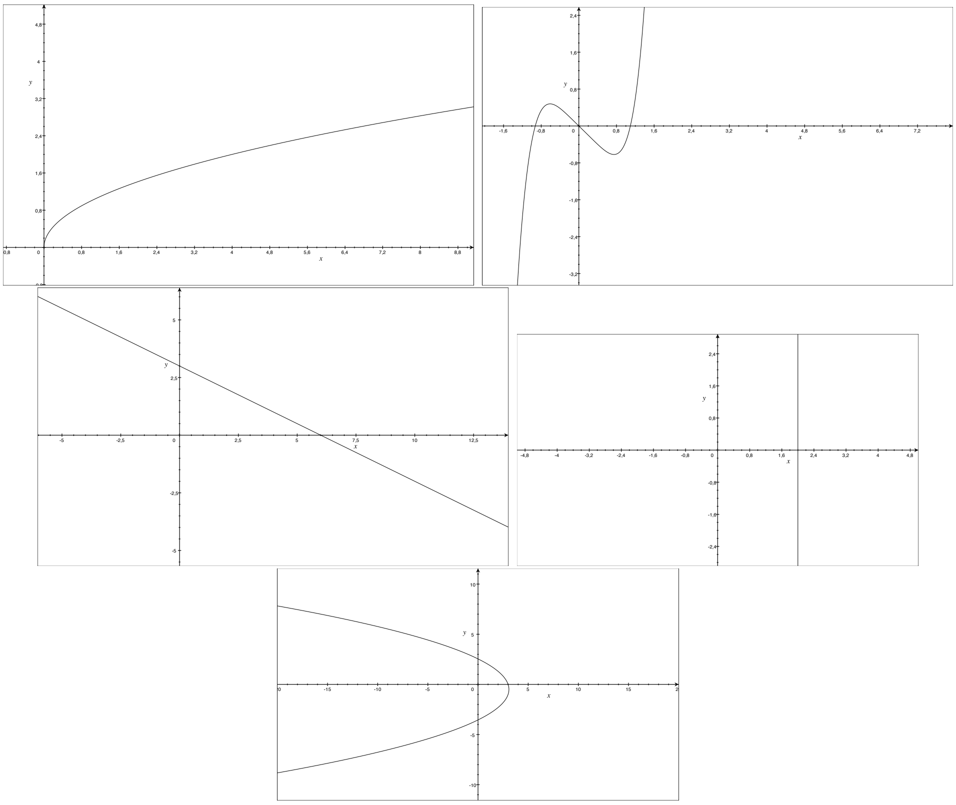
Esercizi 6 di Calcolo e Biostatistica con risposte

