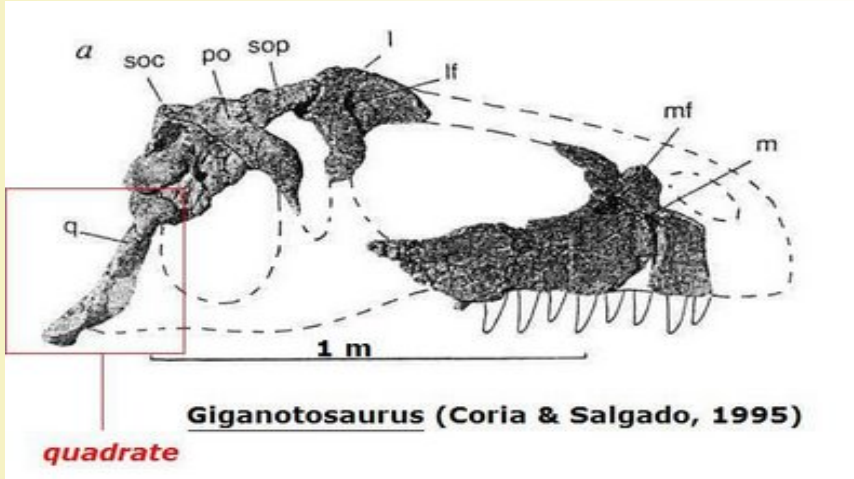
EVOLUZIONE delle FORME

(IL CALCOLO VETTORIALE,

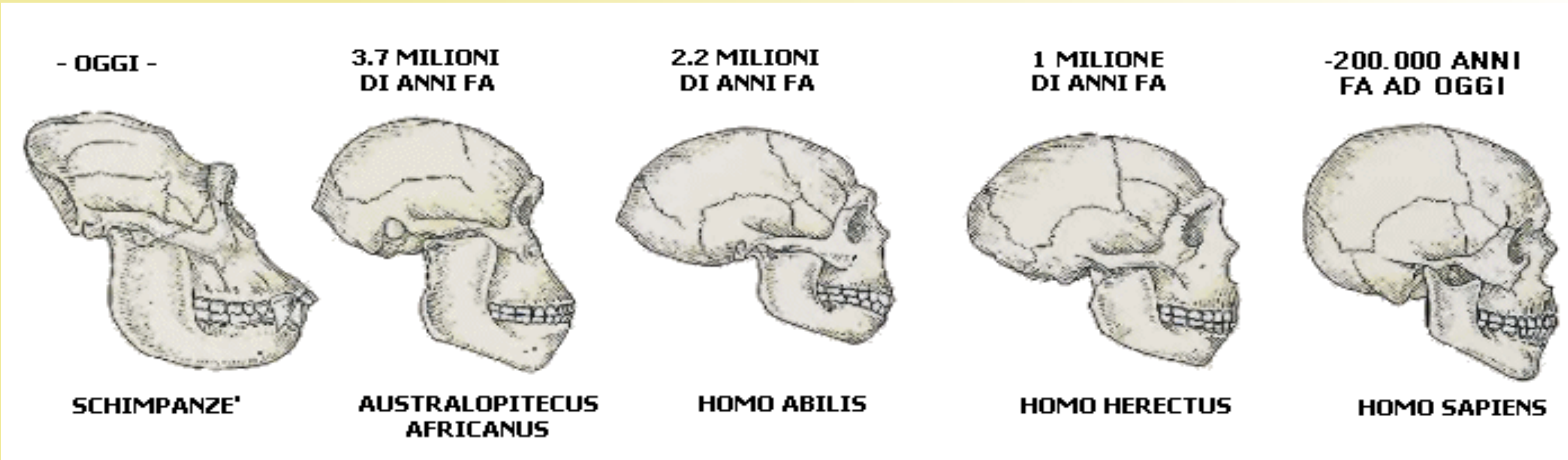
LE TRASFORMAZIONI LINEARI e LE MATRICI)

Le misure permettono
di visualizzare le forme

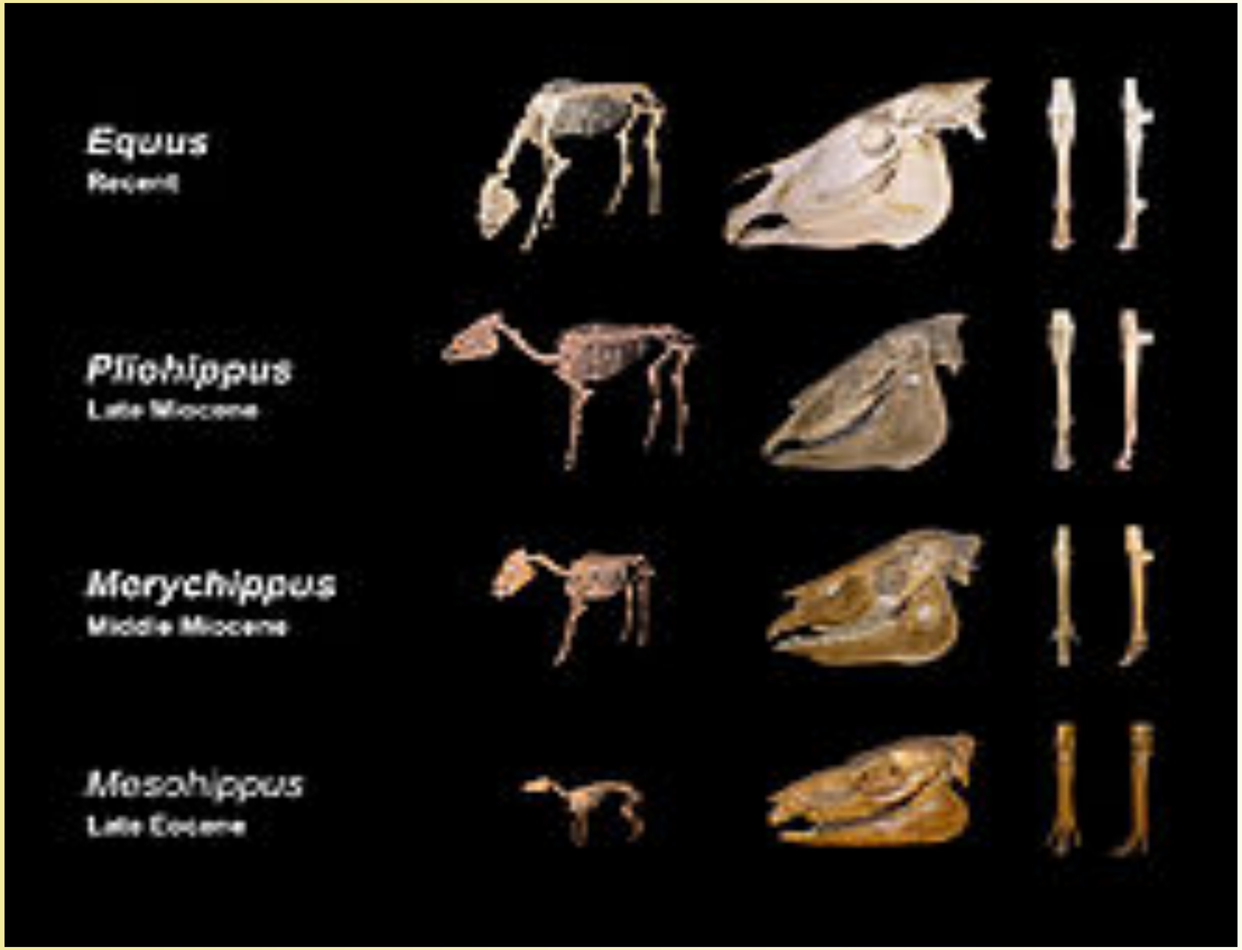
(cioe' di rappresentarle
geometricamente)



Ma le forme evolvono (cambiano) nel tempo



Vi sono prove paleontologiche, biochimiche, di confronto anatomico ed embriologico di cambiamenti in tutte le specie

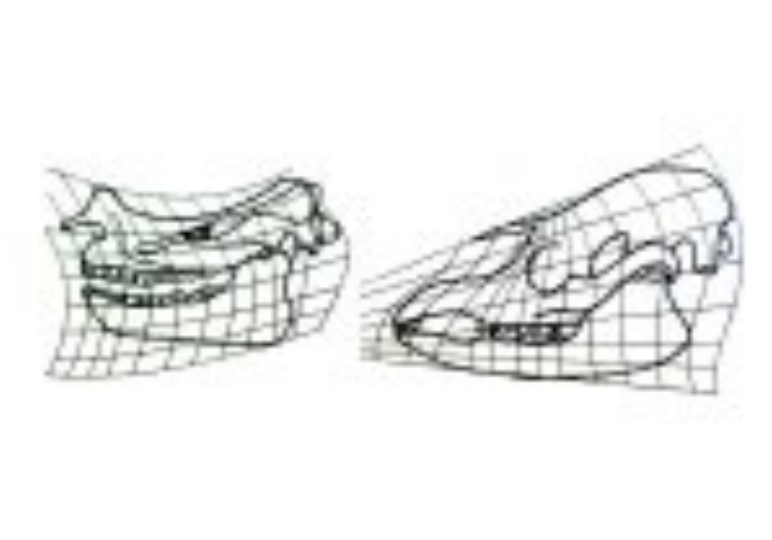


PROBLEMI:

Quali sono state le cause dei cambiamenti?

Come è possibile descriverle quantitativamente ?

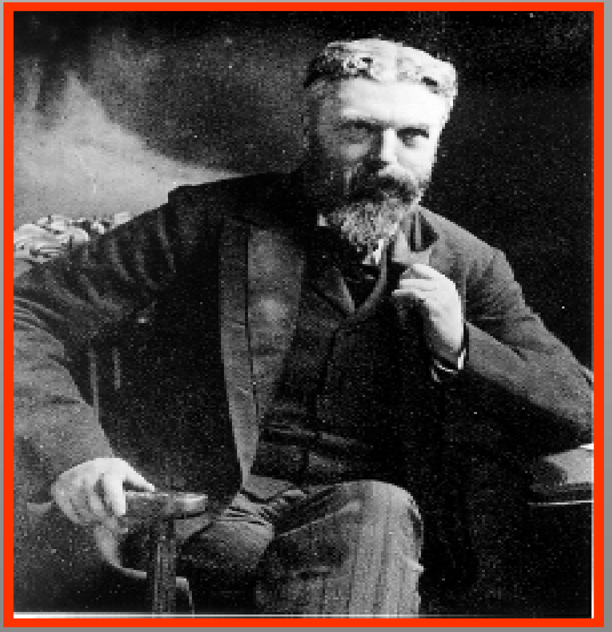
La disciplina biologica che si occupa attualmente di studiare l'evoluzione delle forme è **la morfometria geometrica** che è un insieme di metodi che si propongono di analizzare le differenze tra le forme biologiche catturando la geometria complessiva (e non semplici misure) delle strutture biologiche.
Insieme alle analisi biomolecolari, lo studio della variabilità delle forme ha come obiettivo la ricostruzione delle dinamiche evolutive delle singole specie.



Qual è l'origine di questo approccio?

L'evoluzione delle forme organiche

Esiste una matematica del mondo organico?



