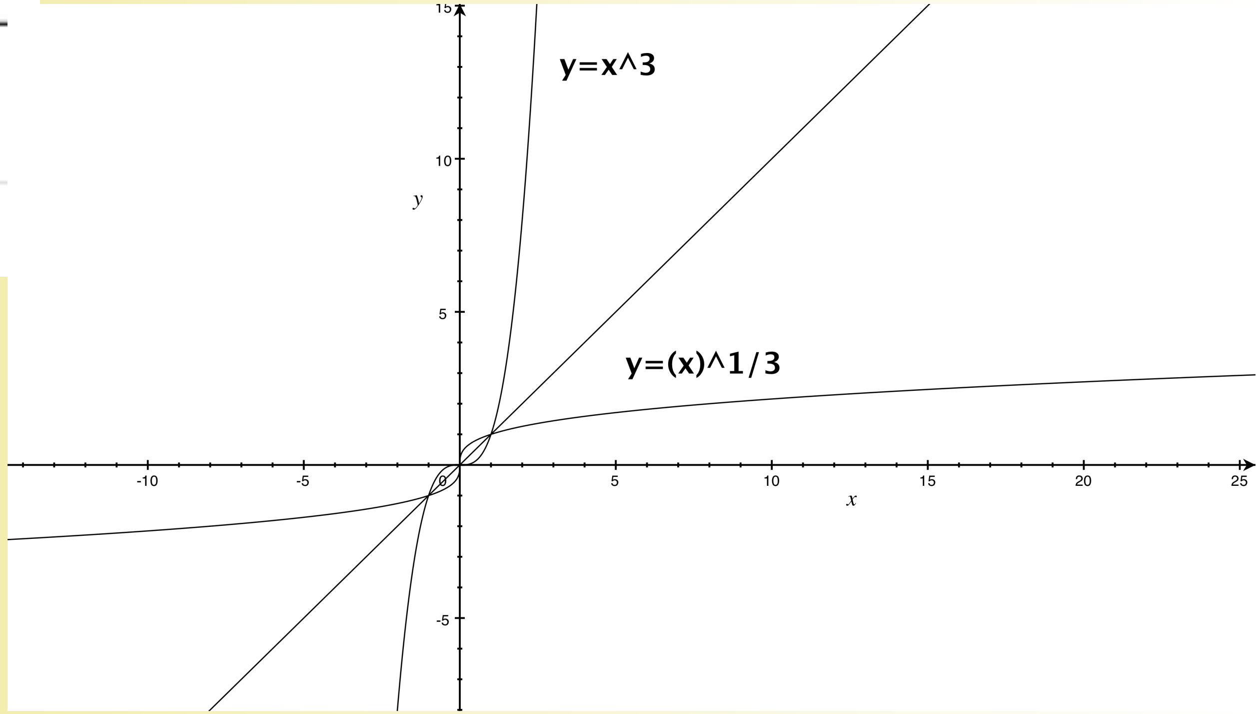
(NON alla potenza $\frac{3}{4}$)

Qualche studioso dice che si deve considerare la superficie e il volume delle strutture interne (i sistemi circolatorio e respiratorio)

MA IL PROBLEMA DI UNA SPIEGAZIONE CONVINCENTE E' APERTO . . .

Simmetria rispetto alla bisettrice: cosa significa?





