Relazioni e funzioni

La Scienza ha come obiettivo la comprensione dei fenomeni del mondo che ci circonda.
Per arrivare a capire quali meccanismi regolano i fenomeni naturali bisogna **osservare** quello che accade intorno a noi. La curiosità e l'osservazione attenta sono i passi preliminari nella conoscenza dei fenomeni della realtà circostante.

L'osservazione ripetuta di un fenomeno fornisce indicazioni sugli aspetti più importanti che riguardano il fenomeno che vogliamo studiare. Una volta che le caratteristiche principali del fenomeno sono state individuate, ci si può chiedere se tra di esse vi siano **relazioni**.

Ad esempio...

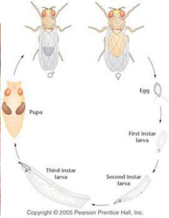
La *Drosophila melanogaster* (o moscerino della frutta)

(Un importante organismo modello)

La *Drosophila melanogaster*, un insetto del'ordine dei Diptera, è uno degli organismi più studiati dal punto di vista genetico

Il genoma è stato interamente sequenziato nel 1998 e contiene 132 milioni di basi e circa 13.767 geni. dal punto di vista genetico uomini e *Drosophile* sono piuttosto simili, in particolare il 60% delle malattie genetiche umane (ad esempio Parkinson e la malattia di Alzheimer) si riconoscono anche nel moscerino e il 50% delle proteine prodotte sono analoghe.
Drosophila viene dunque usata come "organismo modello" per lo studio di molte patologie umane.

Alcuni degli aspetti preliminari che riguardano l'uso di organismi modello sono: la semplicità con cui si possono far evolvere in laboratorio, la loro capacità riproduttiva e la durata del ciclo vitale



Negli insetti il ciclo biologico può durare, secondo la specie, da pochi giorni a diversi anni e, spesso, il suo svolgimento è in stretta relazione con fattori ambientali di natura climatica (in particolare la temperatura) e nutrizionali. (Questo implica che gli Insetti possano adattarsi a svariati ambienti, comprese le regioni piİ fredde della Terra, ricorrendo ad accorgimenti biologici quali lo svernamento in stato di dormienza e la migrazione stagionale.)
In definitiva tra durata D del ciclo vitale e temperatura T si può stabilire l'esistenza di una relazione:

$$T \quad \longrightarrow \quad D$$

I parametri T e D sono quantificabili, quindi la relazione mette in corrispondenza un valore numerico (quello della temperatura T) con uno o più valori numerici (quelli della durata di vita D).

Se ad un valore numerico ne corrisponde uno solo, la relazione prende il nome di "funzione" e scriviamo $D = D(T)$.

Ad esempio:

(a) l'associazione tra il valore 163 cm. di altezza e 50 alunne di una scuola (che contrassegnamo con i numeri N=1,2,3, ... , 50)

$$h \quad \longrightarrow \quad N$$

NON E' una funzione, ma una relazione (esiste certamente più di una alunna che ha la stessa altezza).

(b) l'associazione tra una cellula C e il suo genoma G

$$C \quad \longrightarrow \quad G$$

E' una funzione, visto che ogni cellula ha un genoma che non condivide con nessuna altra cellula.

La durata del ciclo vitale della *Drosophila* dipende dalla temperatura. Ecco alcuni dati di laboratorio

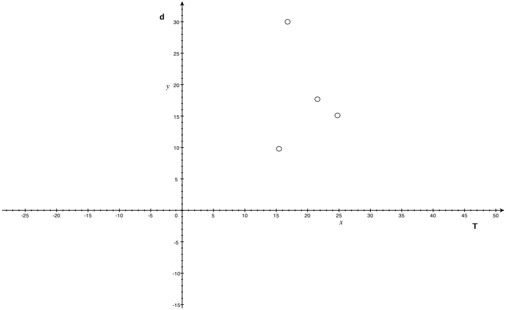
Temperatura(in C^o):	16^o	18^o	22^o	25^o
durata (in giorni):	10	30	18	15

Problema: la relazione tra la durata del ciclo vitale e la temperatura è una funzione?