D'Arcy Wentworth Thompson
(1860- 1948)

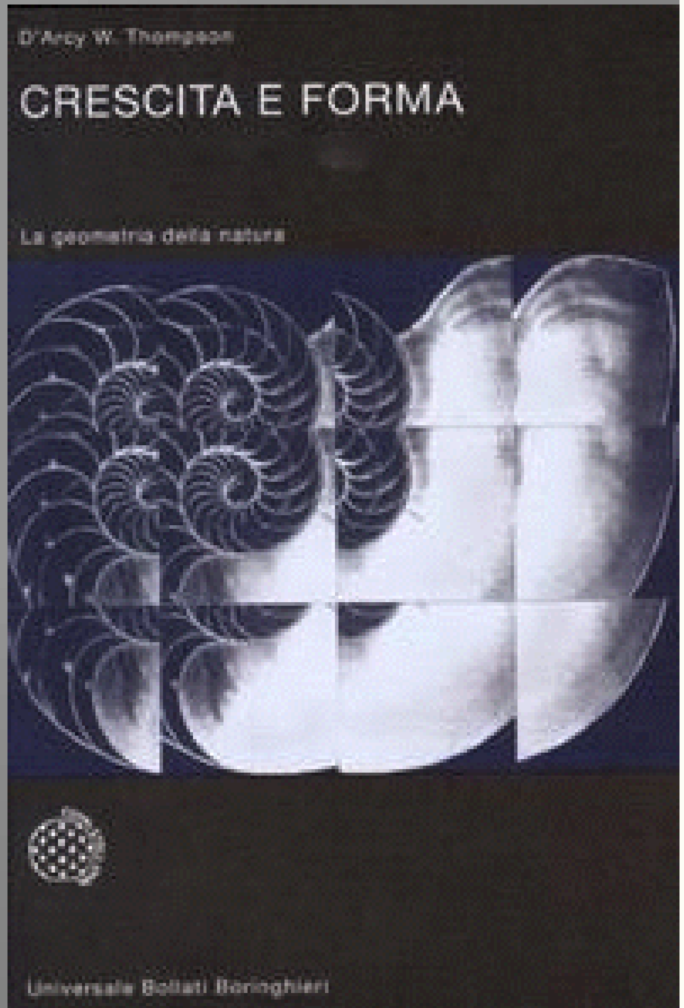
"…credo di essere stato capace di comprendere qualcosa dell'uso e della bellezza della Matematica. So che nello studio delle cose del mondo il numero, l'ordine e la posizione sono il punto di partenza della conoscenza e che queste tre cose, nelle mani di un matematico, forniscono il punto di partenza per una descrizione dell'Universo"

da "Crescita e Forma" (1917)

D'Arcy Wentwoth Thompson

"Crescita e Forma"

ed. Bollati Boringhieri 1992



GLI STRUMENTI MATEMATICI USATI SONO

I VETTORI (dal latino "colui che trasporta")

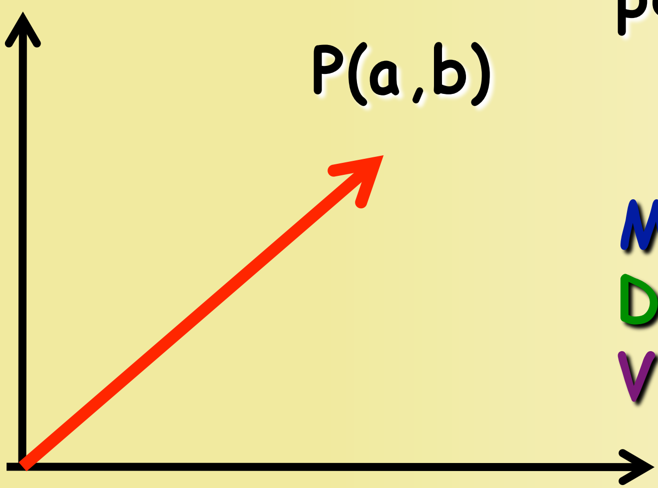
In genetica un **VETTORE** è una molecola di DNA in grado di autoreplicarsi, che **trasporta** DNA tra le cellule

La zanzara **Anopheles** che trasporta il plasmodio della malaria è un **VETTORE**

In fisica si usano i **VETTORI** per descrivere grandezze come la velocità, la forza, … caratterizzate da un **verso** di azione

Le grandezze che non possono essere descritte dalla sola misura, ma richiedono piu' informazioni, in matematica sono caratterizzate come VETTORI

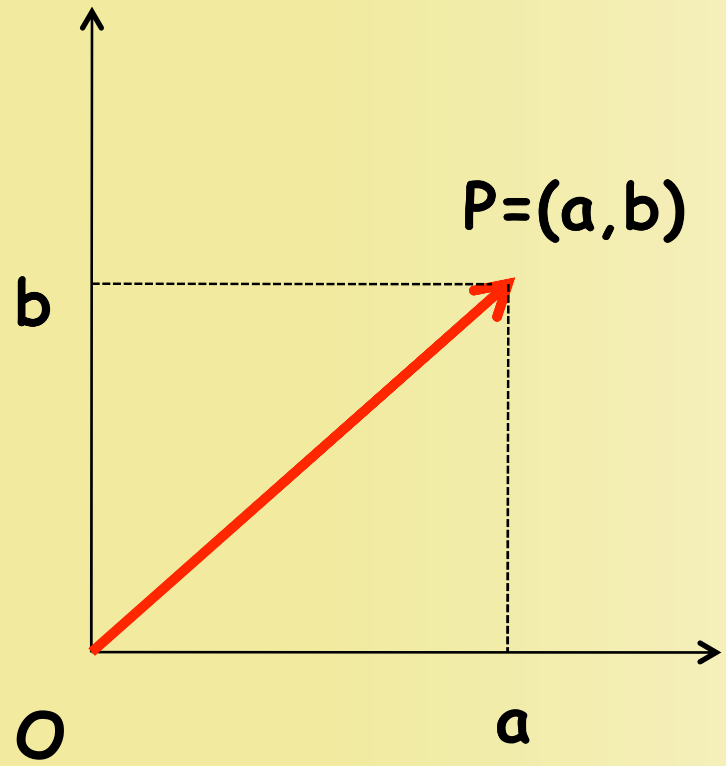
UN VETTORE E' UN SEGMENTO ORIENTATO del piano cartesiano



Le coordinate (a,b) del punto finale (dette **COMPONENTI DEL VETTORE**) permettono di individuare

MODULO (lunghezza) del vettore
DIREZIONE del vettore
VERSO del vettore

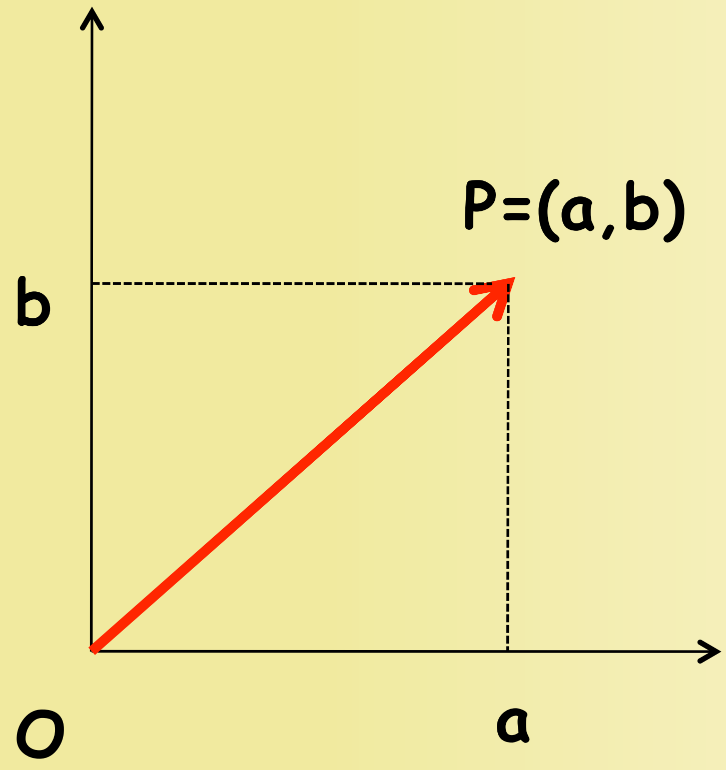
MODULO di un vettore=lunghezza del vettore



$|OP|=(a^2+b^2)^{1/2}$

(teorema di Pitagora)

DIREZIONE di un vettore=direzione della retta che contiene il vettore



1) La retta passa per O:

$$y=kx$$

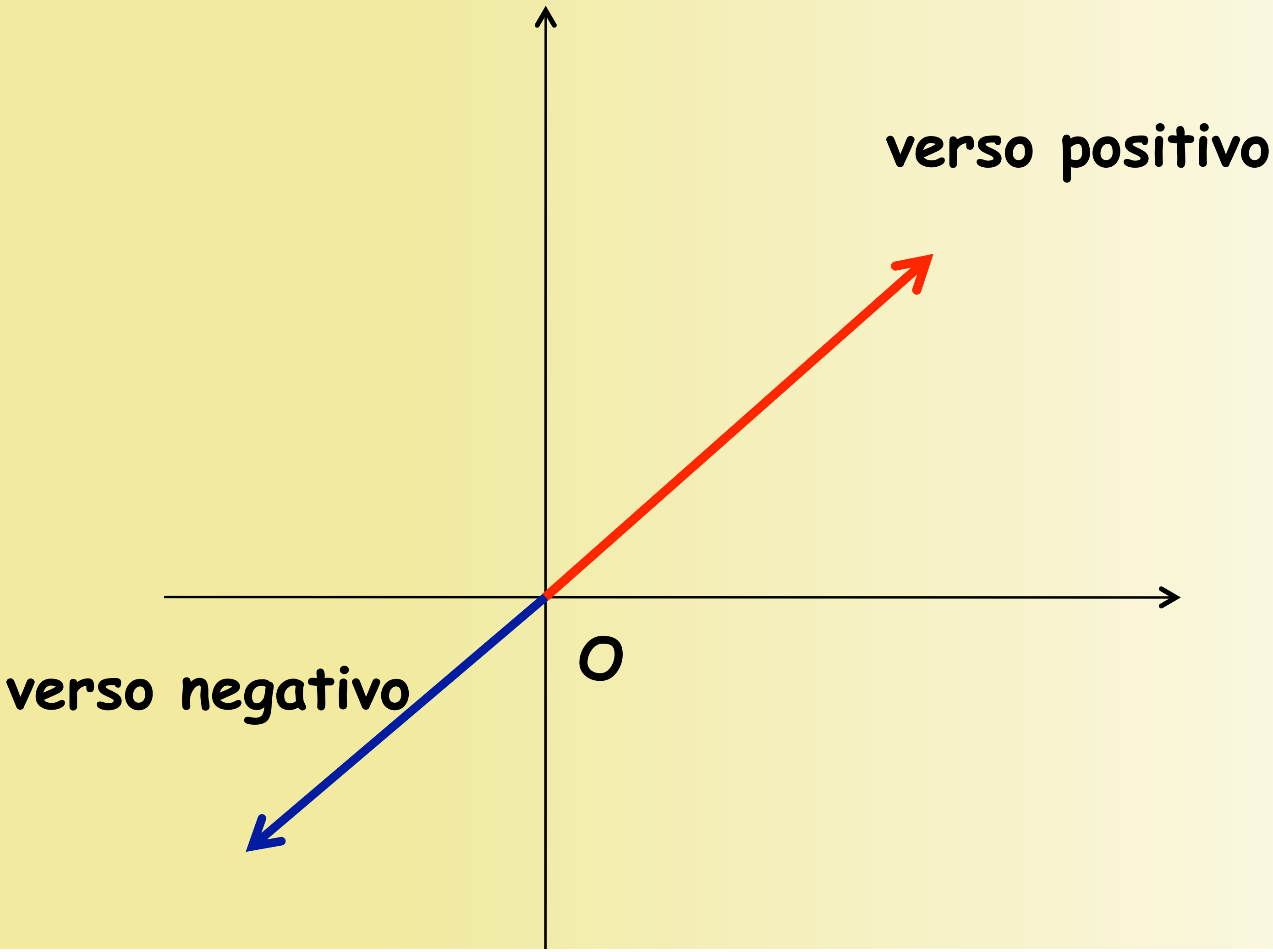
2) P appartiene alla retta:

