RELAZIONI FUNZIONALI
TRA GRANDEZZE

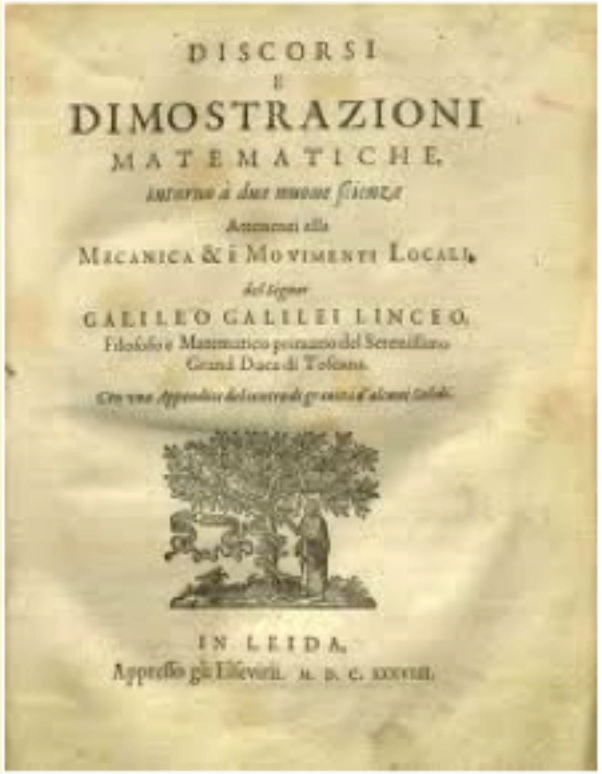
(DIPENDENZA QUADRATICA)

Galileo Galilei utilizza il metodo scientifico nello studio delle modalità di **caduta dei corpi pesanti nel vuoto**.

All'epoca di Galileo i principi scientifici aristotelici prevedevano che i corpi cadessero con una velocità tanto maggiore quanto maggiore era il loro **peso** (e in assenza di resistenze la velocità di caduta sarebbe stata infinita).

Nei
"**Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze**" (1638)

Galileo smentisce questa interpretazione e illustra le sue idee in un dialogo immaginario


DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuove scienze
Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI,
del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.
Con una Appendice del centro di gravità d'alcuni Solidi.

IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

Nel dialogo, utilizzando argomentazioni di tipo deduttivo, Galileo mostra che

- tutti i corpi, indipendentemente dal loro peso, cadono al suolo con la stessa velocità v
- che la velocità v è proporzionale al tempo di caduta $\mathbf{v(t)=gt+v(0)}$ $(g=9.8m/sec^2)$,
- che la relazione tra spazio percorso e tempo impiegato a percorrerlo è quadratica $(\mathbf{s(t)=gt^2/2+v(0)t+s(0)})$

Descrive infine un **esperimento**, più volte eseguito in presenza di alunni e colleghi, che conferma le conclusioni ottenute dagli argomenti teorici

A partire da Galileo le <u>previsioni rigorose</u> sulla caduta dei corpi nel vuoto sono indiscutibili

Ad es. se un corpo è in caduta libera da 3sec. si può prevedere, con la legge di Galileo, che la sua velocità è

$$v(3)=3g\approx 30m/sec,$$

se cade da 5 secondi la sua velocità è invece

$$v(5)\approx 50m/sec \qquad \text{ecc.}$$

Se un corpo cade da una posizione s(0)=0, con velocita' iniziale nulla (v(0)=0) da 3 sec. si può prevedere che ha percorso

$$s(3)=4.9x9=44.1m.$$

se cade da 5 sec. ha percorso

$$s(5)=122.5m \text{ ecc.})$$

FUNZIONI QUADRATICHE

Se per ogni $x \in R$,

$$f: \quad x \longrightarrow f(x)=y=ax^2+bx+c,$$

(a,b,c, numeri reali)

