Esercizi di CALCOLO e BIOSTATISTICA (Vettori e matrici) con soluzione

ESERCIZIO 1. Dati i vettori $\mathbf{v_1} = (3, 3)$, $\mathbf{v_2} = (-1, 1/2)$ e $\mathbf{v_3} = (0, 2)$
a) per quale valore di $c > 0$ il vettore cv_1 ha modulo uguale a quello di v_2?
b) Trovare il vettore combinazione lineare $\mathbf{w} = -\mathbf{v_1} - k\mathbf{v_2} + 2k\mathbf{v_3}$ con $k \in \mathbf{R}$, e dire, motivando la risposta, se esistono valori di k per i quali $\mathbf{w}$ é perpendicolare a $\mathbf{v_1}$.
c) Trovare, se esistono, i valori di k per i quali il vettore $\mathbf{v_1} - k\mathbf{v_2}$ ha la stessa direzione del vettore $2\mathbf{v_3}$.

Soluzione **a)** Il modulo di v_2 é $|v_2| = \sqrt{1 + 1/4} = (1/2)\sqrt{5}$. Il vettore cv_1 ha componenti $(3c, 3c)$ e il suo modulo é $|cv_1| = \sqrt{18c^2}$. I due moduli sono uguali se

$$(1/2)\sqrt{5} = \sqrt{18c^2} \quad \Rightarrow \quad 5 = 4(18c^2) = 72c^2;$$

c deve essere positivo, quindi $c = (1/6)\sqrt{5/2}$.

b) Osserviamo subito che si ha

$-v_1 = (-3, -3)$
$-k\mathbf{v_2} = (k, -k/2)$
$2k\mathbf{v_3} = (0, 4k)$

quindi $\mathbf{w} = -\mathbf{v_1} - k\mathbf{v_2} + 2k\mathbf{v_3} = (-3 + k, -3 - (k/2) + 4k) = (-3 + k, -3 + 7k/2)$.
Se $\mathbf{w}$ deve essere perpendicolare a $\mathbf{v_1}$, il prodotto scalare dei vettori deve essere zero: $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v_1} = 0$, cioé

$$(-3 + k)(3) + (-3 + 7k/2)(3) = -9 + 3k - 9 + 21k/2 = -18 + 27k/2 = 0$$

quindi deve essere $k = 4/3$.

c) Il vettore $2\mathbf{v_3} = (0, 4)$ é diretto come l'asse y di un riferimento cartesiano. Tenendo conto del fatto che il vettore $\mathbf{v_1} - k\mathbf{v_2}$ ha componenti $(3 + k, 3 - k/2)$, questo vettore risulta diretto come l'asse y se $3 + k = 0$, cioé se $k = -3$.
Per questa scelta di k il vettore $\mathbf{v_1} - k\mathbf{v_2}$, che e' parallelo a $2v_3$, ha componenti $(0, 9/2)$.

ESERCIZIO 2. Scrivere l'equazione della retta che passa per il punto $P_0 = (1, 2)$ ed è perpendicolare al vettore $v = (1, 2)$. Dopo aver trovato le coordinate del punto I di intersezione della retta con l'asse y, scrivere le coordinate del punto estremo del vettore w che è applicato in I, ha la stessa direzione della retta, lo stesso modulo di v e appartiene al primo quadrante.

Soluzione Una generica retta del piano ha equazione $y = mx + c$; se la retta deve passare per il punto $P_0 = (1, 2)$ si deve avere $2 = m + c$ quindi

$$c = 2 - m. \qquad (*)$$

Un vettore $w = (a, b)$ è ortogonale (o perpendicolare) al vettore $v = (1, 2)$ (ed ha quindi la stessa direzione della retta che stiamo cercando) se si ha $w \cdot v = 0$, cioé se $a + 2b = 0$ o, ció che é lo stesso se $a = -2b$ e le componenti di w sono $(-2b, b)$.
Questo vettore ha direzione $m_w = b/(-2b) = -1/2$, quindi l'inclinazione della retta che stiamo cercando, è $m = -1/2$. (Si può notare che la direzione di v è $m_v = 2$ e che $m_v = -1/m_w$).
Sostituendo il valore $m = -1/2$ nella $(*)$ si trova $c = 5/2$ e la retta richiesta ha equazione $y = -(x-5)/2$.