$$b=ka$$

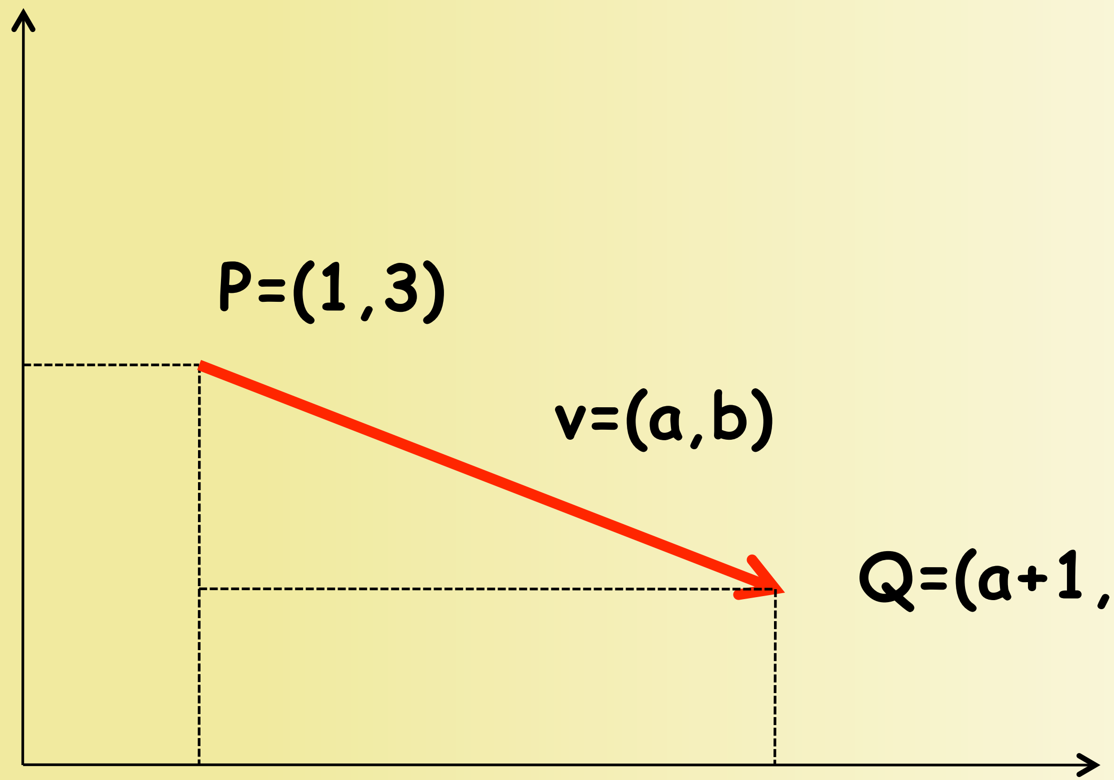
Quindi: $k=b/a$

La direzione del vettore e' b/a

VERSO di un vettore = quadrante in cui si trova il vettore



Si può "applicare" un vettore in un punto diverso da $O=(0,0)$? **SI** ma cambiano le coordinate del punto estremo del vettore (non cambia il vettore)



VETTORI e COMPUTER GRAFICA

Per memorizzare le immagini si usano vari "formati"

(regole che descrivono le modalità con cui devono essere riprodotte le immagini)

Formato raster = un'immagine viene descritta tramite un vettore le cui componenti corrispondono ai punti dell'immagine (**pixel**)

In bianco e nero a **0** corrisponde il **bianco** a **1** il **nero**

V=(0000011) → BBBBBNN

W=(0011111) BBNNNNN

(questa è un'immagine in formato raster (jpg))

VETTORI e STATO DI UN HABITAT

L'habitat (dal latino per "abitare") e' un luogo fisico le cui caratteristiche biotiche e abiotiche permettono ad una specie di vivere e svilupparsi: e' l'ambiente che circonda una specie.

Per descrivere le caratteristiche di un habitat si usano i vettori. Le componenti sono misure di grandezze come "la quantita' di alberi", "il numero di altre specie nello stesso luogo" oppure il "ph", "il volume d'acqua" ecc.

ES. Il vettore che descrive lo stato di un lago e'

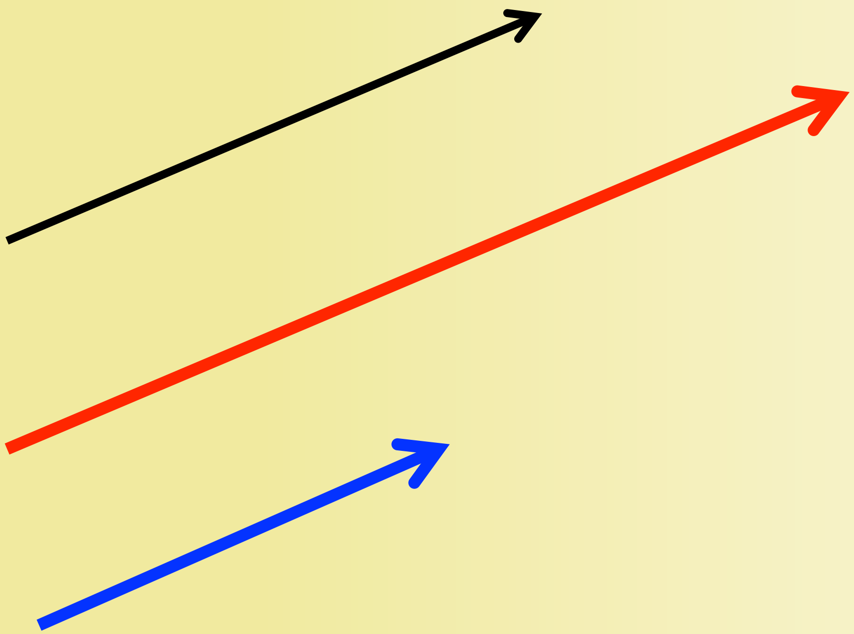
$$S = (150, \; 5.7, \; 8.3, \; 23)$$

V(litri) ph O(mg/l) Azoto (10^{-6}gr/mgr)

Per descrivere un allungamento (o una compressione) si moltiplica un vettore per uno scalare (scalare= numero)

ALLUNGAMENTO (ACCORCIAMENTO)
(moltiplicazione di un vettore per uno scalare)

$v=(a,b)$



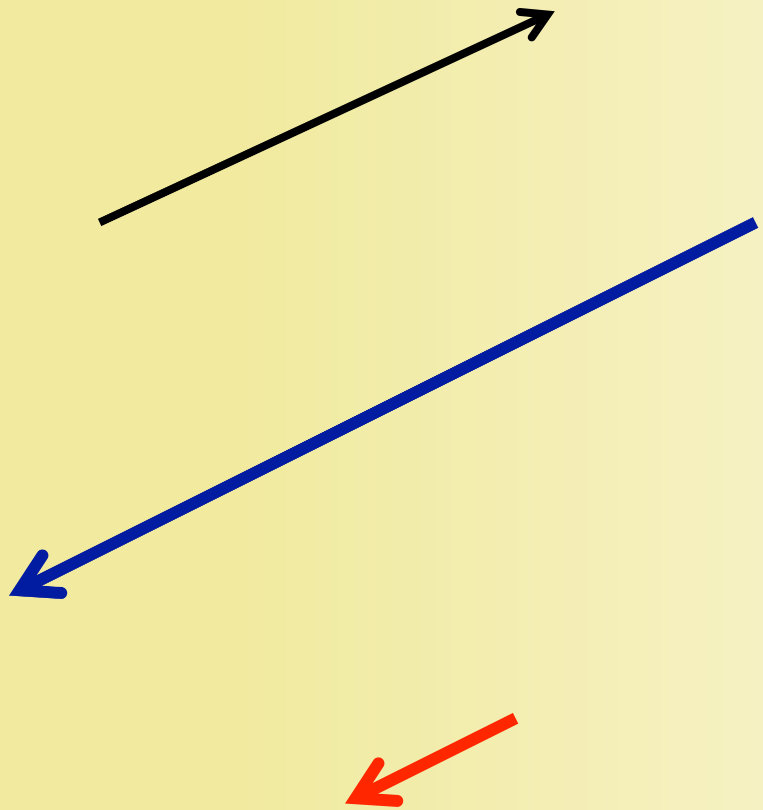
$Kv=(Ka,kb)$ $K>1$

$Cv=(Ca,Cb)$ $0<C<1$

Cambia SOLO il modulo ma non la direzione e il verso

Cambia il modulo e il verso MA NON LA DIREZIONE

$v=(a,b)$



$Kv=(Ka,Kb)$ $\qquad K<-1$

$Cv=(Ca,Cb)$ $\qquad -1<C<0$

Un modo del tutto equivalente di scrivere la moltiplicazione di un vettore per uno scalare e':

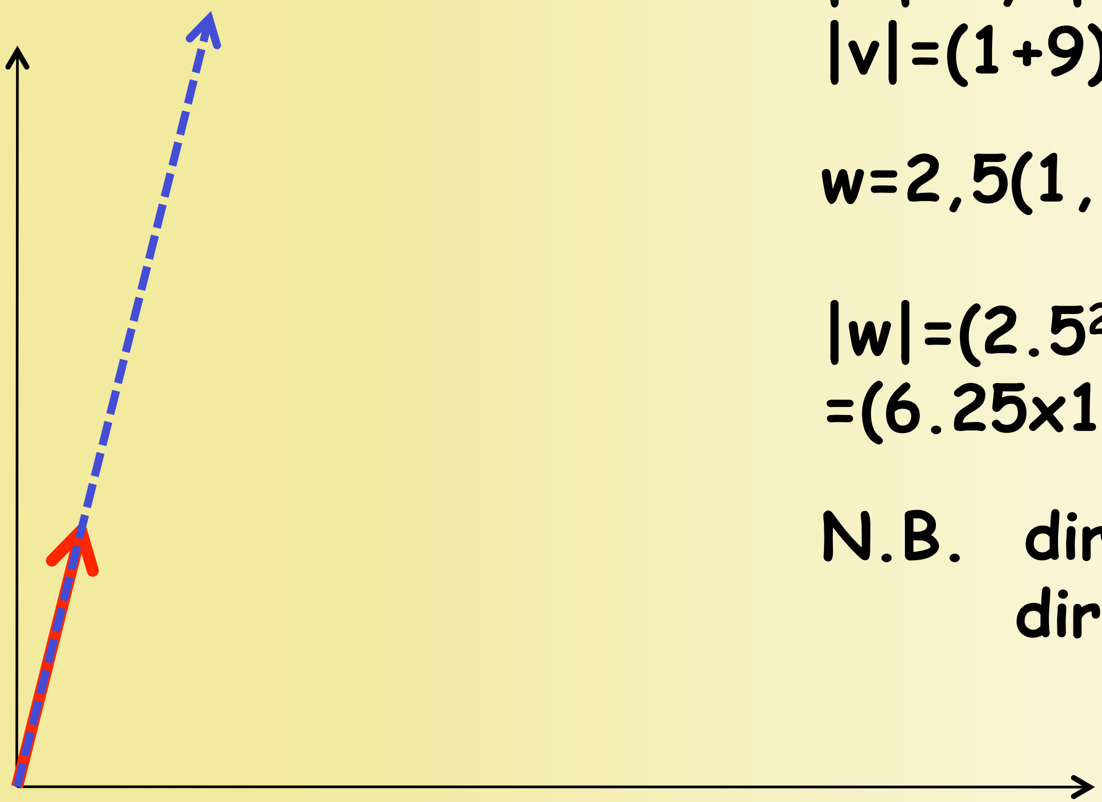
$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow v' = c\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca \\ cb \end{pmatrix}$$

ogni componente e' moltiplicata per c. Se

$c>1$ allungamento $\qquad$ $0<c<1$ accorciamento

$c<0$ cambio di verso

ES. Dato il vettore v=(1,3) quali sono le componenti del vettore w che ha lunghezza 2,5 volte v, stesso verso e stessa direzione di v?