la dipendenza di y da x è di tipo quadratico

Si può notare che $f(x)=ax^2+bx+c$ è la somma della funzione quadratica

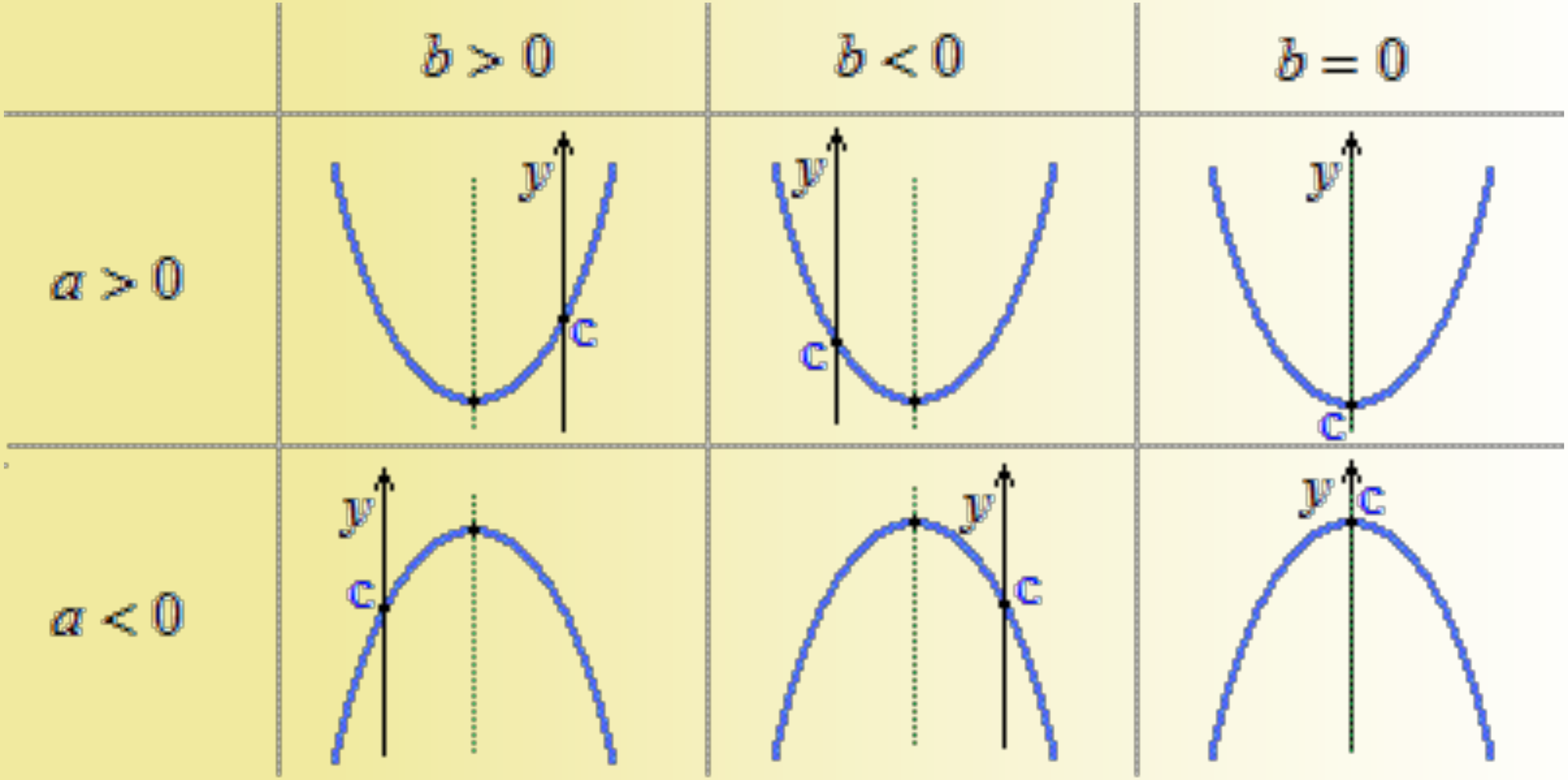
$g(x)=ax^2$ e della funzione lineare $h(x)=bx+c$

$$f(x)=g(x)+h(x)$$

(La somma di due funzioni è una funzione)