1. Tra i grafici seguenti, e considerando le figure da sinistra partendo dall'alto, quali sono grafici di funzioni?



A) tutti

B) solo il secondo

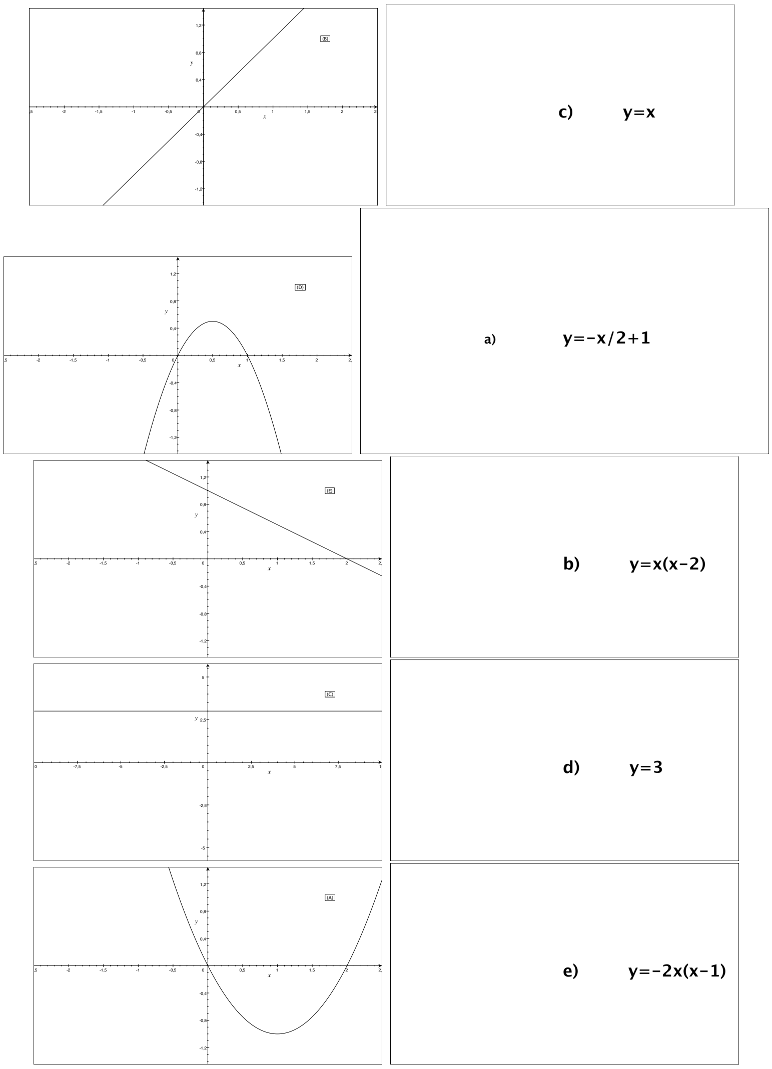
C) il secondo e il terzo

D) tutti tranne il terzo e il quarto

E) tutti tranne il terzo

Soluzione. Un grafico e' quello di una funzione se, considerato un punto sull'asse delle ascisse, a questo corrisponde solo un punto sulla curva.
Esaminando le figure si vede che solo le prime tre soddisfano questa richiesta: il terzo grafico e' quello di una retta verticale di equazione $x = k$ e infiniti punti sulla retta hanno coordinate (k, y^*). Il quarto grafico non e' quello di una funzione perche' scelto un valore di x diverso da quello delle coordinate dell'intersezione del grafico con l'asse x, ad esso corrispondono sempre due punti. La risposta giusta e' quindi la D).

2. Tracciando una freccia, associare a ogni grafico la legge che lo definisce



A) Fig1→c), Fig2→a), Fig3→b), Fig4→e), Fig5→d)
B) Fig1→a), Fig2→b), Fig3→c), Fig4→d), Fig5→e)
C) Fig1→b), Fig2→c), Fig3→a), Fig4→d), Fig5→e)
D) Fig1→c), Fig2→e), Fig3→a), Fig4→d), Fig5→b)
E) Fig1→e), Fig2→c), Fig3→d), Fig4→a), Fig5→b)

Soluzione. Alla prima figura si associa la funzione c), infatti il grafico e' quello della bisettrice del primo e terzo quadrante che ha equazione $y = x$.

Il secondo grafico e' quello di una parabola con la concavita' verso il basso e intersezione con l'asse orizzontale nei punti di ascissa $x = 0$ e $x = 1$. La funzione e) $y = -2x(x-1)$ ha $y = 0$ se $x = 0$ oppure $x = 1$, ha il coefficiente del termine di grado 2 negativo e uguale a -2, quindi la figura 2 si associa alla funzione e).

Il terzo grafico e' quello di una retta con inclinazione maggiore di 90^o, quindi deve essere associato ad una funzione di primo grado con coefficiente del termine x negativo. Inoltre l'intersezione con l'asse verticale e' in un punto con ordinata positiva: l'unica funzione che ha queste caratteristiche e' la a).

Il grafico successivo e' quello di una retta orizzontale che deve avere equazione $y = c$, con $c > 0$; la funzione e' quindi la d).

Infine l'ultimo grafico e' quello di una parabola con la concavita' verso l'alto e intersezione con l'asse orizzontale nei punti di ascissa $x = 0$ e $x = 1$. La funzione e' quindi la b).