Funzione di funzione

Se $f: x \longrightarrow f(x)=y$ e se $g: y \longrightarrow g(y)$

$$g(f): \ x \longrightarrow g(f(x))$$

é una funzione di funzione o funzione composta

Es $f: x \longrightarrow f(x)=y=3x+1$

$g: y \longrightarrow g(y)=y^{2/3}$

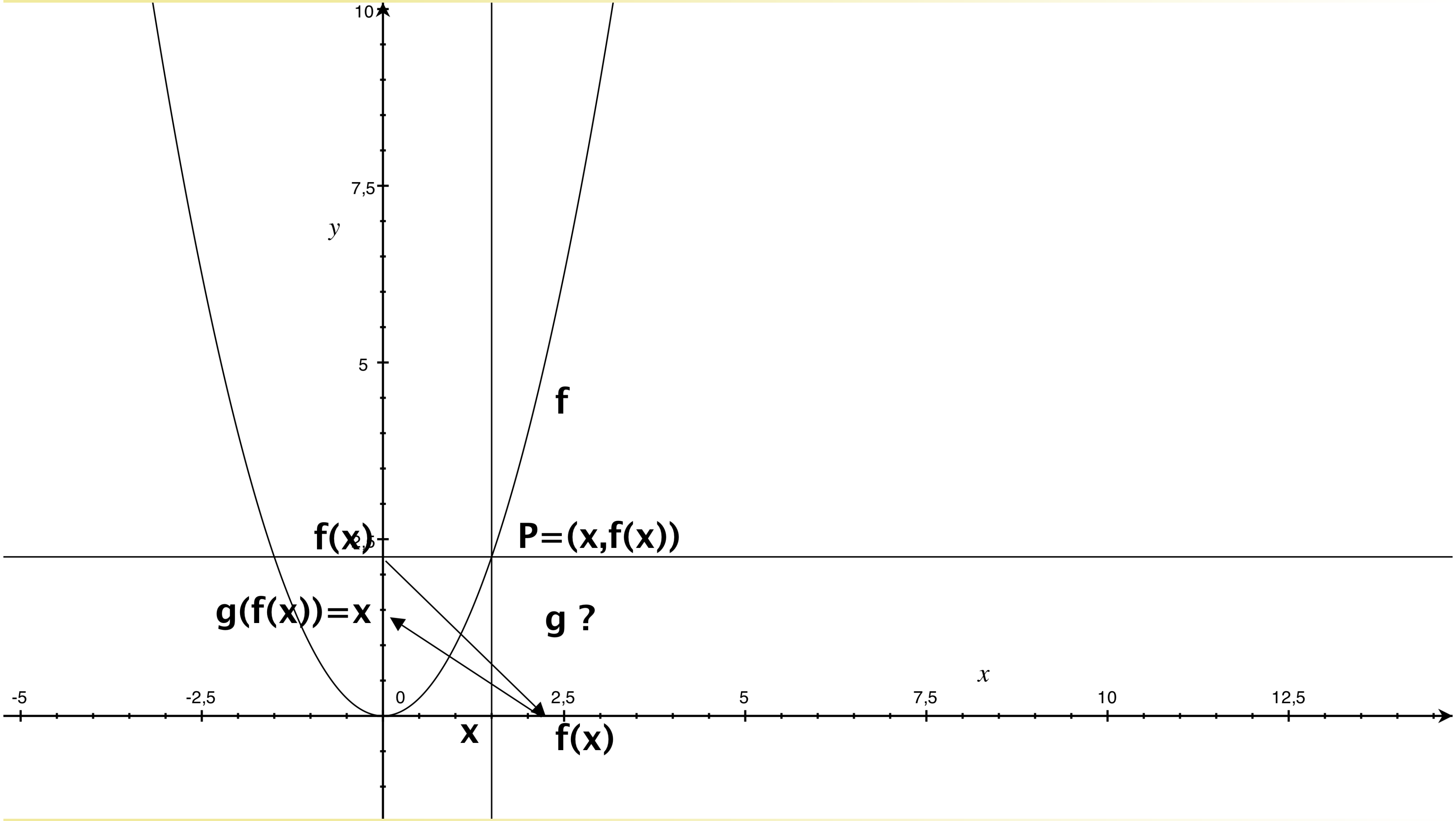
$g(f): \ x \longrightarrow g(f(x))= (3x+1)^{2/3}= \sqrt[3]{(3x+1)^2}$

Pb $f: x \longrightarrow f(x)=y$, esiste g tale che

$$g(f): \ x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))=x \ ?$$

Se la risposta è SI,

la funzione g è l'**inversa** di f



10
7,5
y
5
f
f(x)
2,5
P=(x,f(x))
g(f(x))=x
g ?
x
-5
-2,5
0
2,5
5
7,5
10
12,5
x
f(x)

