Esercizi di CALCOLO e BIOSTATISTICA (Vettori e matrici)

ESERCIZIO 1. Dati i vettori $\mathbf{v_1} = (3,3)$, $\mathbf{v_2} = (-1, 1/2)$ e $\mathbf{v_3} = (0,2)$
a) per quale valore di $c > 0$ il vettore cv_1 ha modulo uguale a quello di v_2?
b) Trovare il vettore combinazione lineare $\mathbf{w} = -\mathbf{v_1} - k\mathbf{v_2} + 2k\mathbf{v_3}$ con $k \in \mathbf{R}$, e dire, motivando la risposta, se esistono valori di k per i quali $\mathbf{w}$ é perpendicolare a $\mathbf{v_1}$.
c) Trovare, se esistono, i valori di k per i quali il vettore $\mathbf{v_1} - k\mathbf{v_2}$ ha la stessa direzione del vettore $2\mathbf{v_3}$.

ESERCIZIO 2. Scrivere l'equazione della retta che passa per il punto $P_0 = (1,2)$ ed è perpendicolare al vettore $v = (1,2)$. Dopo aver trovato le coordinate del punto I di intersezione della retta con l'asse y, scrivere le coordinate del punto estremo del vettore w che è applicato in I, ha la stessa direzione della retta, lo stesso modulo di v e appartiene al primo quadrante.

ESERCIZIO 3. Dati il vettore $v = (1,2)$ e la matrice A nella forma:

$$A = \begin{pmatrix} k & -1 \\ 1 & -4k \end{pmatrix}$$

Scrivere esplicitamente il prodotto $A \cdot w = v$, con $w = (x,y)$. Esistono valori di k per i quali il problema **non** si puó risolvere? (Motivare la risposta)
Trovare almeno un vettore w perpendicolare a v ed avente modulo 1.

ESERCIZIO 4. Calcolare il determinante delle matrici seguenti

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1/3 & 2/9 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nel caso in cui il determinante dovesse essere zero, individuare quali vettori colonna hanno la stessa direzione.
Trovare la matrice $A^* = A \times B$ e verificare che, se $v = (2, -1)$, si ha $A^* \times v = A \times (B \times v)$. Infine, dopo aver verificato che $A \times B \neq B \times A$ provare che $A^* \times v \neq B \times (A \times v)$.

ESERCIZIO 5. Dato il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} -x/2 - y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$$

dire per quale matrice A dei coefficienti, per quale vettore w, termine noto, il sistema si scrive nella forma $A \cdot v = w$, dove $v = (x,y)$ é il vettore incognito.
Senza risolvere il sistema, si puó dire, **motivando la risposta**, se ammette una, nessuna o infinite soluzioni? Verificare la risposta risolvendo il sistema.

ESERCIZIO 6. Una popolazione P di animali viene divisa in "giovani" G e "adulti" A e, per studiarne quantitativamente l'evoluzione, si rappresenta la popolazione come il vettore $P = (G, A)$. Quando si inizia lo studio, si ha $P_0 = (50,50)$, poi si osserva sperimentalmente che dopo il tempo T risulta $P_T = (G_T, A_T) = (35, 45)$.
Si ripete l'esperimento nelle stesse condizioni e se inizialmente é $P_0 = (60, 200)$, dopo il tempo T risulta $P_T = (140, 54)$. Scrivere in forma di percentuali gli elementi della matrice E per la quale risulta $E \cdot P_0 = P_T$ (E é la matrice di sviluppo della popolazione).
Spiegare a parole sia il significato concreto dell'operazione $E \cdot P_0 = P_T$, sia quello dei valori degli elementi della matrice E.

ESERCIZIO 7. Dopo aver scritto nella forma $A \cdot v = w$ il sistema

$$\begin{cases} -kx/3 + y = 1 \\ -x + 3ky = 3 \end{cases}$$

dire, motivando la risposta, se esistono valori di k per i quali il sistema non ha soluzioni oppure ha infinite soluzioni.

ESERCIZIO 8. Un osso di un animale attuale e' schematizzabile con il vettore $v = (1, 4/5)$. In un reperto paleontologico lo stesso osso e' schematizzabile con il vettore $V = (3/2, 2/3)$. Se A rappresenta la matrice di trasformazione dalla forma v in V, quale matrice A^{-1} rappresenta la trasformazione inversa dalla forma V in v?

ESERCIZIO 9. Sono assegnati i vettori del piano $\mathbf{u} = (2, 6)$, $\mathbf{v} = (1, a)$, $\mathbf{w} = (2b, b)$, dove a, b sono parametri reali.

i) Trovare (se esistono) a e b tali che $\mathbf{w} + 3\mathbf{v} = a\mathbf{u}$.

ii) Dato il vettore $\mathbf{v} = (1, a)$ e il punto P di coordinate $(1, \frac{1}{a})$, scrivere l'equazione della retta ortogonale a $\mathbf{v}$ e passante per il punto P.

iii) Dati i vettori $\mathbf{u} = (2, 6)$ e $\mathbf{v} = (1, a)$ trovare (se esiste) un valore di a tale che il vettore $\mathbf{u}/2 + \mathbf{v}$ sia parallelo a $\mathbf{w} = (4, 8)$.

ESERCIZIO 10. Dati i vettori $\mathbf{u} = (4, -3)$ e $\mathbf{v} = (5, 12)$ trovare il coseno dell'angolo compreso tra i due vettori.