La risposta giusta e' la D).

3. Dati i punti del piano $A = (0, c)$, $B = (1, k)$ e $C = (2, m)$ e date le funzioni $y = f(x) = 2x + 1$, $y = g(x) = -x^2 + 3x$ e $y = h(x) = -4$, per quali valori di c, k e m A appartiene al grafico di $g(x)$, B appartiene al grafico di $f(x)$ e C appartiene al grafico di $h(x)$?

A) $c = 0$, $k = 2$, $m = 2$
B) $c = 0$, $k = 2$, $m = 3$
C) $c = 0$, $k = 3$, $m = -4$
D) $c = 1$, $k = -4$, $m = 2$
E) $c = 2$, $k = 2$, $m = 2$

Soluzione. Un punto $P = (x, y)$ appartiene al grafico della funzione $F(x)$ se le coordinate di P soddisfano la richiesta $P = (x, F(x))$ per ogni x nel dominio della funzione.
Se $A = (0, c)$ deve appartenere al grafico di $g(x) = -x^2 + 3x$, si deve avere che $A = (0, g(0))$; visto che $g(0) = 0$, deve essere $c = 0$.
Il punto $B = (1, k)$ appartiene al grafico di $f(x) = 2x + 1$ se $k = f(1) = 3$, quindi deve essere $k = 3$.
Infine $C = (2, m)$ appartiene al grafico di $h(x) = -4$ se $m = h(2) = -4$, quindi deve essere $m = -4$.
La risposta giusta e' la C).

4. Se una funzione è individuata dalla legge $f \; : \; x \; \rightarrow \; y = f(x) = ax + b$, sapendo che:

i) presi due punti qualunque $A = (x_1, f(x_1))$ e $B = (x_2, f(x_2))$ appartenenti al grafico della funzione, si ha che $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 2$
ii) il grafico della funzione deve intersecare l'asse y nel punto $P = (0, -1)$,

si può concludere che deve essere

A) $a = 1/2$ e $b = -1$
B) $a = 2$ e $b = -1$
C) $a = 1$ e $b = 2$
D) $a = 1/2$ e $b = 1$
E) $a = -1$ e $b = 1$

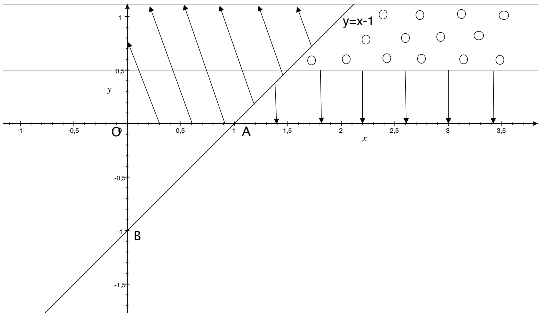
Soluzione. La funzione e' lineare quindi il rapporto $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ e' il corfficiente d'inclinazione della retta. Quindi si ha $a = -2$.
La funzione $y = -2x + b$ passa per il punto $P = (0, -1)$ se vale l'uguaglianza $-1 = (-2)0 + b$ cioe' se $b = -1$ (il termine noto nell'equazione di una retta e' sempre la coordinata y del punto di intersezione con l'asse verticale). La risposta giusta e' la B).

5. Per risolvere il problema di geometria analitica: *trovare le coordinate del punto di intersezione tra il grafico della funzione* $y = f(x) = 2x + 1$ *e quello della funzione* $y = f(x) = 3$ bisogna

A) imporre che sia $x = 3$ e, calcolando il valore corrispondente di y, si ottiene che il punto ha coordinate $P = (3, 7)$
B) risolvere l'equazione di primo grado $2x = 2$ nell'incognita x, ottenendo che il punto ha coordinate $P = (1, 3)$
C) risolvere l'equazione di primo grado $y = 2x + 1 = 0$ nell'incognita y, ottenendo che il punto ha coordinate $P = (-1/2, 0)$
D) il punto di intersezione non esiste
E) imporre che sia $x = 0$ e, calcolando il valore corrispondente di y, si ottiene che il punto ha coordinate $P = (0, 1)$

Soluzione. L'intersezione tra i grafici delle funzioni $y = f(x) = 2x+1$ e $f(x) = 3$ si ottiene imponendo che sia $2x + 1 = 3$ cioe' $2x = 2$; questa equazione ha soluzione $x = 1$.
Un punto sul grafico dele due funzioni ha quindi coordinate $(1, 3)$. La risposta giusta e' la B).