I punti dell'asse y hanno tutti la prima coordinata nulla, quindi se il punto deve stare sia sull'asse y che sulla retta $y = -(x - 5)/2$, le coordinate devono essere $I = (0, 5/2)$.
Il vettore v ha modulo uguale a $|v| = \sqrt{5}$; il punto estremo di w, sia $A = (x, y)$, deve appartenere alla retta $y = -(x - 5)/2$, deve essere a distanza $\sqrt{5}$ da I. La prima delle due condizioni implica che le coordinate di A siano $(x, -(x - 5)/2)$ e la seconda che sia

$$|AI|^2 = x^2 + [-\frac{x-5}{2} - \frac{5}{2}]^2 = x^2 + x^2/4 = 5x^2/4 = 5$$

cioè $x^2 = 4$ e quindi $x = \pm 2$. Visto che A deve stare nel primo quadrante, le coordinate di A sono $(2, 3/2)$.

ESERCIZIO 3. Dati il vettore $v = (1, 2)$ e la matrice A nella forma:

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & -4k \end{pmatrix}$$

Scrivere esplicitamente il prodotto $A \cdot w = v$, con $w = (x, y)$. Esistono valori di k per i quali il problema **non** si puó risolvere?
Trovare almeno un vettore w perpendicolare a v ed avente modulo 1.

Soluzione. Il prodotto $A \cdot w = v$, con $w = (x, y)$ si scrive nella forma

$$\begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & -4k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

eseguendo il prodotto righe per colonne si ha

$$\begin{pmatrix} kx - y \\ x - 4ky \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e i due vettori colonna sono uguali se

$$\begin{cases} kx - y = 1 \\ x - 4ky = 2 \end{cases}$$

Il problema non si puó risolvere se det $A = 0$ e se il vettore $A \cdot w$ non ha la stessa direzione di v (che è 2).
Dato che si ha

$$\det\ A = -4k^2 + 1,$$

risulta $\det A = 0$ se $4k^2 - 1 = 0$ cioé se $k = \pm 1/2$.
Per $k = 1/2$ il vettore $A \cdot w$ ha componenti $(x/2 - y, x - 2y)$ e risulta uguale al vettore v se

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \tag{1}$$

La prima delle equazioni del sistema si riscrive nella forma $(1/2)(x - 2y) = 1$ cioe' $x - 2y = 2$ ed e' esattamente identica alla seconda equazione: il sistema si risolve ed ha infinite soluzioni che sono tutti i punti della retta $x - 2y = 2$ o, cio' che e' lo stesso, $y = x/2 - 1$.

Se $k = -1/2$ il vettore $A \cdot w$ ha componenti $(-x/2 - y, x + 2y)$ e risulta uguale al vettore v se

$$\begin{cases} -\frac{x}{2} - y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \tag{2}$$

In questo caso la prima delle equazioni del sistema si riscrive nella forma $-(1/2)(x + 2y) = 1$ cioe' $x + 2y = -2$ e, visto che i primi membri delle due equazioni sono uguali mentre i secondi non lo sono il sistema non si puo' risolvere.
Il valore per cui il sistema non si risolve e' $k = -1/2$.

Il vettore $w = (x, y)$ é perpendicolare a $v = (1, 2)$ se si ha $x + 2y = 0$ cioé $x = -2y$ e quindi se $w = (-2y, y)$. Questo vettore ha modulo 1 se si ha

$$\sqrt{4y^2 + y^2} = \sqrt{5y^2} = 1$$

quindi se $y = \pm\sqrt{1/5}$.
In definitiva esistono 2 vettori che hanno le proprietá richieste e sono $w_1 = (-2\sqrt{1/5}, \sqrt{1/5})$ e $w_2 = (2\sqrt{1/5}, -\sqrt{1/5})$.

ESERCIZIO 4. Calcolare il determinante delle matrici seguenti

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1/3 & 2/9 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nel caso in cui il determinante dovesse essere zero, individuare quali vettori colonna hanno la stessa direzione.
Trovare la matrice $A^* = A \times B$ e verificare che, se $v = (2, -1)$, si ha $A^* \times v = A \times (B \times v)$. Infine, dopo aver verificato che $A \times B \neq B \times A$ provare che $A^* \times v \neq B \times (A \times v)$.

Soluzione. Il determinante di A vale det$A$=3-2=1. Il determinante di B vale det$B$=2/3-2/3=0. Il determinante di C vale det$C$= 3(2)-2=4. Il determinante di D vale det$D$= - 6.
I vettori colonna della matrice B, che sono $v = (3, -1/3)$ e $w = (-2, 2/9)$ hanno la stessa direzione (infatti $m_v = (-1/3)/3 = -1/9$ e $m_w = (2/9)/(-2) = -1/9$) in particolare si puo' scrivere $v = (-3/2)w$, quindi v ha la stessa direzione di w, verso opposto e modulo uguale a 3/2 quello di w.