Temperatura(in C^o): 16^o 18^o 22^o 25^o

durata (in giorni): 10 30 18 15

Ad un valore di temperatura corrisponde un ben preciso valore di durata: la relazione $d = d(T)$ e' una funzione.
Possiamo scrivere che se $T = 16$ $d(16) = 10$, se $T = 18$, $d(18) = 30$, se $T = 22$, $d(22) = 18$, se $T = 25$, $d(25) = 15$.
Rappresentiamo i dati



(E' difficile riconoscere un andamento organizzato)

Uova

All'interno di frutti molto maturi la *Drosophila* depone le uova (embrioni).

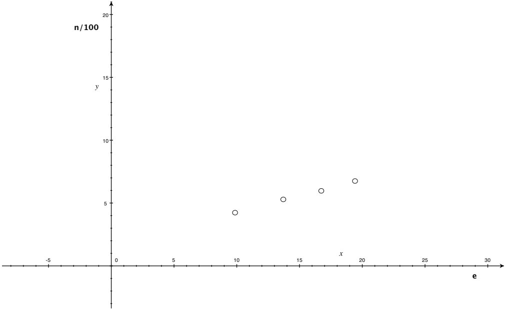
Le femmine diventano fertili dopo circa 10 giorni dalla nascita e il numero di uova deposte dipende, dai 10 ai 20 giorni dalla nascita, dall'età della madre. Alcuni dati:

n. uova:	440	510	578	618
età (in giorni):	10	14	18	20

Questa relazione è una funzione?

La relazione e' una funzione: $N = N(e)$. Se $e = 10$ si ha $N(10) = 440$, se $e = 14$ si ha $N(14) = 510$, se $e = 18$ si ha $N(18) = 578$ se $e = 20$ si ha $N(20) = 618$.

Rappresentiamo i dati



(Sembrano allineati)

Una funzione espressa dalla relazione

$$f: \; x \quad \rightarrow \quad f(x) = mx + c$$

e' una funzione lineare. Il grafico e' una retta.

m=coefficiente di inclinazione della retta
c=ordinata del punto di intersezione della retta con l'asse y. L'intersezione ha coordinate $I = (0, c)$.

n. uova:	440	510	578	618
età (in giorni):	10	14	18	20

Se $N =$ n. uova prodotte e $e =$ età in giorni, una relazione lineare ha la forma

$$N = me + q$$

Se $e = 10$, $N(10) = 440$ ($440 = m10 + q$),
se $e = 14$, $N(14) = 510$ ($510 = m14 + q$)
Si ha $q = 440 - 10m$ sostituendo $510 = 14m + (440 - 10m) = 440 + 4m$
quindi $70 = 4m$

$$m = 17.5, \qquad q = 440 - 175 = 265$$

L'equazione della retta è $N = 17.5e + 265$

n. uova:	440	510	578	618
età (in giorni):	10	14	18	20

Se $N = 17.5e + 265$ per $e = 18$ giorni si dovrebbe avere $N = 17.5(18) + 265 = 580$. Il dato sperimentale è molto simile (578).

Per $e = 20$ si dovrebbe avere $N = 17.5(20) + 265 = 615$. Il dato sperimentale è molto simile (618) si conclude che la funzione $N = 17.5e + 265$ è una buona descrizione del fenomeno.

(Quante uova depone, approssimativamente, una femmina di 15 giorni?)

Variazione e tasso di variazione

IL PIL

In economia, uno dei più importanti indici per valutare il benessere di una nazione è il **PIL** (**Prodotto Interno Lordo**), introdotto dall'economista John Maynard Keynes (1883-1946). Il PIL stima, sinteticamente, la ricchezza prodotta da uno stato, in termini di beni e servizi:
se C è il totale dei consumi dello stato, S la spesa dello stato, I gli investimenti, Ex e Imp le esportazioni e le importazioni.

$$\text{PIL} = C + S + I + (Ex - Imp)$$

Il PIL viene in genere calcolato su base annua, ma sono importanti anche le sue variazioni trimestrali. Si afferma che uno stato è in recessione se il PIL decresce per due trimestri di seguito.