$|w|=2,5|v|$

$|v|=(1+9)^{1/2}=(10)^{1/2}$

$w=2,5(1,3)=(2.5,\ 7.5)$

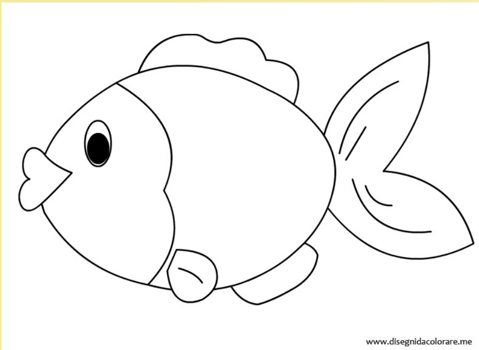
$|w|=(2.5^2+7.5^2)^{1/2}=(62.5)^{1/2}$

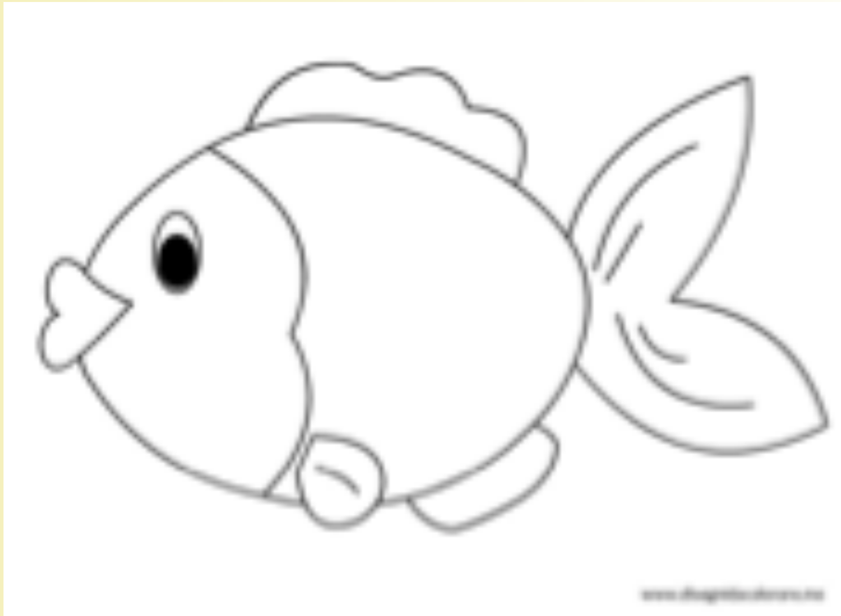
$=(6.25\times 10)^{1/2}=2.5(10)^{1/2}$

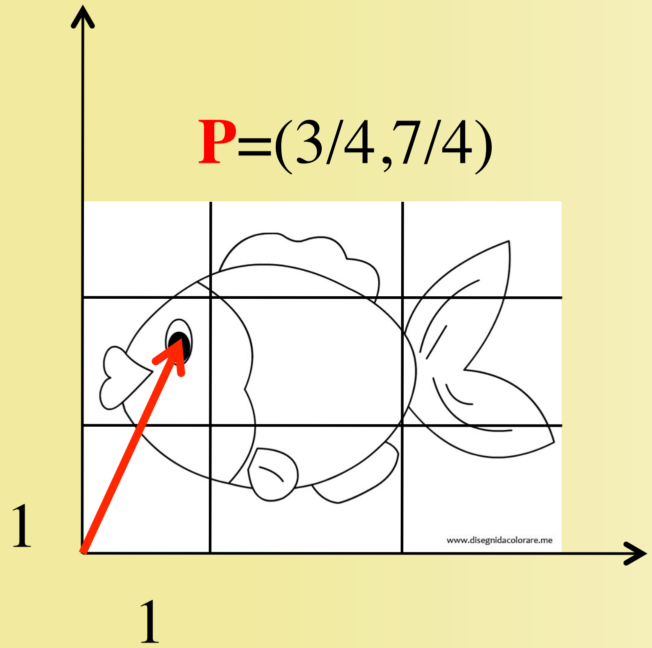
N.B. direz $v=3$

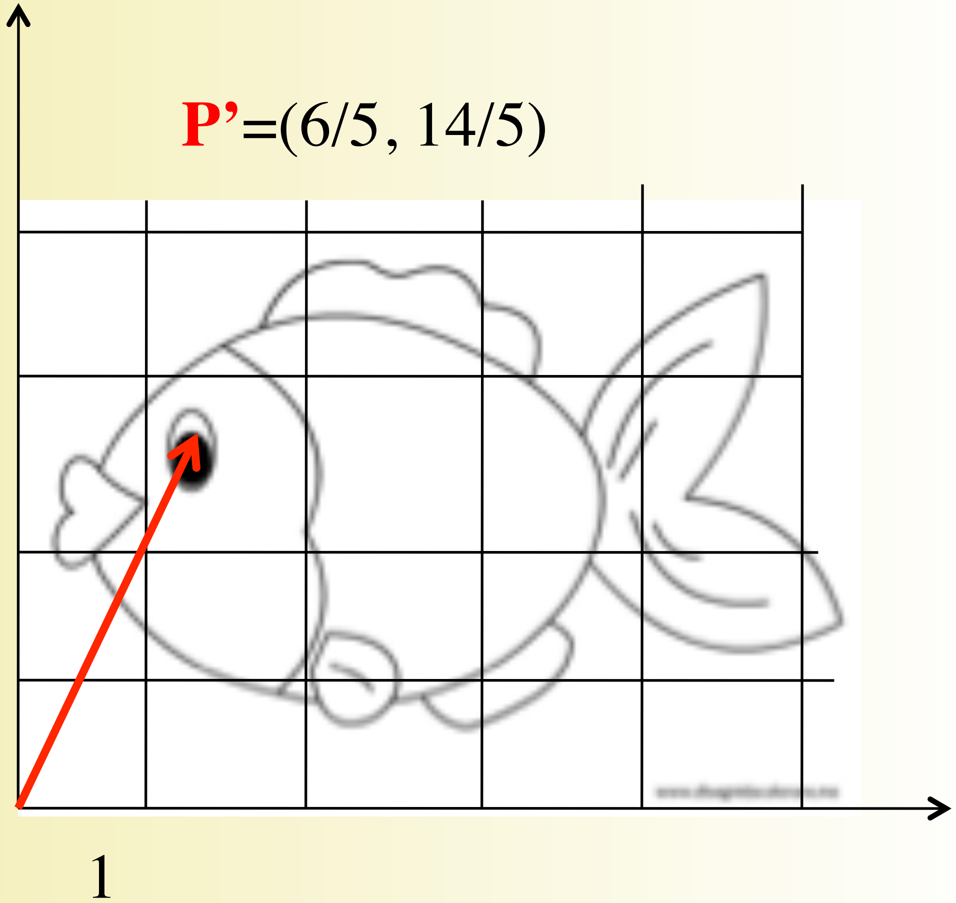
direz $w=7.5/2.5=3$

Ad esempio: se durante l’evoluzione il pesce a sinistra si dilata in quello a destra si può quantificare la dilatazione?









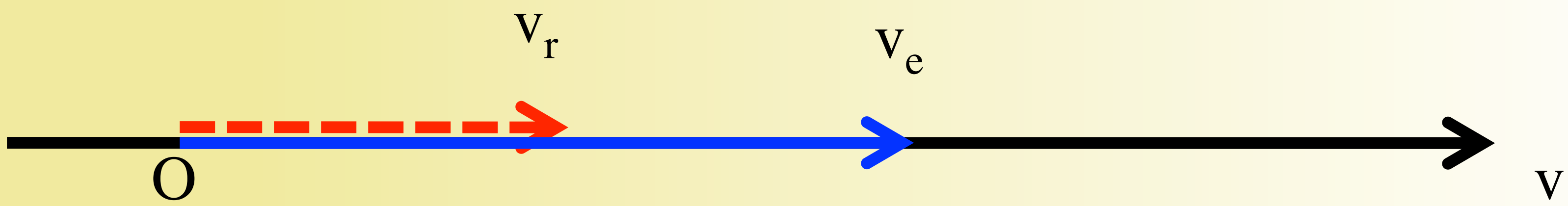
$v=(3/4,7/4)$, $|v|=(58)^{1/2}/4$
direzione di $v = 7/3$

$V'=(6/5,14/5)$, $|v'|\approx 1.6|v|$
direzione di $v = 14/6=7/3$

I vettori in fisica

Andate in barca su un fiume, remando. Avanzate alla velocità di 20metri al minuto. La corrente favorevole raddoppia la vostra velocità. Modellizzare matematicamente questa situazione e dire dopo quanto tempo occorre per percorrere un chilometro.

v_r è la velocità della barca dovuta alla remata.
Si ha $|v_r|$=20m/min.
La velocità effettiva di avanzamento della barca sia v_e.
Si ha $|v_e|=2|v_r|$=40m/min



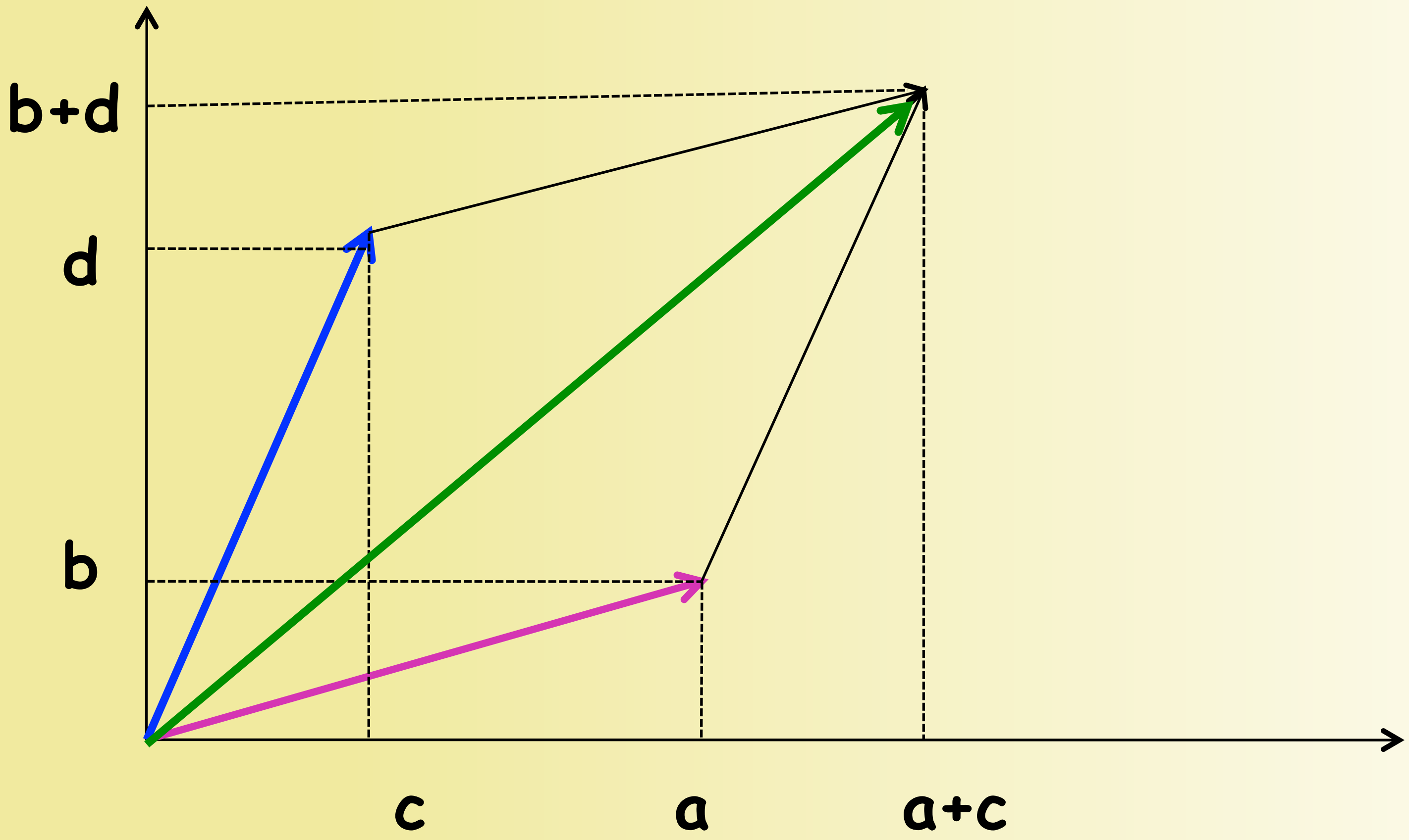
$v_r=(v,0)$ $|v_r|=v=15$ $v_r=(15,0)$

$v_e=(v',0)$ $|v_e|=v'=2v=30$ $v_e=(30,0)$

Se si percorrono 40 metri in un minuto, visto che 1 chilometro corrisponde a 1000 metri, occorrono 1000/40 = 25 minuti per percorrere 1Km.

