Cognome e nome .... **N. matricola** ....
Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 29–30 settembre ◯ 5–7 ottobre.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^2 + 2xy - y^3.$$

a) Determinare e classificare i punti critici di f.
b) Determinare il massimo e il minimo assoluti di f nel triangolo chiuso di vertici $(0, 0)$, $(0, -6)$ e $(6, 0)$.

---

2. Sia

$$D = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 + z^2 \leq 4, \ y \geq 0, \ z \geq \sqrt{3} \left(\frac{2}{y} - 1 \right) \right\}.$$

Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando D intorno all'asse z.

---

3. Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che il lavoro del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{(x^3 - 2y^2)^2} (\alpha(x^3 + y^2), 4xy), \quad (x^3 > 2y^2)$$

per spostare un punto materiale dal punto $(1, 0)$ al punto $(3, 1)$ non dipenda dal percorso seguito. Per questi valori di α, calcolare tale lavoro.

---

4. Mostrare che, per ogni $y \in \mathbb{R}$, l'equazione

$$\operatorname{arctg}(1 + x - y) + x^5 + 2xy^2 + y = 1$$

individua una unica $x = \varphi(y)$. Trovare il polinomio di Taylor del secondo ordine di φ con punto iniziale $y_0 = 1$.

---

5. Determinare l'unica soluzione del seguente problema di Cauchy, determinandone anche l'intervallo massimale di esistenza:

$$\begin{cases} y''(x) = -y'(x) - \dfrac{2x}{y'(x)} \\ y(0) = 0, \ y'(0) = -1. \end{cases}$$

Punteggi: 7 punti ad esercizio. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 15 punti. Valgono anche punteggi parziali.

Cognome e nome .... **N. matricola** ....
Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 29–30 settembre ◯ 5–7 ottobre.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = y^2 + 2xy - x^3.$$

a) Determinare e classificare i punti critici di f.
b) Determinare il massimo e il minimo assoluti di f nel triangolo chiuso di vertici $(0, 0)$, $(0, 6)$ e $(-6, 0)$.

---

2. Sia

$$D = \left\{ (y, z) \in \mathbb{R}^2 : \; y^2 + z^2 \leq 9, \; y \geq 0, \; z \geq \sqrt{2} \left(\frac{3}{y} - 1 \right) \right\}.$$

Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando D intorno all'asse z.

---

3. Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che il lavoro del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{(y^3 - 2x^2)^2}(4xy, \alpha(x^2 + y^3)), \quad (y^3 > 2x^2)$$

per spostare un punto materiale dal punto $(0, 1)$ al punto $(1, 3)$ non dipenda dal percorso seguito. Per questi valori di α, calcolare tale lavoro.

---

4. Mostrare che, per ogni $x \in \mathbb{R}$, l'equazione

$$y^5 + 2x^2 y + \operatorname{arctg}(1 - x + y) + x = 1$$

individua una unica $y = \varphi(x)$. Trovare il polinomio di Taylor del secondo ordine di φ con punto iniziale $x_0 = 1$.

---

5. Determinare l'unica soluzione del seguente problema di Cauchy, determinandone anche l'intervallo massimale di esistenza:

$$\begin{cases} y''(x) = -y'(x) - \dfrac{8x}{y'(x)} \\ y(0) = 0, \; y'(0) = -2. \end{cases}$$

Punteggi: 7 punti ad esercizio. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 15 punti. Valgono anche punteggi parziali.