•

Diario delle Lezioni 2015-16

lunedì 5 ottobre ore 15-17

Presentazione del corso. Errori di misurazione, grandezze fisiche, passaggio da radianti a gradi. Errore di approssimazione e percentuale: prime definizioni e primi esempi (errore relativo ed errore della somma e della differenza)

Si consiglia di vedere

l'Eserciziario

(anche se contiene qualche errore) e il file

database_quiz_farmacia_ctf

(anche se a volte i testi e le risposte degli esercizi sono incomprensibili)

mercoledì 7 ottobre ore 15-17

Troncamento e arrotondamento. Richiami sui numeri reali e loro proprietà. Errore di approssimazione: errore assoluto e relativo del prodotto, del reciproco e del quozionte. Percentuale: studio di due esempi/esercizi (vedere i file allegati qui sotto)

Errori di Approssimazione   Percentuale

Consigliato il sito della professoressa Anna Torre (http://www-dimat.unipv.it/atorre/ link http://www-dimat.unipv.it/atorre/) dell'Università di Pavia ed in particolare i siti dei corsi di Matematica da lei tenuti
 a Chimica e Tecnologie Farmaceutiche: MatematicaCTF-2011-12 (http://www-dimat.unipv.it/atorre/corsoCTF20112012.html) link http://www-dimat.unipv.it/atorre/corsoCTF20112012.html
 e a Farmacia: Matematica-2013-14 (http://www-dimat.unipv.it/atorre/farmacia2013-2014.html) link http://www-dimat.unipv.it/atorre/farmacia2013-2014/lezioni.html

giovedì 8 ottobre ore 13-15

Richiami sugli insiemi e le operazioni che si posso compiere (intersezione,unione, complementare). Complementare dell'unione=intersezione dei complementari. Connessione tra le operazioni logiche di "implicazione" ed insiemi uno contenuto in un altro. Cardinalità di un insieme=numero degli elementi dell'insieme, la cardinalità dell'unione di due insiemi A e B (con un numero finito di elementi)

$|A\cup B|= |A|+|B|-|A\cap B|$

Esercizi. Vedere gli esercizi al seguente link Esercizi-8-10-2015 (in fondo alla pagina del corso)

lunedì 12 ottobre ore 15-17

Equazioni delle rette e loro rappresentazione nel piano cartesiano; vari modi di scrivere l'equazione: retta che passa per due punti, forma parametrica; coefficiente angolare. Cenni alle funzioni e ai grafici di una funzione. Sistemi monometrici e dimetrici. Disequazioni lineari, e sistemi di disequazioni lineari: interpretazione geometrica nel piano cartesiano. Equazioni e disequazioni di secondo grado. ATTENZIONE IL FILE Equazioni e disequazioni CONTENEVA QUALCHE ERRORE, ora c'è una versione corretta (spero) Equazioni e disequazioni-corretto.

mercoledì 14 ottobre ore 15-17

Disequazioni irrazionali e fratte. Funzioni iniettive, Funzioni suriettive, Funzioni biunivoche, interpretazione attraverso i grafici. Grafici delle funzioni f(x)=x^n (per ogni x) (a seconda se n è pari o dispari), della funzione f(x)=1/x (per x≠0) e della funzione valore assoluto (o modulo) f(x)=|x|.

Osservazione sull'uguaglianza tra la radice quadrata di x^2 e il modulo di x.

giovedì 15 ottobre ore 13-15 sospensione dell'attività didattica per MAKER FAIRE

lunedì 19 ottobre ore 15-17

Operazioni sulle funzioni: somma, differenza, prodotto e quoziente. Discussione sull'insieme di definzione di queste funzioni. Funzioni crescenti (strettamente e in senso lato) e Funzioni decrescenti (strettamente e in senso lato): studio di f(x)=x^2, con dominio D=[0,+infinito) e di g(x)=x^3, senza l'aiuto dei grafici. Definzione di massimo assoluto (o globale) e di massimo relatiivo(o locale) e di minimo assoluto (o globale) e di minimo relatiivo (o locale): differenza tra punto di minimo e valore minimo. Dipendenza del valore minimo/massimo dall'insieme preso in considerazione:
f(x)=-(x-1)^2+4, con dominio tutti i reali ha un massimo assoluto in x_0=1 ed il valore massimo vale 4 (ossia x_0=1 è punto di massimo assoluto della funzione f nei reali)
la funzione g(x)=-(x-1)^2+4, con dominio [2,4] ha un massimo assoluto in x_0=2 e valore massimo uguale a g(2)= -(2-1)^2+4=3 (ossia x_0=2 è punto di massimo assoluto della funzione g, che ha come dominio [2,4])
la funzione h(x)=-(x-1)^2+4, con dominio (2,4] NON ha un massimo assoluto.
Discussione dei problemi 1 e 2 del foglio 2 dell'Eserciziaro.