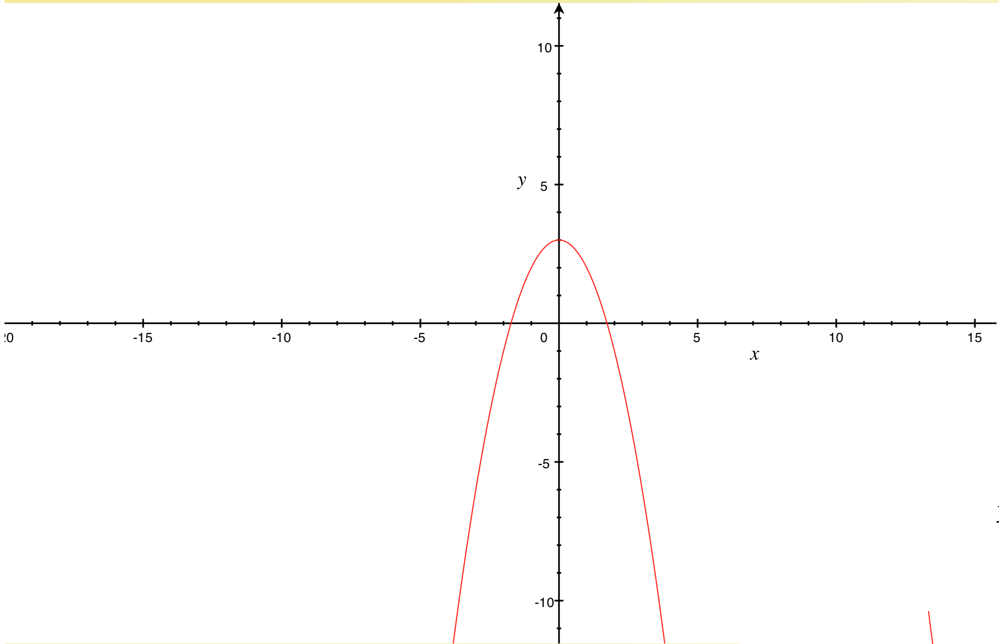
Il dominio di una funzione quadratica e' l'insieme dei numeri reali R

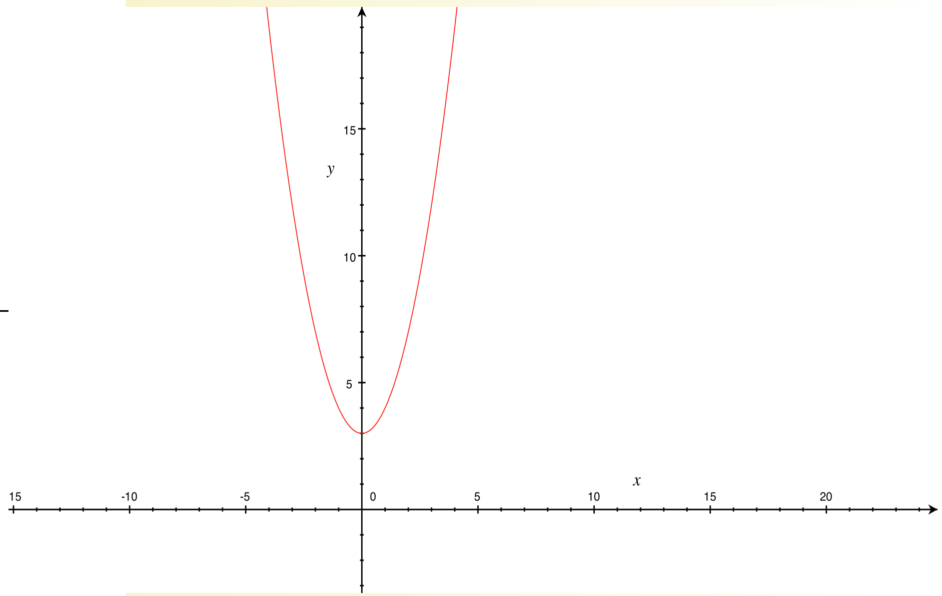
IL GRAFICO DI f E' UNA PARABOLA

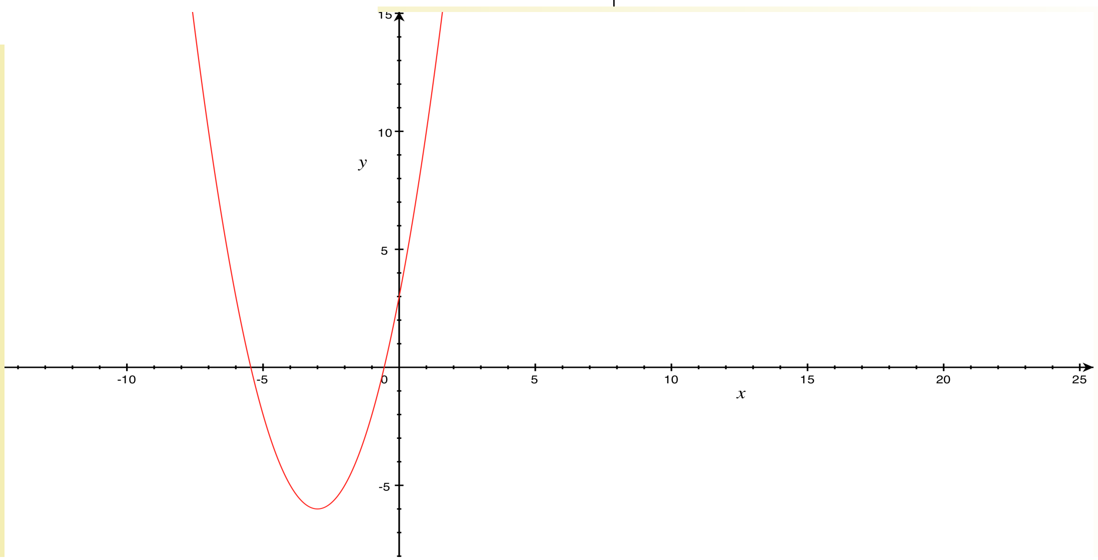


Il punto più in alto (o più in basso) si chiama "vertice della parabola", il vertice si trova sulla retta verticale di equazione x=-b/2a