Due (o piu') vettori si possono <u>sommare</u> tra loro

$v=(a,b)$ $w=(c,d)$ $\longrightarrow$ $u=v+w=(a+c,\ b+d)$



Le operazioni di moltiplicazione per uno scalare e somma di vettori si possono fare insieme:

$v=(a,b) \quad kv=(ka,kb) \quad k \in R$
$w=(c,d) \quad jw=(jc,jd) \quad j \in R$

$U=kv+jw=(ka+jc,\ kb+jd)$

U si chiama "**combinazione lineare di v e w con coefficienti k e j**"

In modo equivalente scriviamo

kv = $\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$ jw = $\begin{pmatrix} jc \\ jd \end{pmatrix}$

U = kv + jw = $\begin{pmatrix} ka \\ kb \end{pmatrix}$ **+** $\begin{pmatrix} jc \\ jd \end{pmatrix}$ **=** $\begin{pmatrix} ka + jc \\ kb + jd \end{pmatrix}$

Che direzione ha U? che verso? e che modulo?

Direzione di $U=(ka+jc, kb+jd)$:

$$m_U = \frac{kb+jd}{ka+jc}$$

Verso di U (dipende da k e j)

Modulo di U:

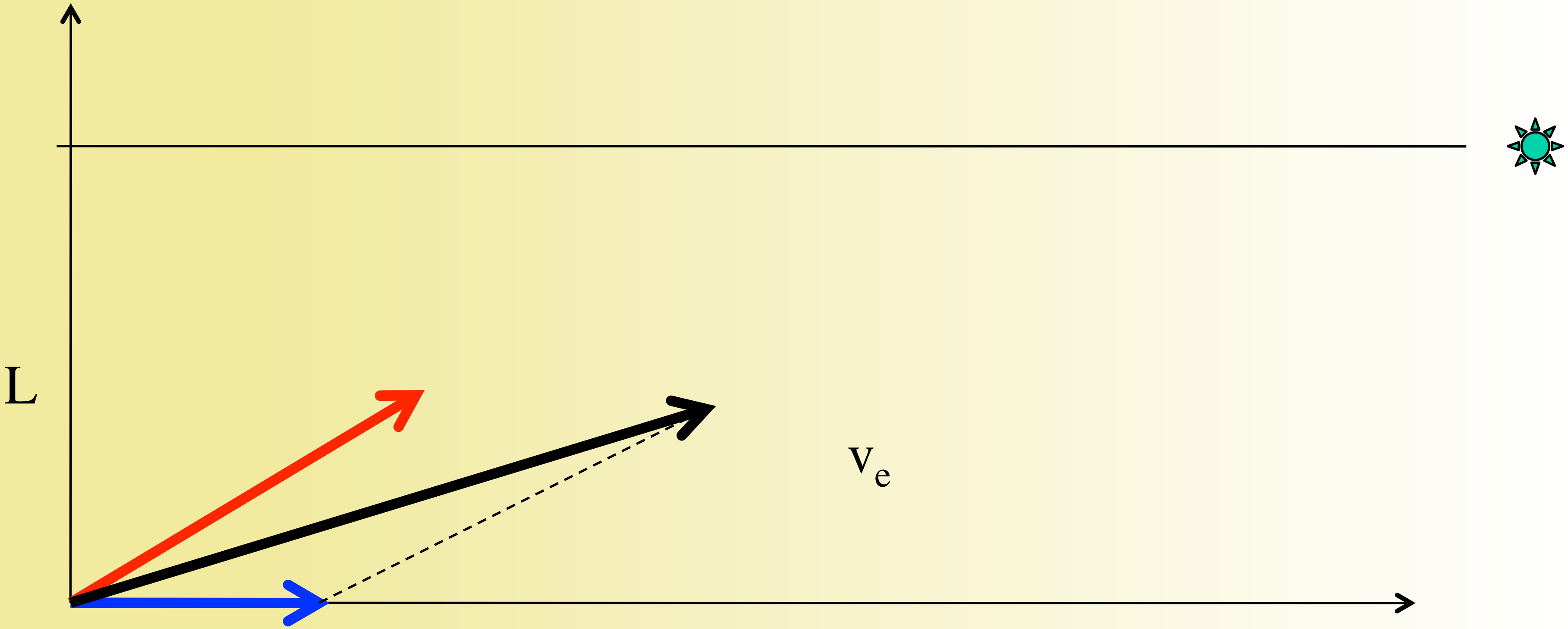
$$|U| = [(ka+jc)^2+(kb+jd)^2]^{1/2}$$

Sono cambiati modulo, direzione e verso

I vettori in fisica

Andate in barca su un fiume, remando. Avanzate alla velocità di 20metri al minuto e volete raggiungere un punto sulla riva opposta del fiume. La corrente, favorevole, ha la velocità di 10m/min. Modellizzare matematicamente questa situazione

v_r è la velocità della barca dovuta alla remata.
Si ha $|v_r|$=20m/min.
La velocità della corrente è $|v_c|$=10m/min
La velocità effettiva di avanzamento della barca sia v_e.



$v_e = v_r + v_c,$ $v_r = (v, v)$ $v_c = (v', 0) = (10, 0)$

$|v_r| = (2v^2)^{1/2} = v(2)^{1/2} = 20$ $v = 20/(2)^{1/2} \approx 14,3 m/min$

$v_e = v_r + v_c \approx (14,3+10, 14,3)$ $|v_e| \approx [(24,3)^2 + (14,3)^2]^{1/2}$

Il prodotto scalare tra due vettori

Scalare=numero: questo prodotto tra due vettori dà come risultato <u>un numero</u>

$v=(a,b) \qquad u=(c.d)$

Definizione: $\boxed{v \bullet u = ac+bd = k \in R}$

Es. $v=(1,4) \quad u=(-2,0) \qquad v \bullet u = 1(-2) + 4(0) = -2$

In modo equivalente il prodotto scalare si scrive

v= $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ u = $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$$\mathbf{v} \bullet \mathbf{u} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = ac + bd$$

<u>Primo</u> elemento della prima riga per <u>primo</u> elemento della colonna +
<u>secondo</u> elemento della prima riga per <u>secondo</u> elemento della colonna:

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

Il prodotto scalare tra due vettori è uguale a zero se i due vettori sono tra loro perpendicolari (ortogonali). Infatti

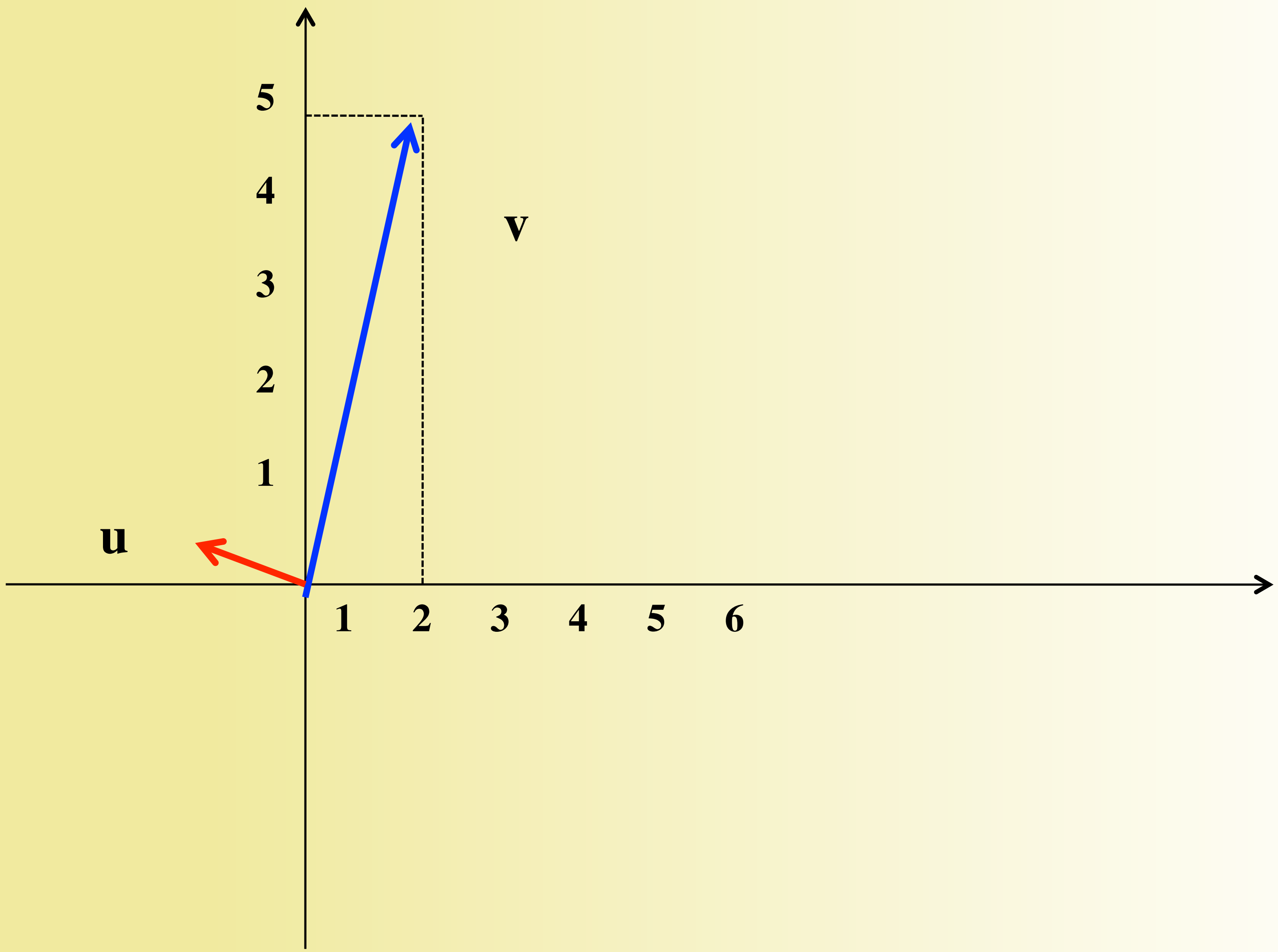
$v \bullet u = |u||v| \cos\alpha$ e $\cos\alpha = 0$ se $\alpha = 90°(=\pi/2)$

Es. $v=(2,5)$ $u=(x,2+x)$.