La matrice A^* e' uguale a

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1/3 & 2/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+2/3 & -6-4/9 \\ -3-1/3 & 2+2/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29/3 & -58/9 \\ -10/3 & 20/9 \end{pmatrix}$$

e si ha

$$\begin{pmatrix} 29/3 & -58/9 \\ -10/3 & 20/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 232/9 \\ -80/9 \end{pmatrix}.$$

La matrice $B \times A$ e' uguale a

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1/3 & 2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -8 \\ -11/9 & 8/9 \end{pmatrix}$$

che, come si vede, e' diversa da A^*. Infine si ha che il vettore $(A \times v)$ vale

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

che, moltiplicato per B da'

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1/3 & 2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12+2 \\ -4/3-2/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -14/9 \end{pmatrix}$$

diverso da $(232/9, -80/9)$.

ESERCIZIO 5. Dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} -x/2 - y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

dire per quale matrice A dei coefficienti, per quale vettore w, termine noto, il sistema si scrive nella forma $A \cdot v = w$, dove $v = (x, y)$ é il vettore incognito. Senza risolvere il sistema, si puó dire, **motivando la risposta**, se ammette una, nessuna o infinite soluzioni? Verificare la risposta risolvendo il sistema.

Soluzione. La matrice A dei coefficienti del sistema é

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

mentre il vettore termine noto é $w = (1, 2)$. Eseguendo il prodotto righe per colonne $A \cdot v$, con $v = (x, y)$, si ha

$$\begin{pmatrix} -x/2 - y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

che é proprio il vettore a primo membro del sistema dato.
Visto che det$A = -1 - (-1) = 0$, il sistema puó ammettere nessuna o infinite soluzioni. Osservando che il vettore $A \cdot v$ si puó scrivere nella forma

$$\begin{pmatrix} -x/2 - y \\ (-2)[-x/2 - y] \end{pmatrix}$$

possiamo concludere che questo vettore ha direzione $m = (-2)[-x/2 - y]/(-x/2 - y) = -2$. Visto che il termine noto ha direzione $m_w = 2$, il sistema non puó avere soluzione.
Verifichiamo risolvendo il sistema dato

$$\begin{cases} -x/2 - y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

Ricaviamo x dalla seconda equazione e sostituiamolo nella prima; si ha

$$\begin{cases} -(2 - 2y)/2 - y = 1 \\ x = 2 - 2y \end{cases}$$

la prima equazione si scrive $-1+y-y = 1$, quindi $-1 = 1$ e ció é impossibile e il sistema non ha soluzioni.

ESERCIZIO 6. Una popolazione P di animali viene divisa in "giovani" G e "adulti" A e, per studiarne quantitativamente l'evoluzione, si rappresenta la popolazione come il vettore $P = (G, A)$. Quando si inizia lo studio, si ha $P_0 = (50, 50)$, poi si osserva sperimentalmente che dopo il tempo T risulta $P_T = (G_T, A_T) = (35, 45)$.
Si ripete l'esperimento nelle stesse condizioni e se inizialmente é $P_0 = (60, 200)$, dopo il tempo T risulta $P_T = (140, 54)$. Scrivere in forma di percentuali gli elementi della matrice E per la quale risulta $E \cdot P_0 = P_T$ (E é la matrice di sviluppo della popolazione).
Spiegare a parole sia il significato concreto dell'operazione $E \cdot P_0 = P_T$, sia quello dei valori degli elementi della matrice E.

Soluzione. Il modello che descrive entrambe le osservazioni e' $E \cdot P_0 = P_T$, dove

$$E = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é la matrice da trovare. Calcolando $E \cdot P_0 = P_T$ nei due casi dati si hanno due sistemi lineari, che devono essere entrambi soddisfatti

$$\begin{cases} 50a + 50b = 35 \\ 50c + 50d = 45 \end{cases} \qquad \begin{cases} 60a + 200b = 140 \\ 60c + 200d = 54 \end{cases}$$

Cioé

$$\begin{cases} 50a + 50b = 35 \\ 60a + 200b = 140 \end{cases} \qquad \begin{cases} 50c + 50d = 45 \\ 60c + 200d = 54 \end{cases}$$

Il primo sistema ha soluzione $a = 0$, $b = 7/10 = 0.70$, il secondo $c = 9/10 = 0.90$, $d = 0$. La matrice, con gli elementi in forma decimale, é quindi

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 0.70 \\ 0.90 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $P = (G, A)$, le componenti del vettore $E \cdot P_0$ sono $(G_T = 0.70A, A_T = 0.90G)$, quindi dopo un tempo T i giovani sono il 70% degli adulti A (il 70% degli adulti A ha generato nuovi giovani), mentre gli adulti sono il 90% dei giovani G (il 90% dei giovani é diventato adulto nel tempo T).