Quale tra le seguenti parabole ha equazione $y=-x^2+3$?





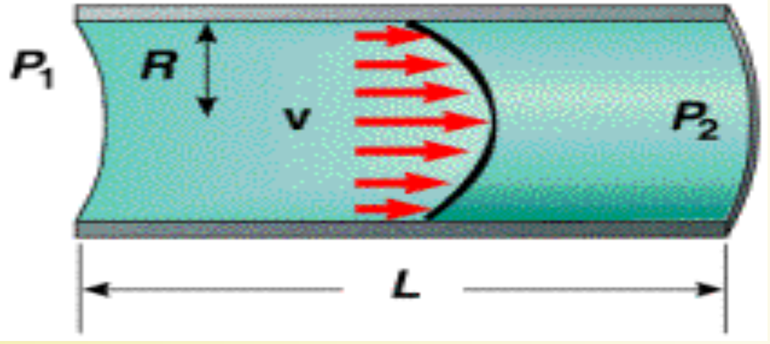


$a=-1<0, \quad b=0, \quad c=3$

FENOMENI NATURALI DESCRITTI DA FUNZIONI QUADRATICHE

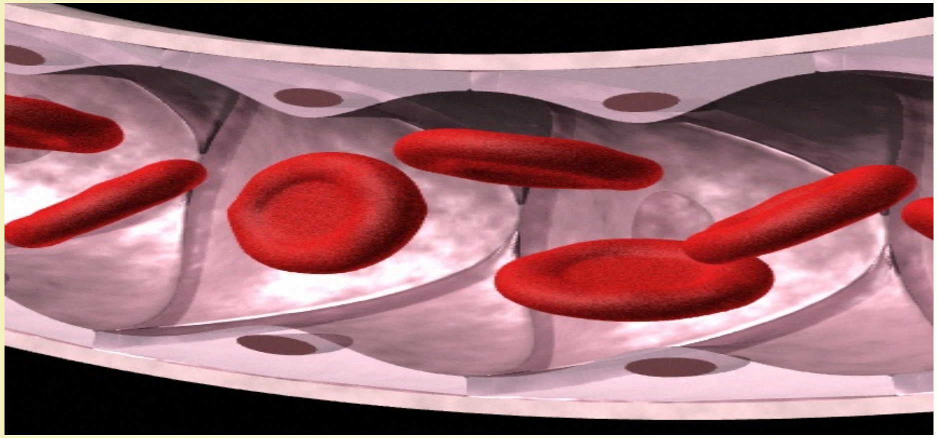
La legge di POISEUILLE

In un tratto di vena in buone condizioni, approssimato con un cilindro, il sangue ha la massima velocita' lungo l'asse del cilindro. La velocita' decresce fino a annullarsi lungo le pareti della vena (a causa dell'attrito)



La legge empirica trovata da Poiseuille che descrive la velocità di scorrimento del sangue e'

$$v(r)=K(R^2 - r^2)$$



dove K=cost dipende dalla differenza di pressione agli estremi del tratto di vena, dalla viscosita' del sangue e dalla lunghezza del tratto.