Per quale $x \in R$ v è perpendicolare a u?

Deve essere $v \bullet u = 0 = 2x + 10 + 5x = 7x + 10$

Quindi $x=-10/7$ $u = (-10/7,\ 2-10/7)=$
$= (-10/7,\ 4/7)$



5
4
v
3
2
1
u
1
2
3
4
5
6

Dati i vettori $v=(a,b)=(1,-1)$ e $u=(c,d)=(2,1)$, quanto vale il coseno dell'angolo compreso tra v e u?

$$v \bullet u = |u||v| \cos\alpha = ac+bd$$

In questo caso:

$|v|=(2)^{1/2}$ $|u|=(5)^{1/2}$ $ac+bd = 2 + (-1)=1$

$\cos\alpha = 1/[(2)^{1/2}(5)^{1/2}]$

Il prodotto scalare permette una misura della "divaricazione" (distanza) tra i vettori

Per valutare la “distanza genetica” tra popolazioni si misura la percentuale di portatori dei gruppi sanguigni in una popolazione

	A	B	O	AB
FRANCESI (F)	0.28	0.07	0.55	0.10
INGLESI (I)	0.26	0.08	0.52	0.14
Neri Americani (N)	0.27	0.20	0.46	0.07

Per calcolare la distanza "genetica" si considerano i punti di coordinate

F= (0.28, 0.07, 0.55, 0.10)
I= (0.26, 0.08, 0.52, 0.14)
N= (0.27,0.20, 0.46 ,0.07)

e si calcola la distanza euclidea con il teorema di Pitagora

Ad es: |IF|=

$$\sqrt{(0.26-0.28)^2+(0.08-0.07)^2+(0.66-0.65)^2+(0.10-0.14)^2}$$
$$\approx 0.12$$

Un'altra misura della distanza genetica e' calcolata con l'aiuto del **prodotto scalare** tra i due vettori

Ad es: $F = (0.28,\ 0.07,\ 0.55,\ 0.10)$
$I = (0.26,\ 0.08,\ 0.52,\ 0.14)$

$$F \bullet I = |F||I| \cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = F \bullet I / |F||I|$$

$$F \bullet I = 0.28 \times 0.26 + 0.07 \times 0.08 + 0.55 \times 0.52 + 0.10 \times 0.14 \approx 0.37$$

$$|F| \approx 0.63 \quad |I| \approx 0.6 \quad \rightarrow \quad \cos\alpha \approx 0.97$$

$$\alpha \approx 14°$$

ANCHE LE CELLULE SI MUOVONO . . .

Il moto delle cellule si chiama

"CHEMIOTASSI"

dal greco

"χημεία, chemeia = chimica
τάξις, taxis = schieramento",

La chemiotassi descrive il modo in cui i corpi cellulari, batteri ed altri organismi uni- o multi-cellulari si muovono. Le direzioni prescelte sono quelle da cui provengono gli stimoli chimici.
Come si genera il movimento?

Per muoversi la cellula deve

1) produrre una classe di proteine altamente specializzate per la conversione di energia chimica in lavoro meccanico

2) aver sviluppato opportuni sistemi di recezione per il riconoscimento di sostanze nocive o vantaggiose nell'ambiente (essenziale per gli organismi unicellulari fin dai loro primi stadi di sviluppo)

3) aver sviluppato opportuni organi che permettono il movimento

Tipici “motori” molecolari sono le proteine **chinesina, miosina e dineina** che hanno un'efficienza del 50% e permettono alla cellula di percorrere in un secondo una distanza che è cento volte la propria lunghezza (la velocità è paragonabile a quella di un jet militare).

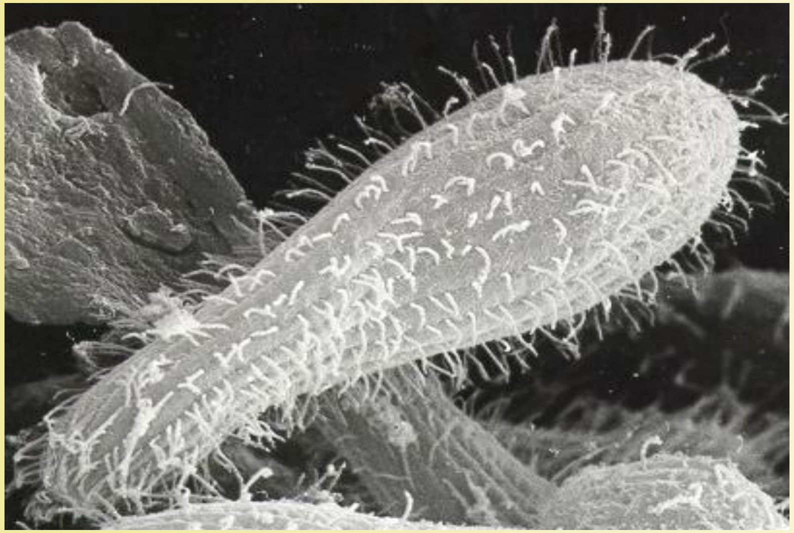
Producono più potenza per unità di massa del motore di un'automobile di Formula 1.

Quali organi permettono il movimento? Consideriamo il caso di organismi unicellulari, i batteri

I CILIATI E I FLAGELLATI

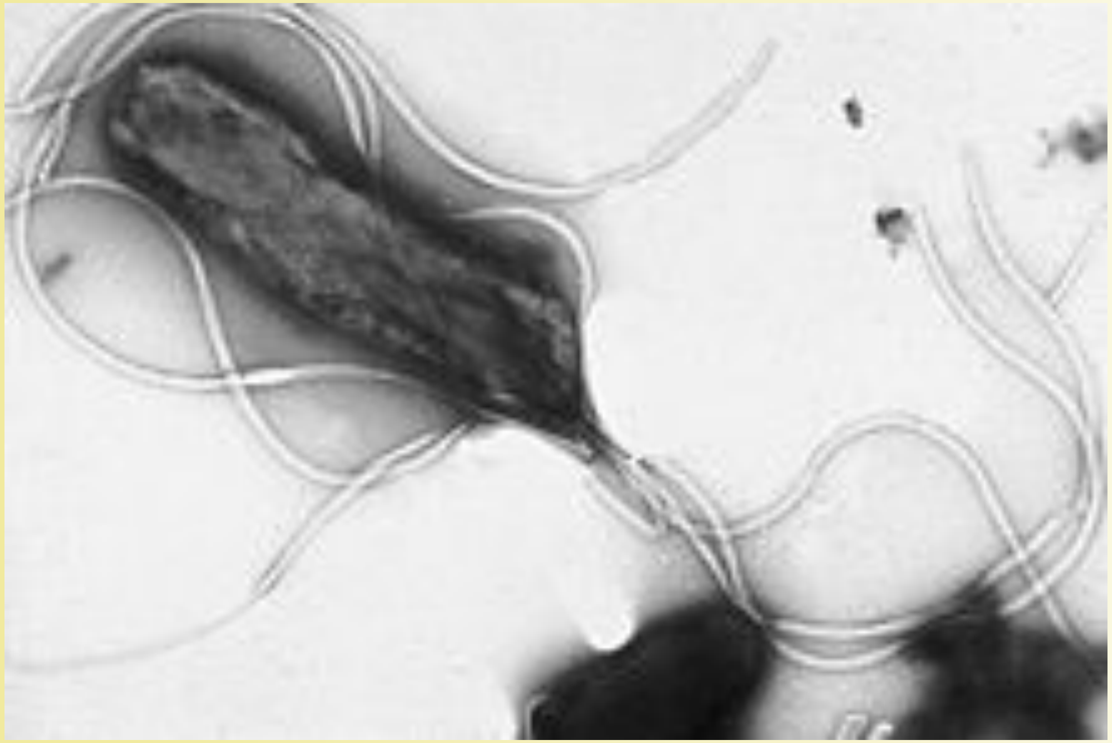
Il protozoo eucariote Tetrahymena pyriformis,
un antichissimo organismo riconosce le sostanze
nutritive e si muove verso di esse utilizzando le "ciglia".

Il T. pyriformis è infatti classificato come un "ciliato"



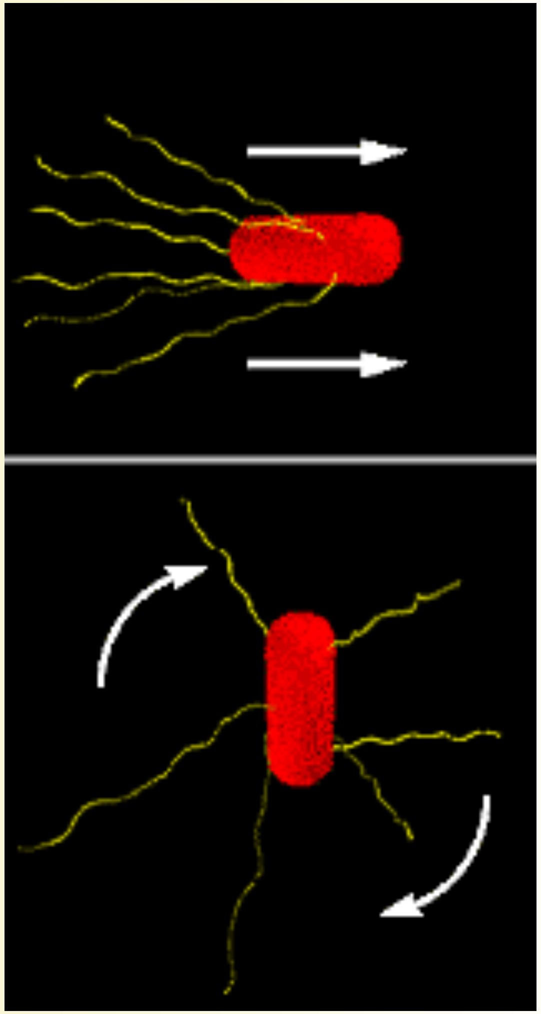
Alcuni batteri come **Escherichia coli**, hanno numerosi flagelli per cellula (tipicamente 4-10). I flagelli permettono la chemiotassi di questo batterio, molto diffuso nell'organismo umano ed usato molto come "organismo modello" in biologia.