Es $f: x \longrightarrow f(x)=2x+1=y$

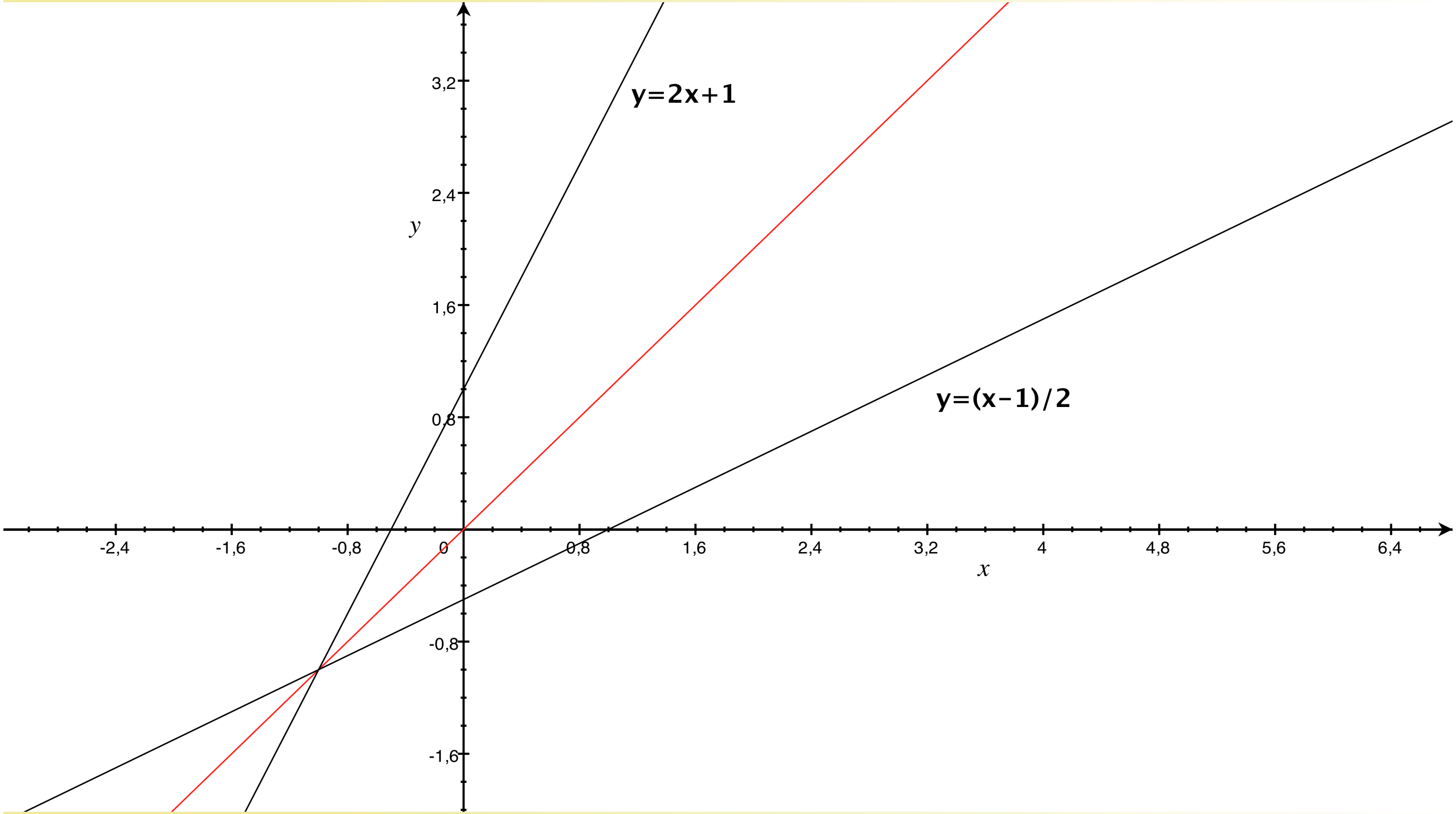
Quale $g : y \longrightarrow g(y) = x$?

Se $y=2x+1 \longrightarrow x$ bisogna

a) $y-1=2x+1-1=2x$ (sottrarre 1)
b) $(y-1)/2 = x$ (dividere per 2)

g opera nel modo seguente:
sottrae 1 e divide il risultato per 2

$g: y \longrightarrow g(y)=y/2 -1/2$



La funzione g è l'inversa di f: $f(f^{-1}(x))=x$

Es. Qual è l'inversa di $f(x)= (x+1)/3$?