R e' il raggio della vena

La funzione

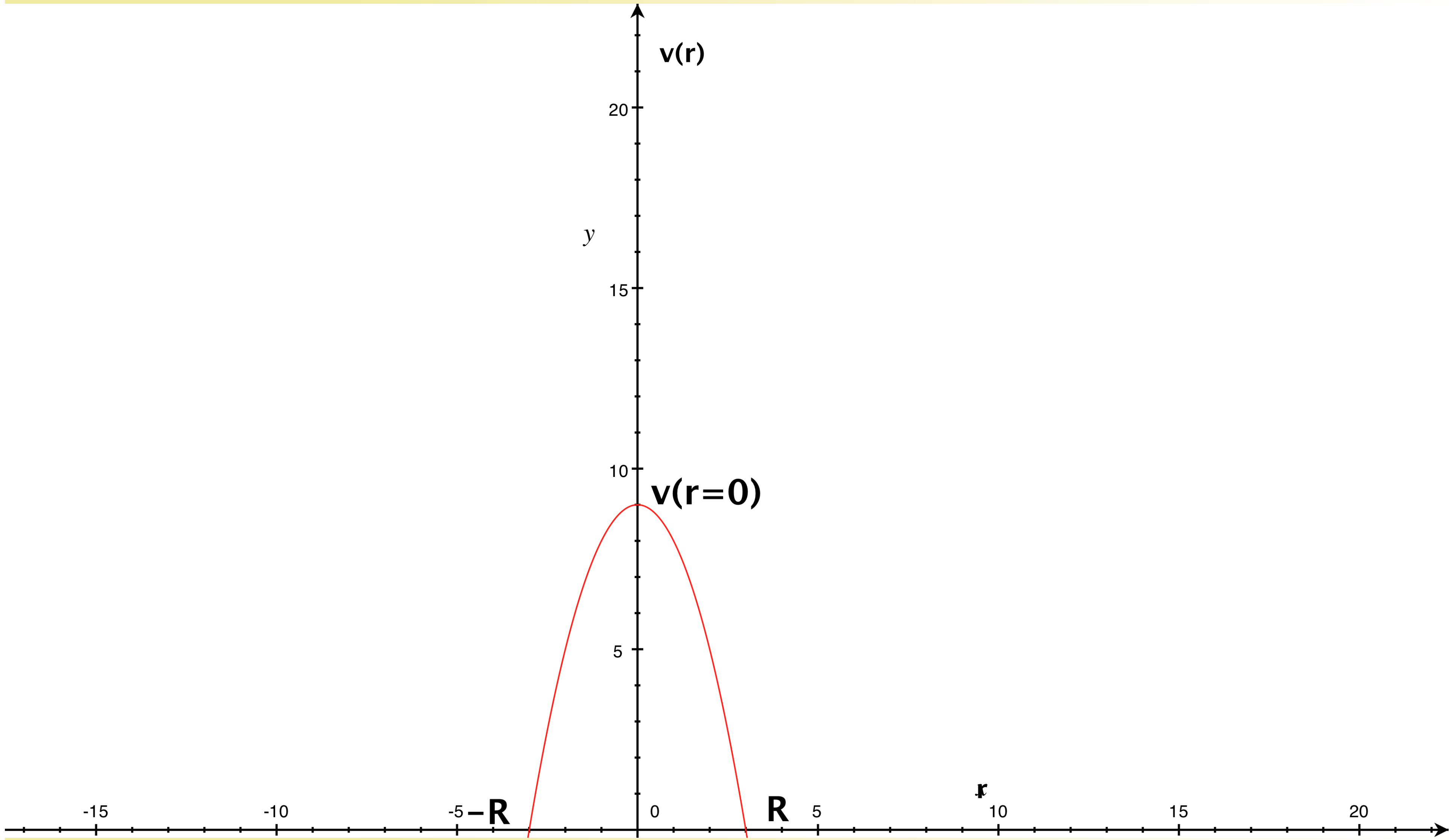
v: r $\longrightarrow$ $v(r)=y=K(R^2-r^2)=-Kr^2+KR^2$

è quadratica in r. Qual è il dominio della funzione? (Come si può scegliere r?)

Visto che deve essere $v \geq 0$, il dominio della funzione e' l'insieme dei valori r per cui si ha $R^2 - r^2 \geq 0$, quindi

$D=\{r: -R \leq r \leq R\}$ (fuori dal vaso sanguigno il fenomeno e' privo di senso)

Qual è il grafico?



v(r)
y
v(r=0)
-R
R
r
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
5
10
15
20

Pb. In quale punto della vena la velocita' del sangue e' pari ad un quarto di quella che si osserva lungo l'asse?

Lungo l'asse della vena si ha $r=0$, quindi $v(0)=KR^2$.

Si ha

$$v(r)=KR^2/4=K(R^2-r^2) \quad \text{se} \quad -Kr^2=KR^2/4-KR^2=-3KR^2/4$$

$$r^2=3R^2/4$$

$$r=[(3)^{1/2}R]/2 \qquad e \qquad r=-[(3)^{1/2}R]/2$$

(simmetricamente rispetto all'asse ci sono 2 punti)

Lo spazio percorso da un corpo pesante che cade nel vuoto varia con legge quadratica nel tempo (Galileo Galilei)

$$s(t)=-gt^2/2+v_0t+s_0$$

S_0=posizione iniziale, v_0=vel. iniziale,

g=cost. di gravita'

Se un corpo cade da fermo da un'altezza di 10 metri, dopo quanto tempo arriva al suolo?