mercoledì 21 ottobre ore 15-17

soluzione del Problema 2 del foglio 2 dell'Eserciziario, con paga= G+np dove n= numero di pezzi prodotti. Studio del numero migliore di ore che conviene diminuire (o equivalentemente di quanto conviene aumentare la produzione per ora). Analogia con il problema: trovare quale rettangolo ha area massima, tra tutti i rettangoli con perimetro fissato=2K: ossia posto a=altezza e base=b, si ha 2a+2b=2K, a>=0, b>=0, trovare a e b tali che l'area abdel rettangolo sia massima. Posto a=x si trova che b=K-x e che si deve massimizzare la funzione f(x)=x(K-x) al variare di x in[0,K].
Richiamo sulle potenze e definizione della funzione esponenziale che ad ogni x reale associa a^x (con a>0) , definizione della funzione logaritmo: studio di alcune proprietà degli

esponenziali e dei logaritmi: svolti alcuni esercizi, presi dal sito della Prof.ssa Giulia Giantesio [http://docente.unife.it/giulia.giantesio/esercizi-di-matematica-per-ctf-2013-2014>](http://docente.unife.it/giulia.giantesio/esercizi-di-matematica-per-ctf-2013-2014) e precisamente dal file 1-esercizi-su-equazioni-e-disequazioni

giovedì 22 ottobre ore 13-15

Composizione di funzioni fog (x)=f(g(x)), funzione inversa, grafico della funzione inversa. Esempi, ed alcuni esempi importanti:

1) $f(x)=x^m$ e $f^{(-1)}(y)=y^{1/m}$; 2) $f(x)=a^x$, $f^{(-1)}(y)=\log_a(y)$ e connessione con i grafici di queste funzioni. Altre proprietà dei logartimi (tra cui il cambio di base)

Esercizi D1,D2,D3,D4 del foglio 5 dell'Eserciziario

lunedì 26 ottobre ore 15-17

Scale logartimiche e rappresentazione grafica delle funzioni potenze e delle funzioni esponenziali come rette nelle scale logaritmiche e semilogaritmiche. funzioni trigonometriche, traslazioni, riflessioni, dilatazioni di grafici

mercoledì 28 ottobre ore 15-17

Esercizi dal foglio 5 dell'Eserciziario su: funzioni inverse e disegno di grafici di traformazioni di funzioni, insiemi di definizione, funzioni periodiche e periodo.

Funzioni sinusoidali $y=f(x)=A \sin (\omega x+\varphi)$ dove A= ampiezza, ω= frequenza ($\omega>0$) e φ=la fase iniziale. Relazione con il periodo. Dimostrazione del motivo per cui il periodo vale $T=2\pi/\omega$

Infatti dobbiamo trovare il più piccolo valore $T>0$ per il quale vale $f(x)=f(x+T)$ per ogni x

ossia che

$A \sin (\omega x+\varphi)= A \sin (\omega (x+T)+\varphi)$ per ogni x

ovvero, essendo $A \neq 0$,

$\sin (\omega x+\varphi) = \sin (\omega x+\omega T +\varphi)$ per ogni x

ovvero $\sin (\omega x+\varphi) = \sin (\omega x +\varphi+\omega T)$ per ogni x

poiché sappiamo che $\sin(t)=\sin(t+2k\pi)$ per ogni t e per ogni k intero, deve essere $\omega T= k 2\pi$, ma poiché cerchiamo il valore più piccolo (e strettamente positivo) dobbiamo prendere k=1,

ossia deve valere $\omega T= 2\pi$.

giovedì 29 ottobre ore 13-15

Interpretazione del coefficiente angolare m di una retta y=mx+q come

$m=\tan(\theta) =\sin(\theta)/\cos(\theta)$ (o anche con la notazione $tg(\theta)=\sin(\theta)/\cos(\theta)$)

dove θ (theta) è l'angolo che la retta y=mx+q forma con l'asse delle ascisse.βα
Formula della tangente della somma e tangente della differenza di due angoli, ossia

$\tan(\alpha + \beta)$ e di $\tan(\alpha - \beta)$

e utilizzo per calcolare la retta che forma un angolo con un'altra retta e per capire come mai data una retta r di equazione y=mx+q
le rette perpendicolari alla retta r hanno equazione del tipo
y=m'x+q' con mm'+1=0 ovvero m'= -1/m.

Studio dei sistemi in due equazioni in due incognite,
ax+by=e
cx+dy=f
Interpretazione geometrica come punto di intersezione fra due rette nel piano
Introduzione delle matrici due per due e del loro determinante e del metodo generale per risolvere un sistema di due equazioni in due incognite, quando il determinante è diverso da zero (caso generale di rette NON parallele).
studio del caso in cui il determinante è nullo (sempre nel caso due per due) ed interpretazione geometrica come il caso di rette parallele (se non c'è soluzione) o rette coincidenti (e allora infinite soluzioni)

parte della lezione si trova nel file SISTEMI-LINEARI-due-per-due

lunedì 2 novembre ore 15-17

Trasformazioni lineari del piano cartesiano in se stesso

Consideriamo la trasformazioni che porta ogni generico punto di coordinate cartesiane (x,y) del piano cartesiano nel punto (x',y') di coordinate
x'=ax+by
y'=cx+dy
ESEMPIO
il punto (1;0) va nel punto A di coordinate (a1+b0,c1+d0)=(a,c)
il punto (0;1) va nel punto B di coordinate (a0+b1,c0+d1)=(b,d)
il punto (1,1) ca nel punto Qdi coordinate (a1+b1,c1+d1)=(a+b,c+d)

PROPRIETA'

i punti di una retta r si trasformano in punti di un'altra retta r' (con un esempio)

ROTAZIONI come trasformazioni lineari, con l'ausilio delle coordinate polari.