ESERCIZIO 7. Dopo aver scritto nella forma $A \cdot v = w$ il sistema

$$\begin{cases} -kx/3 + y = 1 \\ -x + 3ky = 3 \end{cases}$$

dire, motivando la risposta, se esistono valori di k per i quali il sistema non ha soluzioni oppure ha infinite soluzioni.

Soluzione. La matrice dei coefficienti del sistema e'

$$A = \begin{pmatrix} -k/3 & 1 \\ -1 & 3k \end{pmatrix}$$

$v = (x, y)$ e $w = (1, 3)$, quindi il sistema e' equivalente al prodotto

$$\begin{pmatrix} -k/3 & 1 \\ -1 & 3k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det A = 0$ se $-k^2 + 1 = 0$ cioe' se $k = \pm 1$. Per $k = 1$ il sistema si scrive

$$\begin{cases} -x/3 + y = 1 \\ -x + 3y = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -x + 3y = 3 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}$$

quindi l'unica equazione e' $-x + 3y = 3$ che ha soluzioni x (numero reale qualunque) e $y = x/3 + 1$ e, al variare di x, le soluzioni sono infinite. Se invece $k = -1$, il sistema si scrive

$$\begin{cases} x/3 + y = 1 \\ -x - 3y = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x + 3y = 3 \\ x + 3y = -3 \end{cases}$$

e questo sistema non ha soluzione.
In definitiva il sistema dato non ha soluzioni se $k = -1$, mentre se $k = 1$ ne ha infinite, tutte della forma x, $y = x/3 + 1$.

ESERCIZIO 8. Un osso di un animale attuale e' schematizzabile con il vettore $v = (1, 4/5)$. In un reperto paleontologico lo stesso osso e' schematizzabile con il vettore $V = (3/2, 2/3)$. Se A rappresenta la matrice di trasformazione dalla forma v in V, quale matrice A^{-1} rappresenta la trasformazione inversa dalla forma V in v?

Soluzione. Se

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

rappresenta la matrice per la quale si ha $A \times v = V$, si deve avere

$$A \times v = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

che e' equivalente al sistema

$$\begin{cases} a + 4b/5 = 3/2 \\ c + 4d/5 = 2/3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a = 3/2 - 4b/5 \\ c = 2/3 - 4d/5 \end{cases}$$

Quindi, al variare di b e d, esistono infinite matrici di trasformazione che trasformano v in V, tutte della forma

$$A \times v = \begin{pmatrix} 3/2 - 4b/5 & b \\ 2/3 - 4d/5 & d \end{pmatrix}.$$

Le matrici inverse, che sono infinite, devono soddisfare la condizione $A \times A^{-1} = I$ con I matrice identita'. Se indichiamo

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix},$$

il primo membro della precedente relazione si scrive

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 - 4b/5 & b \\ 2/3 - 4d/5 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11}(3/2 - 4b/5) + x_{12}(2/3 - 4d/5) & x_{11}b + x_{12}d \\ x_{21}(3/2 - 4b/5) + x_{22}(2/3 - 4d/5) & x_{21}b + x_{22}d \end{pmatrix}$$

e quindi, posto per semplicita' di scrittura $B = 3/2 - 4b/5$ e $D = 2/3 - 4d/5$, si deve avere

$$\begin{cases} x_{11}B + x_{12}D = 1 \\ x_{11}b + x_{12}d = 0 \\ x_{21}B + x_{22}D = 0 \\ x_{21}b + x_{22}d = 1 \end{cases}$$

visto che deve essere
$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3/2 - 4b/5 & b \\ 2/3 - 4d/5 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Tenendo conto che $bD - dB = (4b - 9d)/6$, si ricavano gli elementi delle matrici inverse
$$x_{11} = \frac{6d}{9d - 4b} \qquad x_{12} = \frac{6b}{4b - 9d}$$
$$x_{21} = \frac{30 - 24d}{20b - 35d} \qquad x_{22} = \frac{35 - 24b}{35d - 20b}.$$