$v_0=0$, $s_0=10$, raggiungere il suolo al tempo t significa che $s(t)=0$. Quindi

$$0=s(t)=-gt^2/2+10, \quad t^2=20/g$$

$$g\approx 10 \quad t^2\approx 2 \quad t\approx 1.41sec$$

TASSO di VARIAZIONE di FUNZIONI QUADRATICHE

Se $f(x)=ax^2+bx+c$, se $x_1<x_2$ e se

$A=(x_1, f(x_1))=(x_1, ax_1{}^2+bx_1+c)$ e

$B=(x_2, f(x_2))=(x_2, ax_2{}^2+bx_2+c)$

allora

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{ax_2{}^2+bx_2+c-(ax_1{}^2+bx_1+c)}{x_2-x_1}$$

$$= \frac{a(x_2{}^2-x_1{}^2)+b(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(x_2-x_1)[a(x_2+x_1)+b]}{x_2-x_1}$$

In definitiva

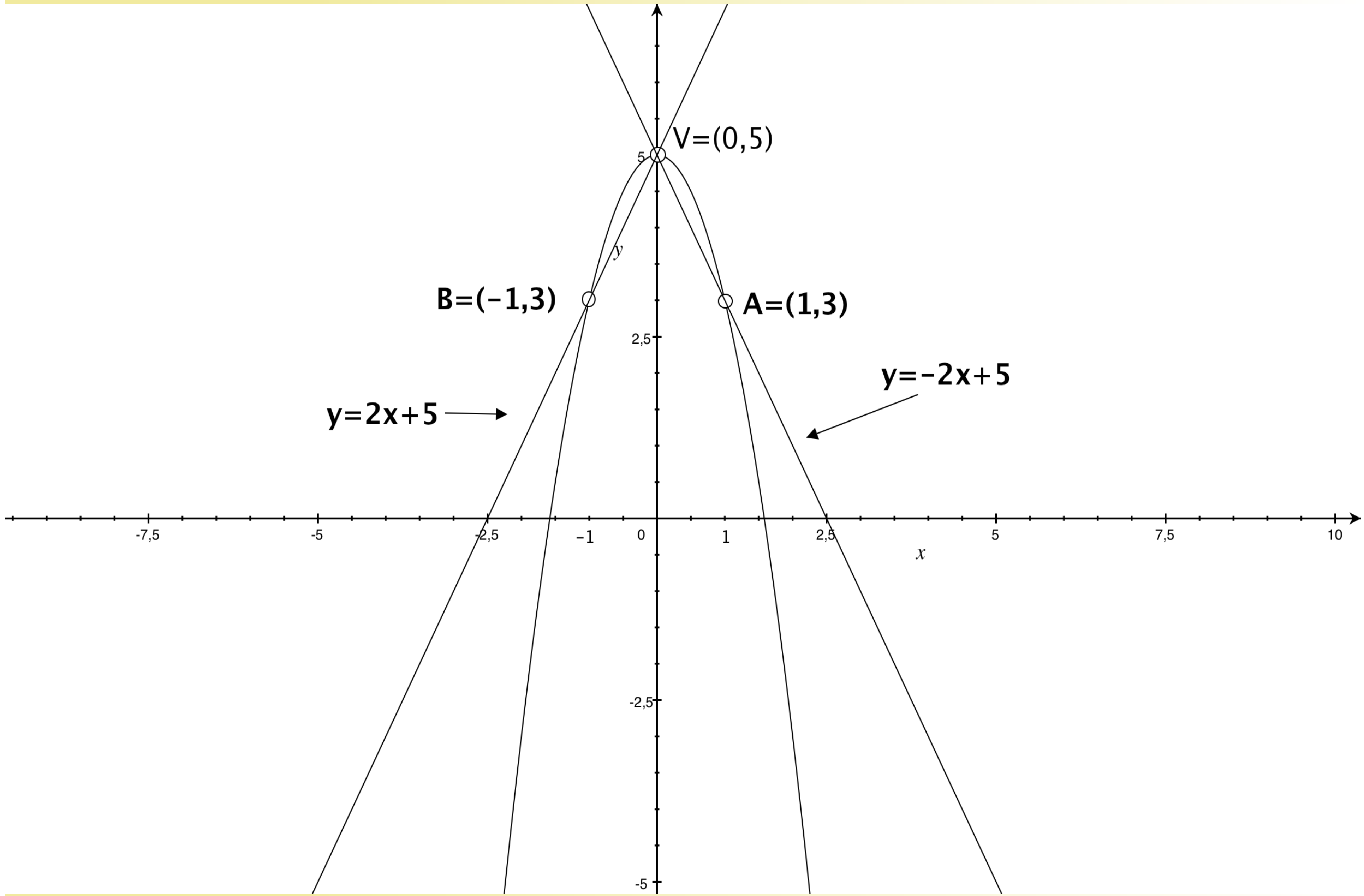
$$T.V. = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} = a\,(x_2 + x_1) + b \text{ (dipende da } x_1 \text{ e } x_2\text{)}$$