GPI

Un indice alternativo al PIL, che si usa per valutare il benessere complessivo dei cittadini, è

il GPI

(Genuine Progress Indicator). Questo indicatore stima la **qualità della vita** dei cittadini, scomponendo la spesa totale dello stato S in "*spese positive*", quelle che aumentano il benessere (come quelle per beni e servizi), e "*spese negative*" (i costi di criminalità, inquinamento, incidenti stradali ecc.) e attribuendo a quelle positive un valore maggiore.

VARIAZIONE

Per capire se una nazione si arricchisce o si impoverisce si segue l'andamento annuale del PIL, calcolandone **la variazione**.

Ad esempio, in Italia:

PIL (2008)= 1 813,138 dollari internazionali

PIL (2009)= 1 734,292 dollari internazionali
(dollari internazionali=unità di valuta ipotetica che ha lo stesso potere d'acquisto che il dollaro USA ha avuto negli Stati Uniti in un certo anno)

Quindi: PIL (2009) - PIL (2008)= 1 734,292 - 1 813,138 = - 78.846 (<0 $\Rightarrow$ diminuzione).

Per decidere se la diminuzione è grande o piccola si calcola la variazione percentuale del PIL da un'anno all'altro.

Variazione percentuale

$$\text{PIL (2009)} = \text{PIL (2008)} - x/100 \text{ PIL (2008)}$$

$$\text{PIL (2009)} - \text{PIL (2008)} = -(x/100) \text{ PIL (2008)} \Rightarrow$$

$$[\text{PIL (2009)} - \text{PIL (2008)}]/ \text{ PIL (2008)} = - x/100$$

$$-x/100 = - 78.846/ 1\ 813{,}138 \approx - 0.043$$

(**In Italia la variazione percentuale del PIL tra il 2008 e il 2009 è stata del 4% circa**)

Demografia

Indicatori importanti delle condizioni di vita di una popolazione e della sua evoluzione sono la variazione percentuale di **natalità, mortalità, immigrazione, emigrazione**.

Per esempio nel 2011 gli Italiani erano circa N_1=60.630 milioni e sono nati circa n=560 000 bambini e quindi, alla fine dell'anno gli Italiani erano $N_2 = N_1 + n$. La variazione della numerosità della popolazione per le nascite è stata

$$\frac{(N_1 + n) - N_1}{N_1} = \frac{n}{N_1} \approx 0.0092$$

cioè circa 9.2 per mille annuo.

Si noti che il tasso di natalità della Turchia è stato del 18 per mille,
quello della Francia del 13 per mille,
quello della Germania dell'8 per mille.

Inoltre la variazione per la mortalità registrata nello stesso anno in Italia è stato del 9.7 per mille (quindi superiore a quella dovuta alla natalità):

L'ITALIA È UN PAESE CHE INVECCHIA!!

QUANTO RAPIDAMENTE INVECCHIA L'ITALIA?

Per rispondere a questa domanda bisogna confrontare la **variazione della numerosità con il tempo in cui si è prodotta**:

se consideriamo due istanti di tempo $t_1 < t_2$, e se $N(t_1)$ e $N(t_2)$ sono le numerosità in questi istanti, il numero

$$\frac{N(t_2) - N(t_1)}{t_2 - t_1}$$

si chiama **tasso di variazione della popolazione** (nel tempo $t_2 - t_1$) e descrive quanto velocemente è avvenuto il cambiamento.

(Si noti che per calcolare il tasso di variazione non è necessario conoscere la legge con cui varia $N(t)$, basta solo conoscere i due valori $N(t_1)$ e $N(t_2)$).

Un'osservazione interessante

Alla fine del '700 un grande demografo, Thomas R. Malthus (1766-1834), sosteneva (senza fondamento empirico) che la produzione di risorse alimentari R seguisse un andamento lineare nel tempo:

$$R(t) = R_0 + mt$$

Data questa legge, con quale velocità (tasso) crescono le risorse alimentari?