6. Riferendosi alla figura seguente

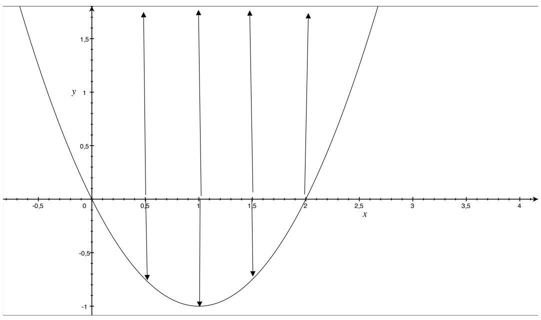


la parte di piano individuata dalle disuguaglianze $x > 3/2$, $1/2 < y < x - 1$ è

A) quella contenuta nel triangolo ABO
B) quella indicata da frecce che puntano verso l'alto
C) quella indicata da frecce che puntano verso il basso
D) quella indicata con cerchietti
E) quella indicata con cerchietti piú quella indicata da frecce che puntano verso il basso

Soluzione. I grafici delle funzioni $y = f(x) = 1/2$ e $y = g(x) = x - 1$ sono quelli delle due rette disegnate nella figura: il primo e' quello della retta orizzontale $y = 1/2$, il secondo quello della retta con inclinazione minore di 90^o, intersezione con l'asse verticale nel punto $P = (0, -1)$.
I punti le cui coordinate verificano la condizione $y > 1/2$ e anche $y < x - 1$ sono quelli compresi nello spicchio indicato con i cerchietti. Il punto di intersezione ha coordinate $1/2 = x - 1$, cioe' $x = 3/2$: in questa regione del piano si ha anche $x > 3/2$, quindi tutte le richieste sono soddisfatte. La risposta giusta e' la D).

7. Riferendosi alla figura seguente



la parte di piano i cui punti hanno coordinate che soddisfano le disuguaglianze

$$0 < x < 2, \qquad x(x-2) < y < 0$$

è

A) quella indicata da frecce che puntano verso l'alto
B) quella indicata da frecce che puntano verso il basso
C) quella indicata con frecce che puntano verso l'alto piú quella indicata da frecce che puntano verso il basso
D) quella esterna alla parte indicata con frecce
E) nessuna di quelle elencate sopra

Soluzione. La funzione $f(x) = x(x - 2)$ ha come grafico una parabola con concavita' rivolta verso l'alto e intersezioni con l'asse orizzontale nei punti $x = 0$ e $x = 2$ (sono le soluzioni dell'equazione $x(x - 2) = 0$). Si ha $y < 0$ e $y > x(x - 2)$ nella parte di piano al di sotto dell'asse x e al di sopra della curva. In questa zona e' anche $0 < x < 2$. La risposta giusta e' quindi la B).

8. Due lunghezze l_1 e l_2 sono in relazione lineare tra loro. Se e' noto che quando $l_1 = 5$ cm. l_2 vale 4 cm e che quando $l_1 = 1$ cm. l_2 vale 2.4 cm, qual'e' la relazione tra le due lunghezze? In questo caso quanto vale l_2 se $l_1 = 15$ cm? La coppia di lunghezze $l_1 = 20$ cm e $l_2 = 11$ cm soddisfa la relazione? Considerando le tre coppie di lunghezze $l_1 = 5$cm., $l_2 = 4$cm, $l_1 = 1$cm. e $l_2 = 2.4$cm, e $l_1 = 15$cm e $l_2 = 8$cm, quanto valgono le medie aritmetiche di l_1 e l_2? Le medie soddisfano la relazione lineare? Se la risposta e' positiva motivarla.