ES. Se $f(x)=-2x^2+5$ $(a=-2,\ b=0)$ $x_1=0$ e $x_2=1$ si ha

$T.V. = -2(1) = -2<0$ decrescita

Se $x_1=-1$ e $x_2=0$ si ha

$T.V.= -2(-1)=2>0$ crescita



V=(0,5)
B=(−1,3)
A=(1,3)
y=2x+5
y=−2x+5
x
y
-7,5
-5
-2,5
−1
0
1
2,5
5
7,5
10
5
2,5
-2,5
-5

Il tasso di variazione e' uguale

all'inclinazione della retta

passante per i due punti scelti

$T.V = a\,(x_2 + x_1) + b$ (dipende da x_1 e x_2)

ES. Se $f(x)=-2x^2+5$ $(a=-2,\ b=0)$ $x_1=1$ e $x_2=4$ si ha

$T.V. = -2(4-1) = -6 < 0$ decrescita

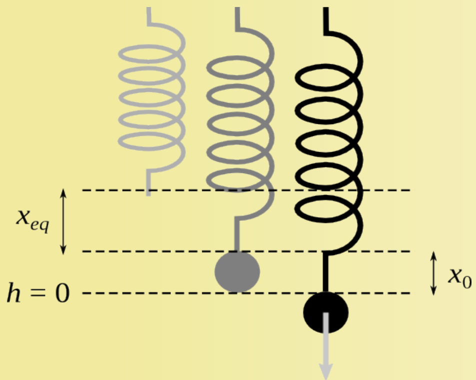
(e la retta passante per i punti $P=(1,f(1))=(1,3)$ e $Q=(4,f(4))= (4,-27)$ ha una inclinazione maggiore, cioe'

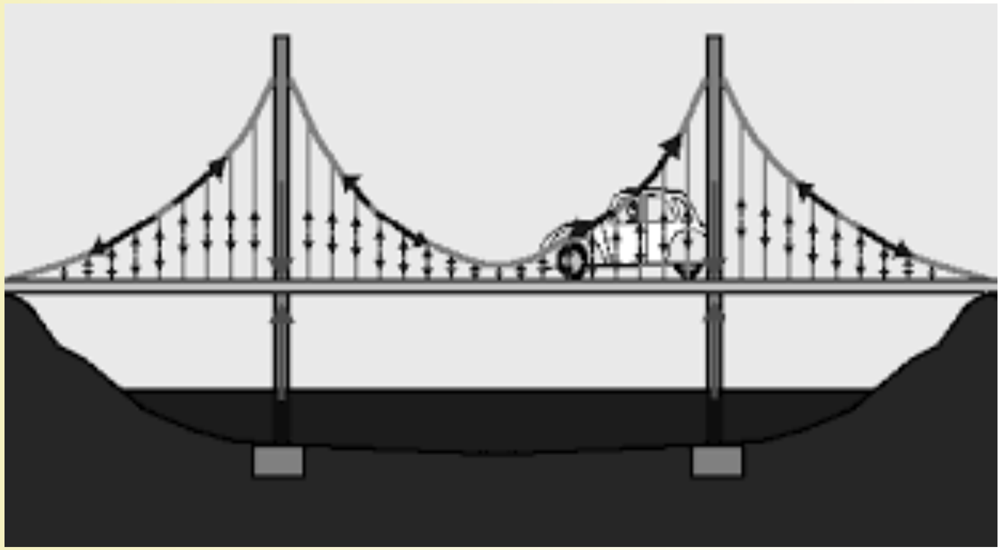
nell'intervallo [1,4] la curva decresce piu' velocemente che nell'intervallo [0,1]

DISEQUAZIONI

Se x e' la posizione di un corpo, l'energia potenziale della forza elastica e'

$$V(x)=kx^2/2$$





Pb. Per quali valori di x si ha $V(x) > 10$ joule?