Helicobacter pylori vaga nello stomaco umano grazie ai suoi 4/6 flagelli poi si fissa negli strati ricchi di muco.
E' l'agente responsabile della gastrite cronica

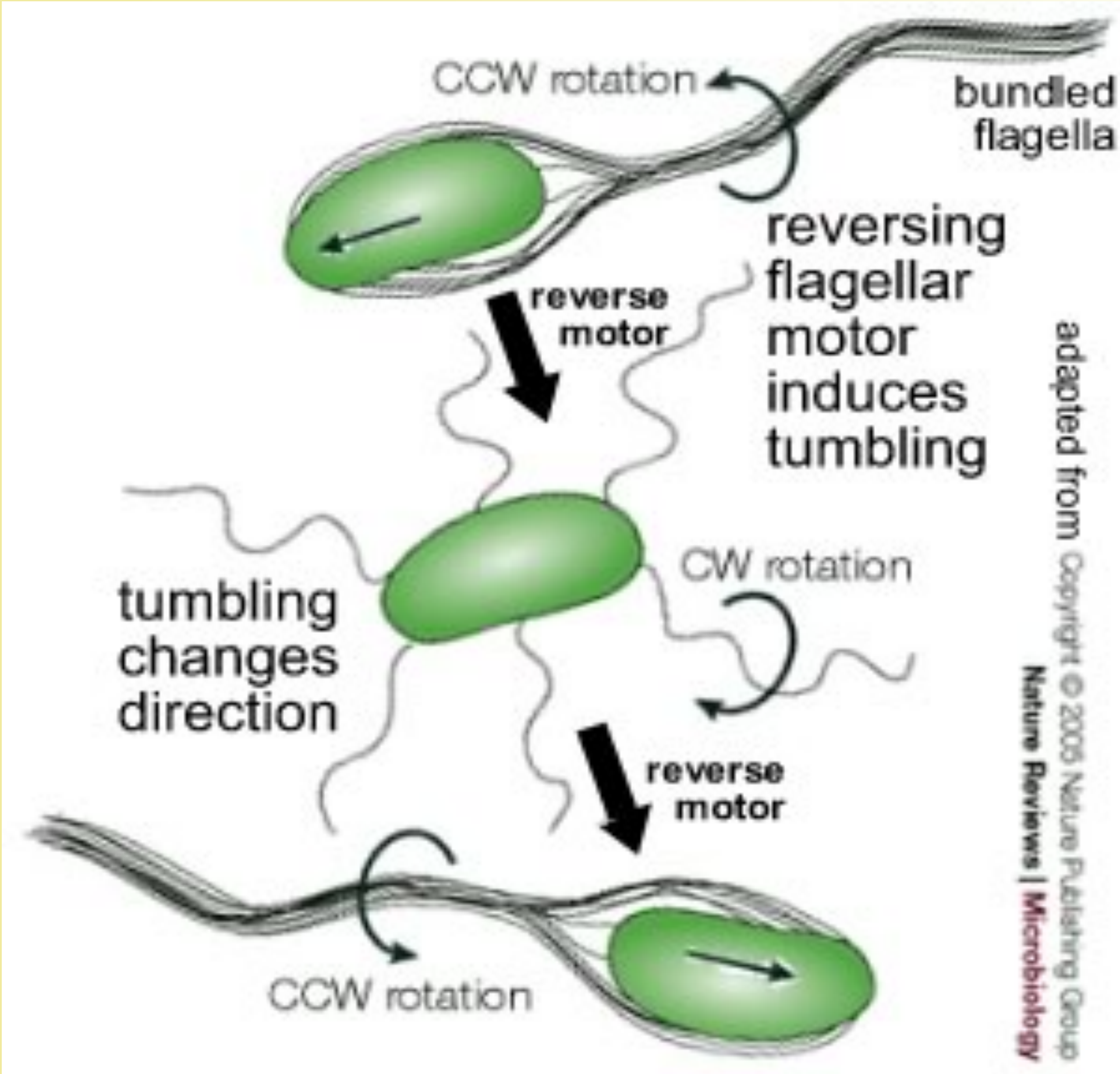


Il flagelli permettono ai batteri di spostarsi: come si realizza questo movimento?

Per avanzare i flagelli vengono ruotati in senso antiorario. Quando la rotazione si inverte in senso orario il batterio fa una "piroetta" poi riprende a nuotare in un'altra direzione.



L'avanzamento verso una direzione si ha quando il batterio è attratto da una sostanza nutriente (chemioattrattore), il cambio di direzione indica che il batterio si allontana da una sostanza nociva (chemiorepulsore)


CCW rotation
bundled flagella
reversing flagellar motor induces tumbling
reverse motor
tumbling changes direction
CW rotation
reverse motor
CCW rotation
adapted from Copyright © 2005 Nature Publishing Group
Nature Reviews | Microbiology

In presenza di una diversa concentrazione di sostanze (gradiente chimico) i batteri si dirigono verso il punto di massima concentrazione. Se il batterio "sente" che si sta muovendo nella direzione giusta (verso l'attrattore / via dal repulsore), continua a "nuotare" nella stessa direzione per un tempo più lungo prima di fare "una piroetta". Se si sta muovendo nella direzione sbagliata, cercherà subito una nuova direzione a caso.

In altre parole, molti batteri (come E. coli) sembrano in grado di "prendere decisioni", in realtà è solo la chimica che guida questi movimenti

PER DESCRIVERE IN QUALE DIREZIONE, CON QUALE RAPIDITA' AVVENGA IL MOVIMENTO SI USANO I VETTORI

DESCRIVERE

LE FORME CHE CAMBIANO

NEL TEMPO

Gli organismi viventi, riproducendosi generazione dopo generazione modificano gradualmente le loro caratteristiche. Se, nell'ambiente in cui gli organismi vivono le nuove caratteristiche sono migliori, i discendenti si diffonderanno; altrimenti sono destinati a scomparire.
Questo cambiamento, molto lento nel tempo, delle caratteristiche è chiamato evoluzione.

Nell'evoluzione cambia il patrimonio genetico e cambiano le funzioni di regolazione dei geni, di conseguenza, varia la forma degli organismi. Ma le forme che sopravvivono sono anche il risultato dell'interazione degli organismi con l'ambiente.
Capire come e perché variano le forme è quindi comprenderne l'evoluzione.

ESEMPIO : i pesci ascia

dallo STERNOPTYX. . .

. . . all'ARGYROPELECUS

Pesci delle grandi profondita' (900/1500metri)
La loro forma e' molto simile, sebbene **Sternoptyx** sia molto piu' antico (forme fossili di 30 milioni di anni) e sopravviva oggi in sole 4 specie.
Argyroplecus è presente sia nell'Oceano Atlantico che nel Mediterraneo in 7 specie.
Si ipotizza che Argyroplecus sia una "trasformazione" (evoluzione) di Sternoptyx.

SI PUO' DESCRIVERE

GEOMETRICAMENTE QUESTO PROCESSO

DI TRASFORMAZIONE ?

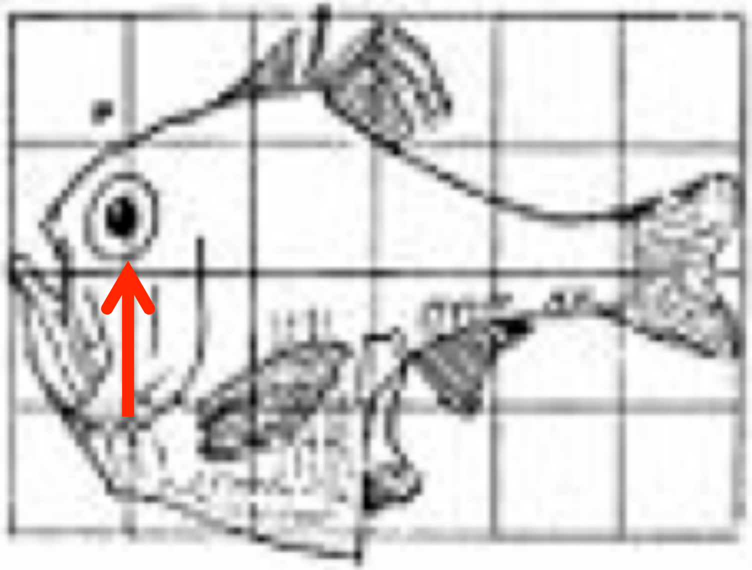


Fig. 517. *Argyropelecus Olfersi.*

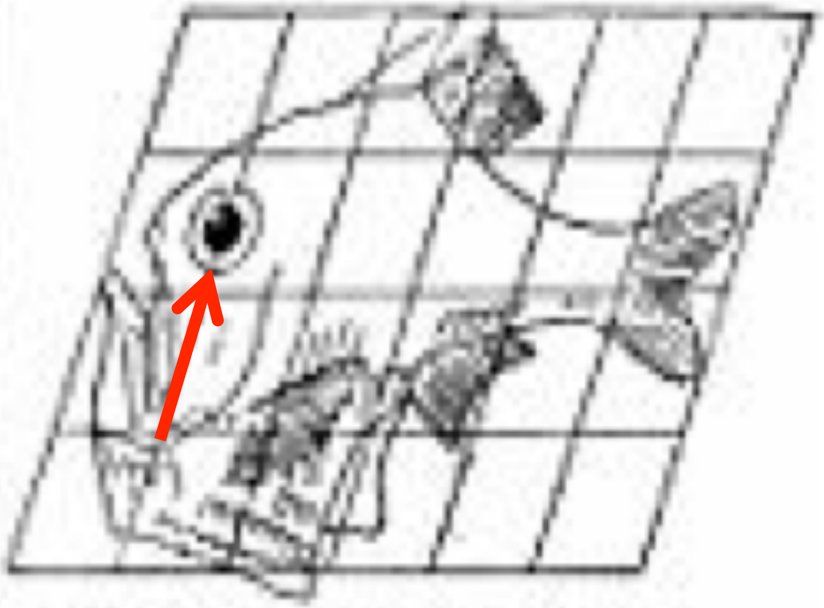
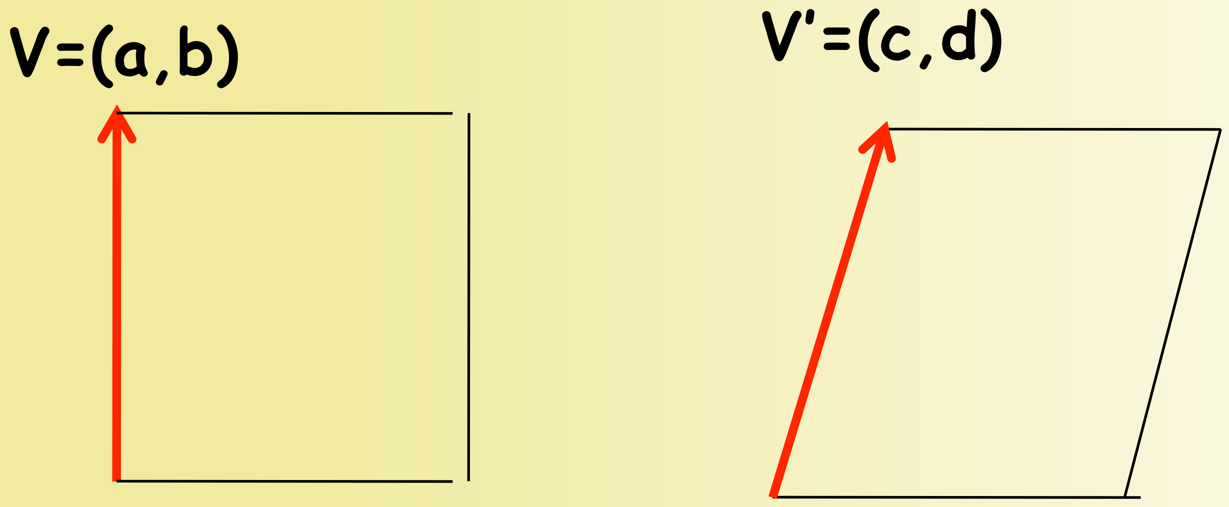


Fig. 518. *Sternoptyx diaphana.*

Nelle “deformazioni” un vettore può cambiare direzione e modulo

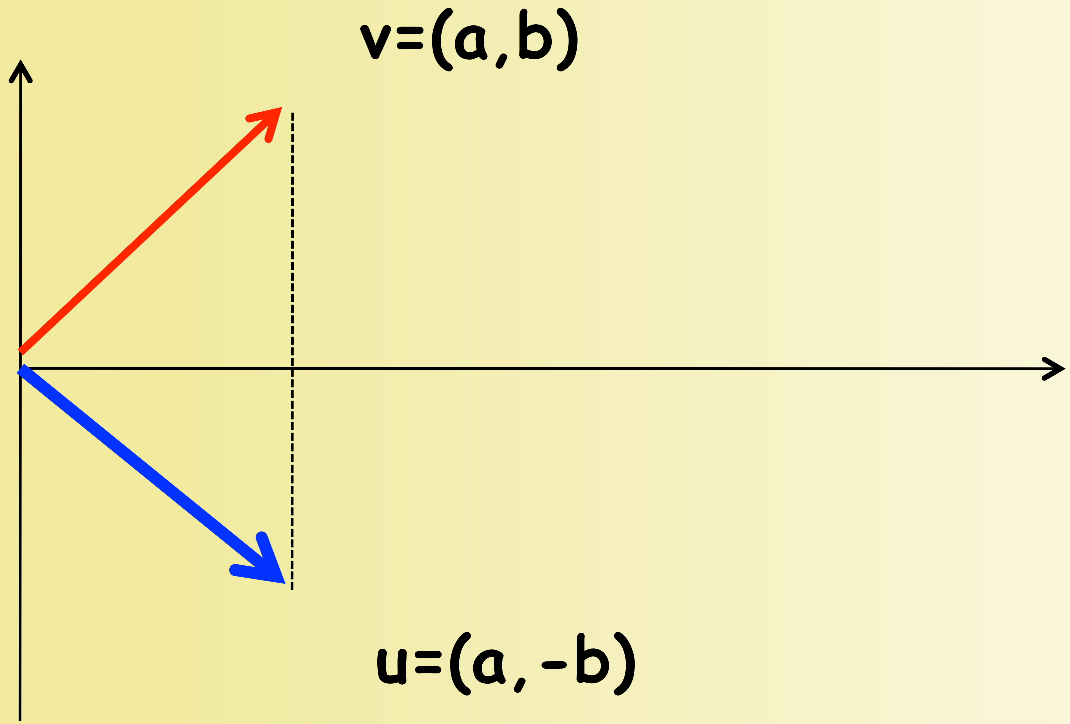


Con quali operazioni un vettore cambia direzione e modulo?

