

Esercizio di Calcolo e Biostatistica

Questo compito permette di allenarsi per la prova di esonero.

Per capire a che punto si è con la preparazione è indispensabile:

- (a) svolgere l'esercizio **in una sola volta**
- (b) cercare di **non consultare** libri o quaderni di esercizi
- (c) impiegare **al massimo** due ore per lo svolgimento
- (d) nel caso non si riuscisse a completare lo svolgimento in due ore, si suggerisce di prendere nota di quello che si è fatto in due ore e di proseguire nello svolgimento fino alla fine, prendendo nota del tempo impiegato.

Se l'intero svolgimento richiede tra due ore e due ore e mezza, con un po' di allenamento si può ottenere di completare un compito nel tempo previsto. Se invece il tempo impiegato supera le due ore e mezza bisogna capire quali sono gli argomenti che bisogna studiare meglio.

1) Rispondere alle seguenti domande

(a) La funzione $y = f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ è definita nel seguente dominio

- | | | |
|--|---|--------------------------------|
| (A) $D = \{x \in \mathbf{R}, x \neq 2\}$ | (C) $D = \{x \in \mathbf{R}, x > -1\}$ | (E) $D = \{x \in \mathbf{R}\}$ |
| (B) $D = \{x \in \mathbf{R}, x > 2\}$ | (D) $D = \{x \in \mathbf{R}, x \geq -1, x \neq 2\}$ | |

(b) Data la funzione del precedente punto (a), quali delle seguenti affermazioni sono corrette?

- | | | |
|---|--|---|
| (A) Il tasso di variazione nell'intervallo $[0,1]$ è positivo | (1/2 - $\sqrt{2}$) $x - 1/2$ è quella che passa per i punti del grafico $A = (0, f(0))$ e $B = (1, f(1))$ | sa per i punti del grafico $A = (0, f(0))$ e $B = (1, f(1))$ |
| (B) Il tasso di variazione nell'intervallo $[0,1]$ è negativo | (D) La retta di equazione $y = (-\sqrt{2})x - 1/2$ è quella che passa | (E) La variazione della funzione nell'intervallo $[0,1]$ è negativa |

(c) Sempre a proposito della funzione del precedente punto (a), quali affermazioni sono corrette?

- | | | |
|--|--|---|
| (A) Il punto $P = (3,1)$ appartiene al grafico mentre il punto $Q = (3,2)$ non è un punto sul grafico della funzione | (C) Il punto $P = (3,2)$ appartiene al grafico mentre il punto $Q = (3,1)$ non è un punto sul grafico della funzione | della funzione
(E) Il punto $P = (8, 1/2)$ e $Q = (-3/4, -2/11)$ appartengono entrambi al grafico della funzione |
| (B) Il punto $P = (1, \sqrt{2})$ appartiene al grafico mentre il punto $Q = (1, \sqrt{2})$ non è un punto sul grafico della funzione | (D) Il punto $P = (-1, f(-1))$ non può appartenere al grafico | |

(d) Le matrici $A = \begin{pmatrix} k & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} a & -2 \\ a-1 & 1 \end{pmatrix}$

- | | | |
|---|---|---|
| (A) hanno determinante uguale a zero se $k = 1$ e $a = 2$ | (C) non hanno mai determinante nullo | (E) hanno determinanti diversi da zero se $k > 1$ e $a < 2$ |
| (B) hanno determinante uguale a zero se $k = 1/2$ e $a = 2$ | (D) hanno determinante positivo per $k < 1/2$ e $a < 2$ | |

(e) Se $\mathbf{u} = (3,4)$, $\mathbf{v} = (1,a)$, $\mathbf{w} = (b,2b)$ (a, b parametri reali), sono vettori del piano, allora si ha $\mathbf{w} + 3\mathbf{v} = a\mathbf{u}$

- | | | |
|-----------------------------------|--|---|
| (A) solo se $a = 1$ e $b = 1/3$ | (C) per ogni valore di a e b reale | (E) solo se a e b sono diversi tra loro |
| (B) solo se $a = 6/5$ e $b = 3/5$ | (D) per nessun valore di a e b | |

(f) Se $f(x) = (3x)^{2/3}$ e $g(x) = 2x + 1$, allora

$$\begin{array}{lll} \text{(A)} & g(f(x)) = x^{1/3} + 1 & \text{e} & \text{(C)} & f(g(x)) = 6 + x^{1/3} & \text{e} & \text{(E)} & f(g(x)) = 3 + 2x^{2/3} & \text{e} \\ & g(f(x)) = x^{2/3} + 1 & & & g(f(x)) = \sqrt{2}x^{2/3} + 1 & & & g(f(x)) = 2x^{2/3} + 2 \\ \text{(B)} & f(g(x)) = (6x + 3)^{2/3} & \text{e} & \text{(D)} & f(g(x)) = 6x + x^{1/3} + 3 & \text{e} & & & \\ & g(f(x)) = 6\sqrt{2}x^{2/3} + 1 & & & g(f(x)) = x^{1/3} + 3 & & & & \end{array}$$

2) Il raggio R di una cellula sferica, misurato in μm , varia nel tempo, misurato in ore, con legge $R(t) = (1-t)^{2/3}$. Calcolare il tasso di variazione del volume $V(t)$ della sfera per $t \in [0, 1]$ e interpretare il risultato. Senza utilizzare le derivate, disegnare il grafico di $V(t)$ per $t \geq 0$. Utilizzando solo considerazioni geometriche, si può dire che esiste un istante t^* in cui il volume della sfera è dimezzato rispetto al valore iniziale? Se la risposta è positiva trovare t^* . Dopo quanto tempo il volume si è ridotto del 30% rispetto al valore iniziale?

3. In un laboratorio si studia la sopravvivenza della *Drosophila* (moscerino della frutta) agli stress ambientali. In seguito allo stress S si osserva che in 50 colture il numero dei sopravvissuti è

n. colture:	15	1	10	20	4
n. sopravvissuti:	3	25	8	5	15

(a) Riscrivere la precedente tabella sostituendo alla prima riga le frequenze relative di sopravvivenza di ciascun dato. Qual'è la mediana dei sopravvissuti?

(b) Il numero medio di sopravvissuti stima bene la sopravvivenza allo stress S? (Motivare la risposta)

(c) Se si osservasse un aumento del 10% nel dato di sopravvivenza in ciascuna coltura, la varianza come cambierebbe? (Motivare la risposta)

4. Scrivere nella forma $A \cdot v = w$ il sistema

$$\begin{cases} kx/2 - y = 1 \\ -x + 2ky = 2 \end{cases}$$

Dire, motivando la risposta, se esistono valori di k per i quali il sistema non ha soluzioni.