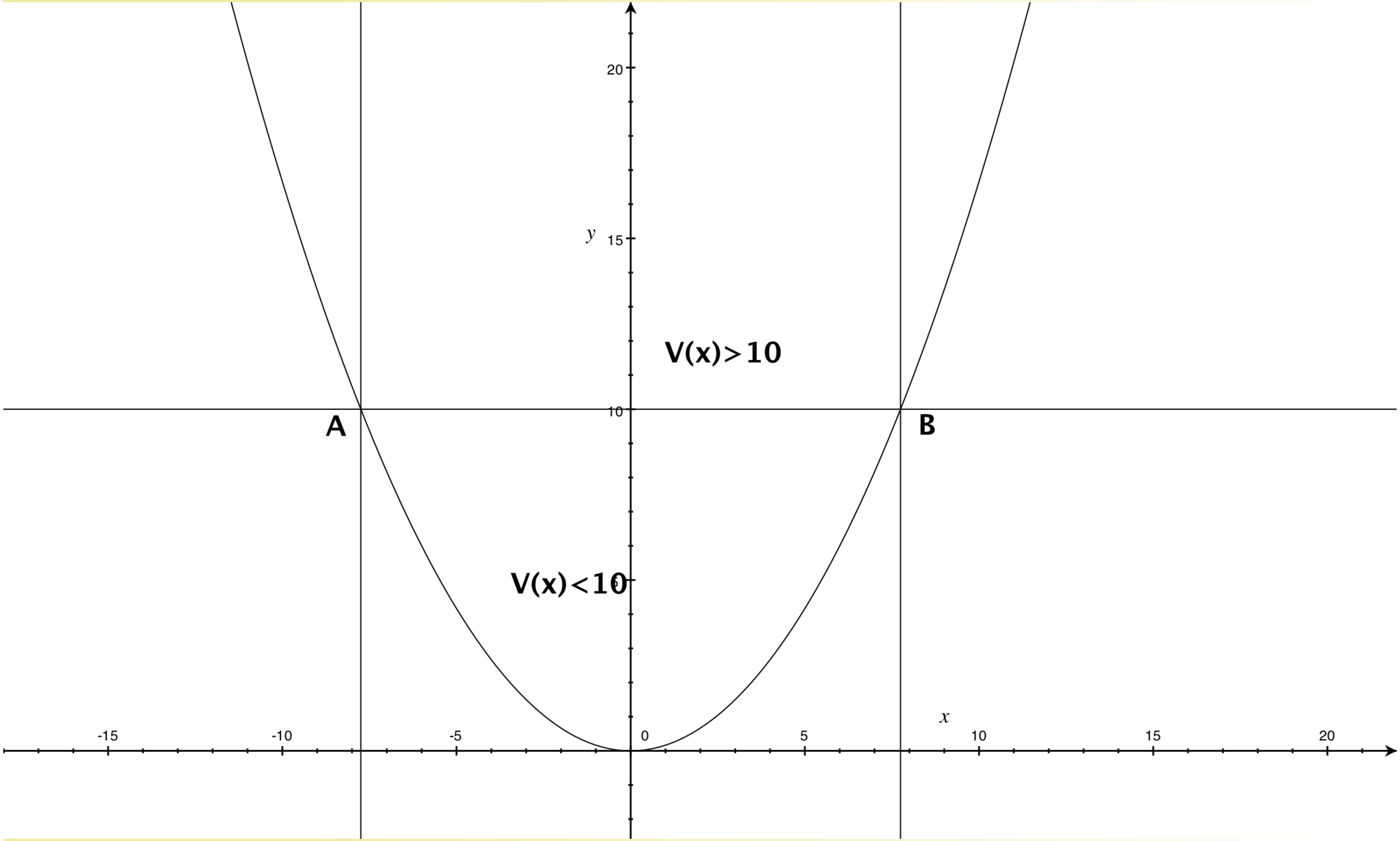
$V(x)=kx^2/2$ quindi $kx^2/2>10$ se $kx^2>20$ $x^2>20/k$.

Come si risolve?

1. Si risolve l'equazione associata $x^2 - 20/k=0$.

(le soluzioni sono due $x' = -(20/k)^{1/2}$ e $x''=(20/k)^{1/2}$

I punti $A=(-(20/k)^{1/2},10)$ e $B=((20/k)^{1/2},10)$ sono le intersezioni della parabola $V(x)=kx^2/2$ con la retta $V=10$



V(x)>10
V(x)<10
A
B
y
x
20
15
10
-15
-10
-5
0
5
10
15
20

I valori che risolvono il problema $V(x)>10$ sono

$$x>(20/k)^{1/2} \quad e \quad x<-(20/k)^{1/2}$$