Corso di Laurea in Biotecnologie Agro–Industriali
Prova scritta di Fisica - A.A. 2015-16 - July 2, 2016

(1) Un ghepardo può raggiungere una velocità di 104 km/h in 2.5 s e avvista una preda a 120 m di distanza. Supponendo che la sua accelerazione sia costante fino a quando raggiunge la massima velocità e che poi sia nulla, calcola quanto spazio gli occorre per arrivare alla massima velocità e quanto tempo impiega per raggiungere la preda che, per semplicità, supponiamo ferma durante l'attacco.

(2) Una massa m collegata a una molla di costante elastica k oscilla orizzontalmente secondo l'equazione $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$. Trova l'espressione dell'energia potenziale del sistema, della sua energia cinetica e della somma delle due. Ricava la relazione esistente tra ω, m e k sapendo che la somma delle due energie è costante.

(3) La membrana cellulare permette agli ioni di attraversarla attraverso appositi canali che funzionano come veri e propri conduttori di corrente. Un canale del potassio fa passare una corrente di 1.9 pA (pico–Ampère). Sapendo che la carica elettrica di un elettrone è pari a -1.6×10^{-19} C calcola quanti ioni K^+ passano in 1 ms.

SOLUZIONE

(1) Prima di procedere conviene scrivere i dati in unità SI: la velocità massima da raggiungere è $v = 104$ km/h che vale circa $v = 29$ m/s (per farlo basta osservare che 1 km= 1 000 m e 1 h= 3 600 s, perciò

$$1\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{1\,000\,\text{m}}{3\,600\,\text{s}}\,. \tag{1}$$

Il moto del ghepardo, come suggerisce il problema, si deve considerare come uniformemente accelerato. L'equazione del moto è quindi

$$x = \frac{1}{2}at^2 \tag{2}$$

considerato che parte da fermo (la sua velocità è nulla) e che possiamo scegliere un sistema di riferimento che ha l'origine nel punto iniziale. La velocità raggiunta dal ghepardo nella fase di accelerazione, dopo un tempo t, è invece

$$v = at \tag{3}$$

dove a rappresenta l'accelerazione dell'animale che quindi vale

$$a = \frac{v}{t} \tag{4}$$

se si considera costante fino a quando $v < v_{max}$. In particolare avremo che

$$a = \frac{29}{2.5} \simeq 12\,\text{ms}^{-2} \tag{5}$$

usando i valori dati. Conoscendo a si può calcolare lo spazio occorrente a raggiungere questa velocità per il quale occorreranno proprio 2.5 s, dunque

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}12 \times 2.5^2 = 37.5\,\text{m}\,. \tag{6}$$

Lo spazio necessario è decisamente inferiore alla distanza della preda. Da questa posizione in poi il ghepardo si muove a velocità costante e deve percorrere $120 - 37.5 = 82.5\,\text{m}$. Il suo moto è adesso descritto dalla legge

$$x = vt \tag{7}$$

prendendo come origine degli assi la posizione raggiunta nel momento in cui cessa di accelerare. Gli occorrono quindi

$$t = \frac{x}{v} = \frac{82.5}{29} = 2.8\,\text{s}\,. \tag{8}$$

In totale il predatore raggiunge l'obiettivo in $2.5 + 2.8 = 5.3$ s.

(2) L'energia potenziale è, per definizione, il lavoro fatto dalle forze conservative cambiato di segno. In questo caso agisce soltanto la forza elastica **F**, quindi avremo che

$$U = -\int_0^x \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} \tag{9}$$

dove **x** è lo spostamento della molla. Poiché lo spostamento è anti–parallelo alla forza il prodotto scalare si riduce al prodotto ordinario tra i moduli cambiato di segno e quindi

$$U = \int_0^x Fx\, dx = -\frac{k}{2}x^2 \,. \tag{10}$$

L'espressione di x ce la dà il problema e sostituendo:

$$U = \frac{k}{2}A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \,. \tag{11}$$

L'energia cinetica si trova come $K = \frac{1}{2}mv^2$ dove v è la velocità della massa. Non conosciamo l'espressione di questa, ma possiamo facilmente ricavarla da quella della posizione sapendo che la velocità è la derivata temporale di quest'ultima:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \phi) \tag{12}$$

(ricordate che la derivata del coseno è meno seno e che questa va moltiplicata per la derivata rispetto al tempo dell'argomento del coseno). A questo punto è immediato trovare che

$$K = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \,. \tag{13}$$

La somma dei due termini vale

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{k}{2}A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \,. \tag{14}$$

Affinché l'energia resti costante la somma non deve dipendere dal tempo e questo è possibile se i coefficienti davanti alle funzioni trigonometriche sono uguali. L'uguaglianza trigonometrica garantirebbe, in quel caso, l'indipendenza dal tempo. Quindi si deve avere

$$m\omega^2 = k \tag{15}$$

cioè

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \,. \tag{16}$$

(3) Lo ione K^+ ha carica elettrica opposta a quella di un elettone, quindi $Q = 1.6 \times 10^{-19}$ C. La corrente I è definita come

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \tag{17}$$

quindi

$$\Delta Q = I \Delta t \tag{18}$$

dove ΔQ è la quantità di carica che ha attraversato il conduttore nel tempo Δt. Nel nostro caso abbiamo

$$\Delta Q = 1.9 \times 10^{-12} \times 10^{-3} = 1.9 \times 10^{-15}\,\mathrm{C}\,. \tag{19}$$

Dividendo per la carica di un singolo ione si ottiene

$$N_{K^+} = \frac{\Delta Q}{Q} = \frac{1.9 \times 10^{-15}}{1.6 \times 10^{-19}} \simeq 1.2 \times 10^{4}\,. \tag{20}$$