Soluzione. Se le lunghezze sono in relazione lineare tra loro, si deve avere $l_2 = f(l_1) = al_1 + b$ e il grafico di f e' quello di una retta. Per trovare a e b imponiamo che i punti $P = (5, 4)$ e $Q = (1, 2.4)$ appartengano al grafico della retta. Si ha
$5a + b = 4$
$a + b + 2.4$
I valori di a e b sono quindi $a = 0.4$ e $b = 2$ e l'equazione della retta e' $l_2 = 0.4l_1 + 2$. Da questa relazione possiamo prevedere che se $l_1 = 15$cm, allora l_2 =8cm. Possiamo inoltre dire che la coppia di lunghezze $l_1 = 20$ cm e $l_2 = 11$ cm non soddisfa la relazione lineare perche' se $l_1 = 20$ risulta $l_2 = 10$ e non 11.
La media delle lunghezze l_1 vale

$$L_{1M} = \frac{5 + 1 + 15}{3} = 7$$

La media delle lunghezze l_2 vale invece

$$L_{2M} = \frac{4 + 2.4 + 8}{3} = 4.8.$$

Le medie soddisfano la relazione lineare che abbiamo trovato visto che se $L_{1M} = 7$ si ha $L_{2M} = 0.4(7) + 2 = 4.8$. Questo dipende dal fatto che ogni valore di l_2 si scrive come $l_2 = 0.4l_1 + 2$ e, nella media si ha

$$L_{2M} = \frac{[0.4(5) + 2] + [0.4(1) + 2] + [0.4(15) + 2]}{3} =$$

$$= \frac{0.4(5 + 1 + 15) + 2(3)}{3} = \frac{0.4(3L_{1M}) + 2(3)}{3} = 0.4L_{1M} + 2.$$

9. La lunghezza $l(t)$ di un organismo che ha una forma cilindrica viene misurata ogni 2 giorni. Quando si iniziano le misure la lunghezza vale $l(0) = l_0$ in mm. Dopo 2 giorni si osserva che la lunghezza è aumentata del 12%. Supponendo che nei primi 4 giorni la crescita sia lineare ($l(t) = at + c$), come si scrivono a e c in funzione di l_0? Di quanto è aumentata la lunghezza nei primi 4 giorni?
Se il raggio $r(t)$ cresce con la stessa legge della lunghezza, di quanto è aumentato il volume nei primi 2 giorni?

Soluzione. Se la legge e' lineare ed e' scritta nella forma $l(t) = at + c$, si ha che per $t = 0$ deve essere $l(0) = c = l_0$. Dopo 2 giorni risulta $l(2) = 2a + l_0 = l_0 + 0.12l_0$, quindi $a = 0.6l_0$. Per $0 \leq t \leq 4$ la legge di crescita e' quindi $l(t) = (0.6l_0)t + l_0$.
Si ha $l(4) = 4(0.6l_0) + l_0 = (2.4 + 1)l_0 = 3.4l_0$ e, se si scrive $3.4 = 1 + x/100$, otteniamo che $x/100 = 240/100$: la lunghezza e' piu' che raddoppiata.
Se il raggio varia con la legge $r(t) = (0.6r_0)t + r_0$ il volume si scrive $V(t) = (\pi r^2(t))l(t) = (r_0)^3[\pi(0.6t + 1)^2](0.6t + 1) = (r_0)^3\pi(0.6t + 1)^3$, da cui deriva che $V(2) = (r_0)^3\pi(2.2)^3 \approx 10.65(r_0)^3\pi$. Visto che inizialmente si ha $V(0) = (r_0)^3\pi$, possiamo dire che $V(2) = 10.65V(0) = V(0) + (x/100)V(0)$ e quindi $x/100 = 9.65 = 965/100$.