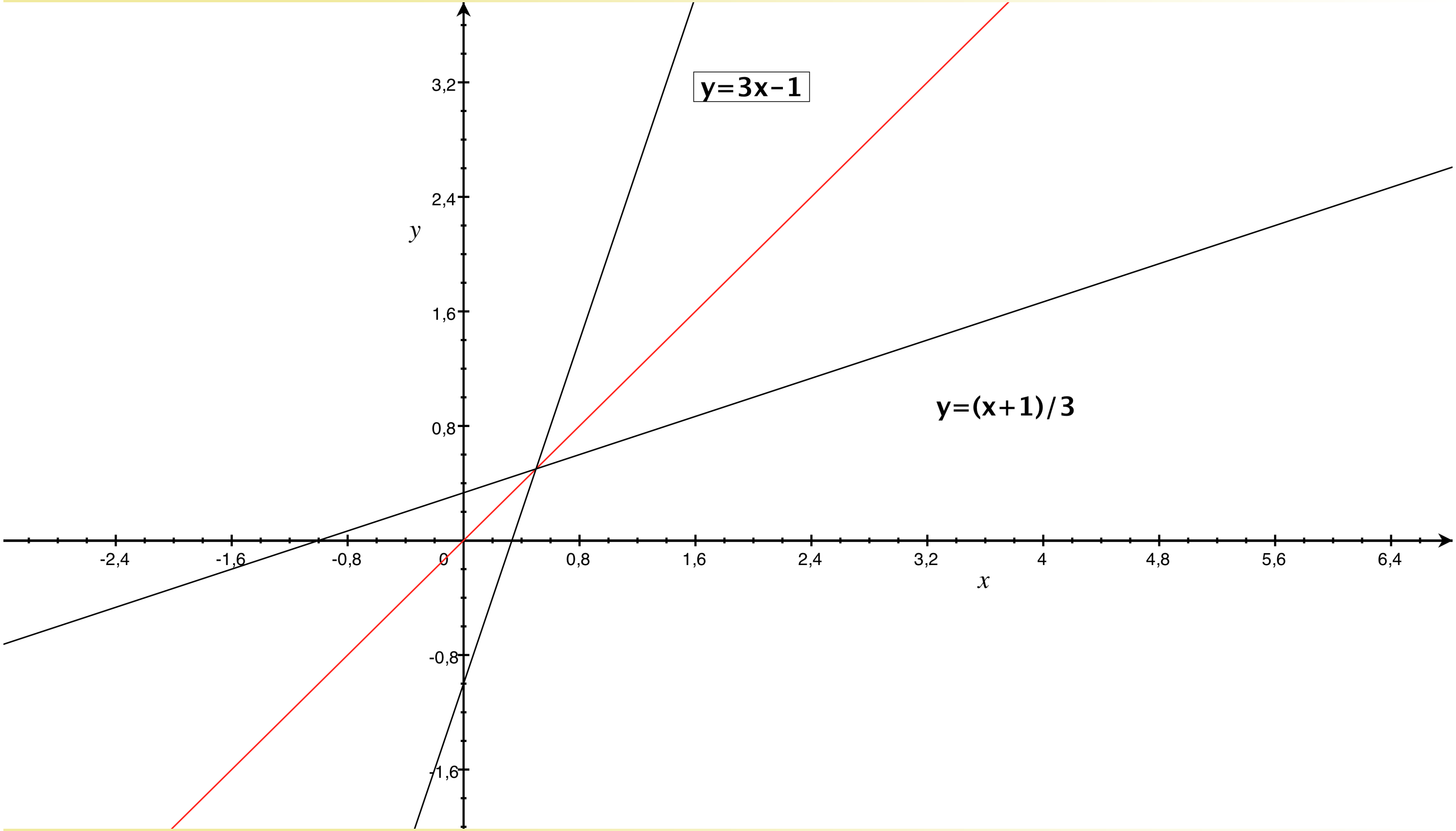
$f^{-1}: \; y \longrightarrow f^{-1}(y)= x$

$(x+1)/3$ si trasforma in x se

a) moltiplichiamo per 3
b) sottraiamo 1

$f^{-1}: \; y \longrightarrow f^{-1}(y)= 3y-1$

(infatti $3[(x+1)/3]-1=x$)



y=3x-1
y=(x+1)/3
y
x
3,2
2,4
1,6
0,8
0
-0,8
-1,6
-2,4
-1,6
-0,8
0,8
1,6
2,4
3,2
4
4,8
5,6
6,4

Le funzioni

$y=x^2$ e $y=\sqrt{x}$; $y=x^3$ e $y=\sqrt[3]{x}$

$y=x^4$ e $y=(x)^{1/4}=\sqrt[4]{x}$ . . .

sono una l'inversa dell'altra. Infatti

$f: x \longrightarrow x^2=f(x)=y$ e $g: y=f(x) \longrightarrow x$

se $g(y)=\sqrt{y}$

quindi i grafici di f e g sono simmetrici rispetto alla retta $y=x$

A che serve conoscere la funzione inversa di f?

Serve a risolvere equazioni

Ad es. $f: x \longrightarrow f(x)=3x+2=y$

Se si vogliamo trovare x per ogni valore di y dobbiamo

a) sottrarre 2 da ambo i membri $(3x=y-2)$

b) dividere per 3 $(x=[y-2]/3)$

La funzione inversa e' proprio

$f^{-1} : y \longrightarrow f^{-1}(y)=(y-2)/3=[(3x+2)-2]/3=x$