ESERCIZIO 9. Sono assegnati i vettori del piano $\mathbf{u} = (2, 6)$, $\mathbf{v} = (1, a)$, $\mathbf{w} = (2b, b)$, dove a, b sono parametri reali.

i) Trovare (se esistono) a e b tali che $\mathbf{w} + 3\mathbf{v} = a\mathbf{u}$.

ii) Dato il vettore $\mathbf{v} = (1, a)$ e il punto P di coordinate $(1, \frac{1}{a})$, scrivere l'equazione della retta ortogonale a $\mathbf{v}$ e passante per il punto P.

iii) Dati i vettori $\mathbf{u} = (2, 6)$ e $\mathbf{v} = (1, a)$ trovare (se esiste) un valore di a tale che il vettore $\mathbf{u}/2 + \mathbf{v}$ sia parallelo a $\mathbf{w} = (4, 8)$.

Soluzione.

i) Tenendo conto delle definizioni, la relazione $\mathbf{w} + 3\mathbf{v} = a\mathbf{u}$ (*), scritta per componenti, diventa
$$\begin{cases} 2b + 3 = 2a \\ \\ b + 3a = 6a \end{cases} \tag{3}$$
o, equivalentemente,
$$\begin{cases} 2a - 2b = 3 \\ \\ 3a - b = 0. \end{cases} \tag{4}$$
Questo sistema lineare, nelle incognite a e b, ha soluzione se il determinante della matrice dei coefficienti è diverso da zero. Visto che si ha det $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$ il sistema ha una sola soluzione. Risolvendo per sostituzione si trova che $a = -3/4$ e $b = -9/4$.

ii) La retta che contiene il vettore $\mathbf{v} = (1, a)$ ha inclinazione $m_v = a$. Se $\mathbf{v_{perp}} = (x, y)$ è un vettore perpendicolare a $\mathbf{v}$ deve essere $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v_{perp}} = 0$ e quindi $x + ay = 0$ e cioè $x = -ay$. Dunque $\mathbf{v_{perp}} = (-ay, y)$ e la direzione della retta che contiene $\mathbf{v_{perp}}$ è $m_{v_{perp}} = -1/a$.
L'equazione della retta richiesta è quindi $y = -x/a + c$. Per trovare c si deve tener conto del fatto che la retta passa per il punto $P = (1, 1/a)$ e quindi deve essere $1/a = -1/a + c$. In definitiva $c = 2/a$ e la retta ha equazione $y = -1/a(x - 2)$.

iii) Per trovare l'angolo compreso tra due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ si deve ricordare che il prodotto scalare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ si scrive anche nella forma $|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{u}| \cos\alpha$, dova α è l'angolo compreso tra i due vettori.
Nel caso particolare dell'esercizio deve essere
$$3 + 4a = 5\sqrt{1 + a^2}\cos\alpha$$
e quindi
$$\cos\alpha = \frac{3 + 4a}{5\sqrt{1 + a^2}} = 1/5. \tag{++}$$
(Si deve notare che $1/5 > 0$ e quindi deve essere anche $\frac{3+4a}{5\sqrt{1+a^2}} > 0$, cioè $3 + 4a > 0$ (**).)

L'equazione $(++)$ nell'incognita a si scrive anche nella forma $3 + 4a = \sqrt{1 + a^2}$ cioe' $15a^2 + 24a + 8 = 0$ e le soluzioni sono
$$a_1 = (-6 - \sqrt{6})/7.5 \approx -1.13 \qquad a_2 = (-6 + \sqrt{6})/7.5 \approx -0.47.$$

Osservando che $3 + 4a_1 \approx -1.5 < 0$ mentre $3 + 4a_2 \approx 1.12 > 0$ si conclude che il valore richiesto deve essere a_2.

ESERCIZIO 10. Dati i vettori $\mathbf{u} = (4, -2)$ e $\mathbf{v} = (5, 15)$ trovare il coseno dell'angolo compreso tra i due vettori.

Soluzione. Il prodotto scalare tra i due vettori vale $v \cdot u = 20 - 30 = -10 \neq 0$ (quindi i due vettori non sono perpendicolari tra loro). Ma lo stesso prodotto scalare si puo' anche scrivere nella forma $v \cdot u = |u| \cdot |v| \cos\alpha = 2\sqrt{10}(5\sqrt{10}) \cos\alpha = 100 \cos\alpha$. Quindi possiamo scrivere $-10 = 100 \cos\alpha$, cioe' $\cos\alpha = -1/10$.