Dobbiamo confrontare la **variazione** di risorse disponibili con il tempo in cui si è prodotta.

Consideriamo due istanti di tempo qualunque $t_1 < t_2$, si ha

$$\frac{R(t_2) - R(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{mt_2 - mt_1}{t_2 - t_1} = \frac{m(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = m$$

abbiamo ottenuto **una costante** (che non dipende da t_1 e t_2) che è proprio il coefficiente angolare della legge lineare $R_0 + mt$.

Questo è un fatto generale delle leggi lineari:

il coefficiente angolare a **della legge** $f(x) = ax + b$ **esprime la velocità (costante) con cui** f **varia al variare di** x**.**

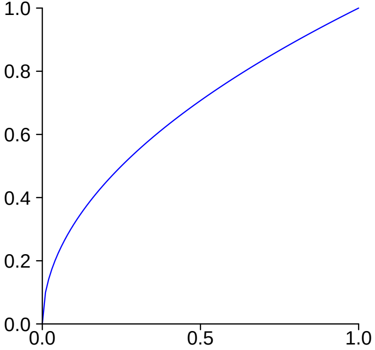
Se la funzione non è lineare, questa affermazione non vale e il tasso di variazione di una funzione $f(x)$ tra i punti x_1 e x_2 è uguale al coefficiente angolare della retta che passa per i $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ (e **non è costante se la legge non è lineare**).

A volte, se non si hanno informazioni sull'andamento del fenomeno, si approssima la legge che descrive un fenomeno utilizzando tassi costanti (e dunque utilizzando leggi lineari).

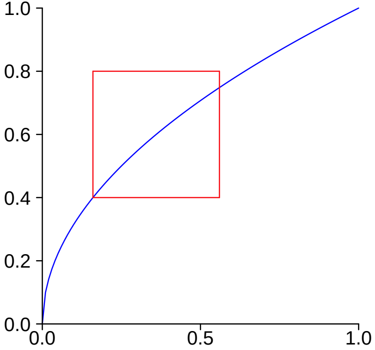
Commettiamo un grave errore utilizzando una legge lineare al posto di una che non lo è?

Cerchiamo di capire geometricamente cosa significa approssimare linearmente una legge

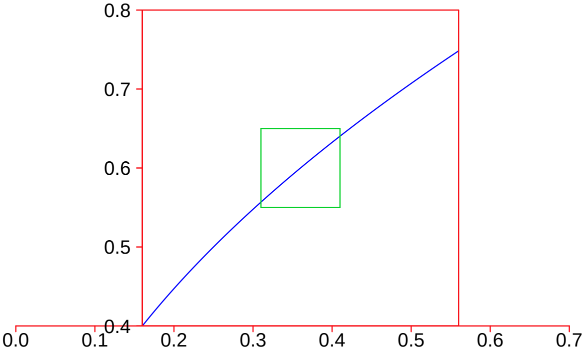
ZOOM



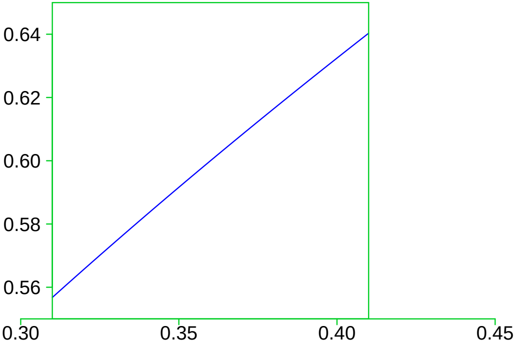
ZOOM



ZOOM



ZOOM



Se ingrandisco abbastanza intorno a un punto, ogni grafico di funzione appare rettilineo.

Questo vuol dire che, per piccole variazioni della variabile indipendente, posso considerare costante il tasso di variazione.

Riassumendo

Le leggi lineari sono il primo esempio importante di legge che descrive un cambiamento.

In particolare, usare una legge lineare corrisponde a considerare **costante la velocità del cambiamento** e questo costituisce una approssimazione ragionevole (per piccoli cambiamenti)