- Per cambiare il modulo di un vettore si moltiplica per uno scalare

- Per cambiarne la direzione si deve operare su ogni componente con il prodotto scalare, cioè si deve moltiplicare il vettore per una matrice

Ad es. simmetria rispetto all'asse orizzontale

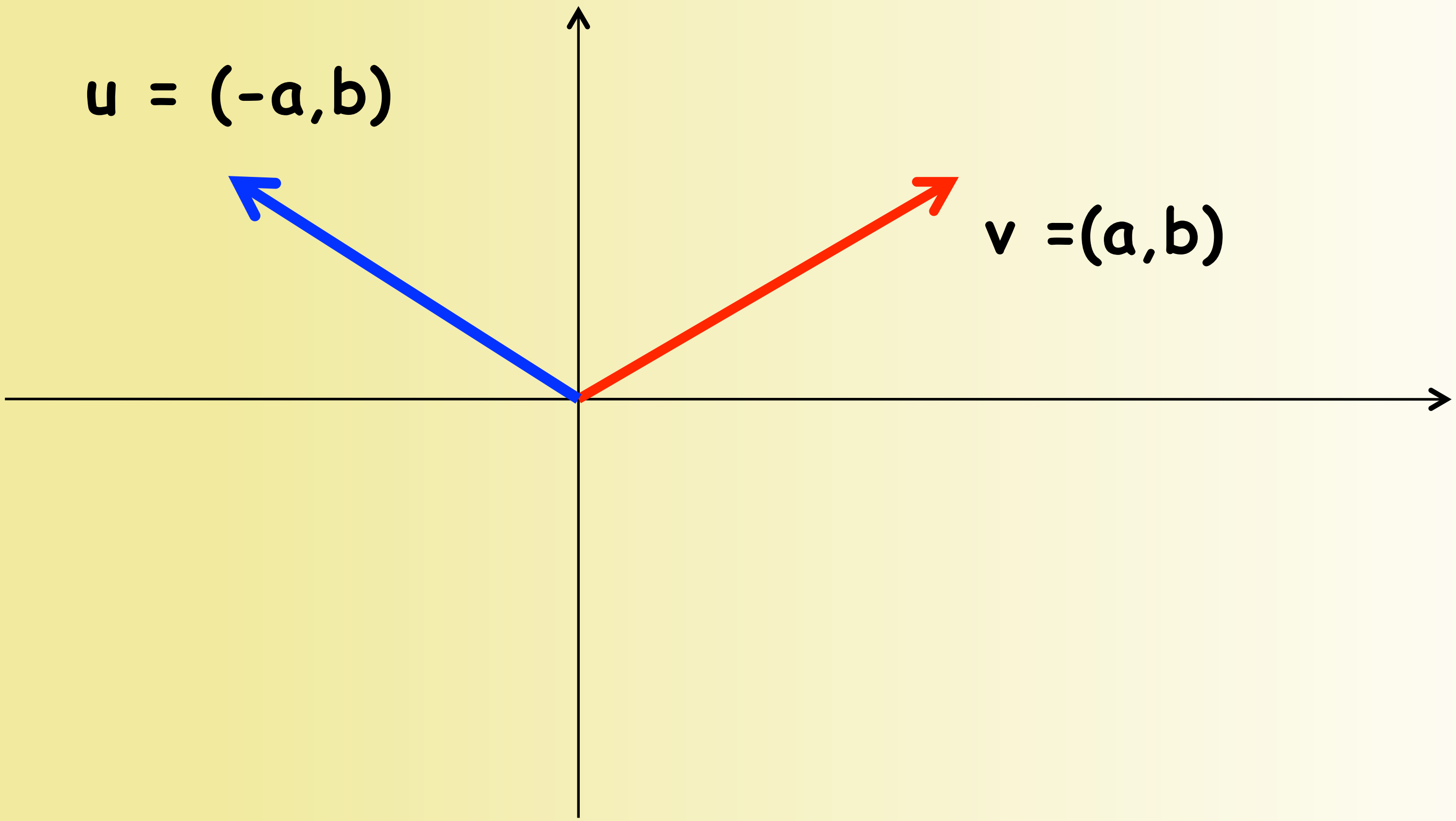


$$v=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \longrightarrow u=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+0b\\0+(-b)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\-b\end{pmatrix}$$

direzione di v: b/a, $|v|=(a^2+b^2)^{1/2}$, verso I quadrante

direzione di u: -b/a $|u|=[a^2+(-b^2)]^{1/2}$,
verso IV quadrante

Es. simmetria rispetto all'asse verticale

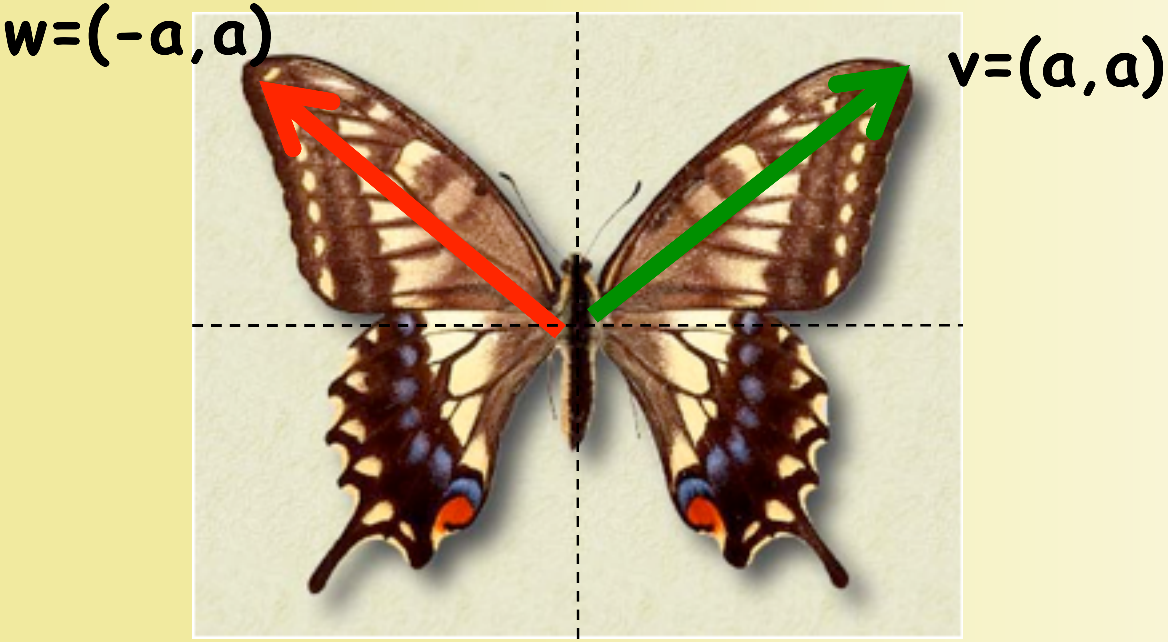


$$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \longrightarrow u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a + 0b \\ 0 + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$$

direzione di v: b/a, $|v|=(a^2+b^2)^{1/2}$, verso I quadrante

direzione di u: -b/a, $|u|=[(-a)^2+b^2]^{1/2}$,
verso II quadrante

FORME SIMMETRICHE



$$v = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)(a) \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix}$$

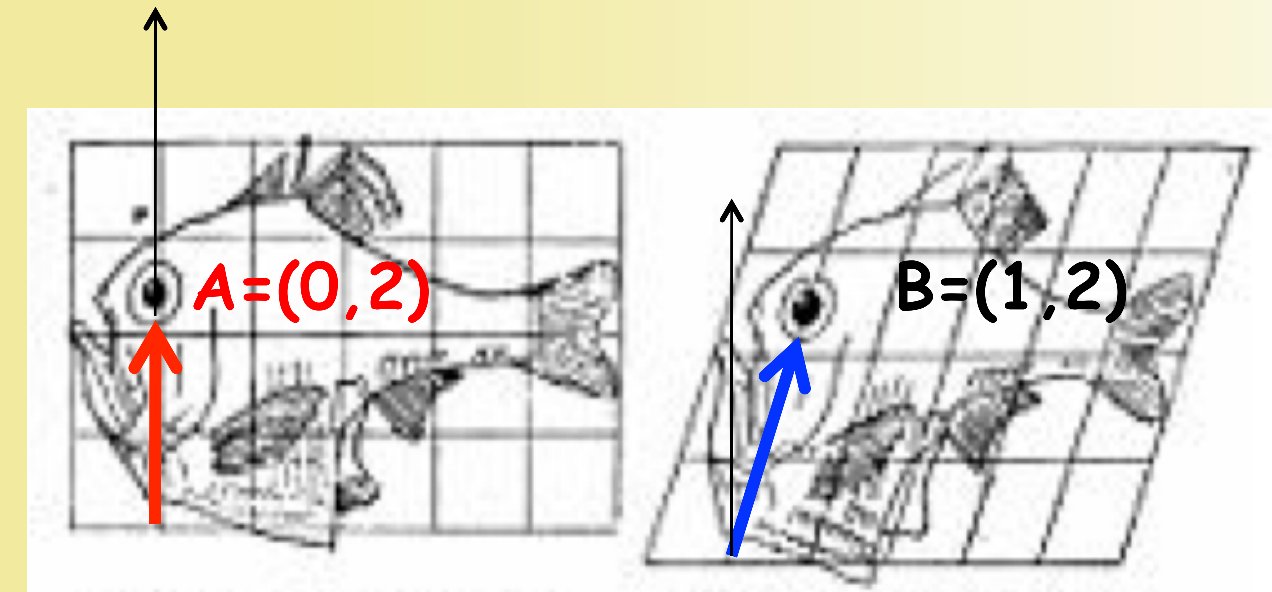


Fig. 517. *Argyropelecus Olfersi.* Fig. 518. *Sternoptyx diaphana.*

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + (1/2)2 \\ 0 + 2 \end{pmatrix}$$

direzione di v: verticale, |v|=2, verso I quadrante

direzione di u: 2, |u|=$[5]^{1/2}$, verso I quadrante