Interpretazione dei sistemi di equazioni come problema inverso:
risolvere il sistema
ax+by=e
cx+dy=f
significa trovare (se esiste) il punto (x,y) il cui trasformato (x',y') è il punto (e,f).

fino a qui vedere il file SISTEMI-LINEARI-due-per-due
il resto è nel file Relazione tra determinate e area del parallelogramma,
ma qui sotto c'è un breve promemoria provvisorio

CONNESSIONE DEL DETERMINANTE CON IL SEGUENTE PROBLEMA:
trovare l'area del parallelogramma di vertici O(0,0), A(a,c), Q(a+b, c+d) e B(b,d)
dati due punti A(a,c)=(3,3/2) e B(b,d)=(1,2)

PRIMO METODO:
I.1) trovare al distanza tra l'origine O(0,0) e A(3,3/2) (ossia la base del parallelogramma)
I.2) scrivere l'equazione della retta r che passa per i punti O(0,0) e A(3,3/2)
I.3) scrivere l'equazione della retta r' perpendicolare alla retta r e passante per il punto B(1,2)
I.4) trovare le coordinate del punto H intersezione tra le rette r ed r' (OSSIA risolvere un sistema di equazioni lineari)
I.5) trovare la distanza tra i punti B ed H (ossia trovare l'altezza del parallelogramma)
I.6) l'area del parallelogramma è il prodotto base per altezza

SECONDO METODO
II.1) considerare che l'area del parallelogramma si ottiene come la'rea del rettangolo di vertici opposti l'origine O(0,0) e Q(a+b, c+d) = (3+1, 3/2+2)=(4,7/2) meno l'area di alcuni rettangoli e triangoli le cui aree si calcolano facilmente (vedere la figura determinante-come-area File, in formato jpg, e come sopra, scaricabile in fondo a questa pagina in formato pdf determinante-come-area-file-provvisorio)
II.2) calcolare l'area del rettangolo di vertici opposti l'origine O(0,0) e Q(a+b, c+d) = (3+1, 3/2+2)=(4,7/2) (gli altri vertici sono Q'(a+b,0)= 4,0) e Q''(0,7/2)
II.3) calcolare le aree dei triangoli e dei rettangoli rimanenti (vedere la figura determinante-come-area File, in formato jpg, e come sopra, scaricabile in fondo a questa pagina in formato pdf determinante-come-area-file-provvisorio)
II.4) utilizzare i conti fatti nei punti II.2 e II.3 per calcolare l'area del parallelogramma con il metodo del punto II.1

TERZO METODO
Calcolare il determinate della matrice con prima riga (a,b) e seconda riga (c,d)
ossia ad-bc= 3*2 - 1*(3/2) =(12-3)/2=9/2

SPIEGAZIONE GENERALE
COME ABBIAMO VISTO PRIMA, utilizzando la trasformazione
x'=ax+by
y'=cx+dy
(0,0), va in se stesso, il punto di coordinate (1,0) va nel punto A(a,c), il punto di coordinate (1,1) va in Q(a+b, c+d), il punto di coordiante (0,1) va nel punto B(b,d) e analogamente tutti i punti del quadrato di vertici (0,0), 1,0), (1,1) e (0,1) vanno nel parallelogramma di vertici O(0,0), A(a,c), Q(a+b, c+d) e B(b,d). Il fatto che l'area del parallelogramma sia diversa da zero, corrisponmde al fatto che la retta che passa per l'origine e il punto A(a,c) e quella che passa per l'origine e il punto B(b,d) sono sghembe.
Invece le due rette sono parallele se e solo se l'area del parallelogramma si riduce a zero ossia se A e B sono sulla stessa retta. In tale caso il sistema
ax+by=e
cx+dy=f
ha soluzione solo se (e,f) si trova sulla stessa retta alla quale appartengono sia A che B, (e in tale caso ci sono infinite soluzioni) e altrimenti non ci sono soluzioni.

Trovate le spiegazioni un po' più dettagliate nel file *Relazione tra determinate e area del parallelogramma*.

mercoledì 4 novembre ore 15-17

Esercizi vari sui sistemi di equazioni lineari (dal foglio 2 dell'Eserciziario, con variazioni). Esempi di sistemi in due incognite e tre equazioni, esempio di sistema di due equazioni e 4 incognite.

Esempio di calcolo del minimo della funzione

$y=Log(1+ (x-3)^2)$

come caso di funzione composta f(g(x)):
con f crescente ossia se $v_1 < v_2$ implica che $f(v_1) <= f(v_2)$
e
con g tale che x_0 è punto di minimo per g con valore minimo $g(x_0)$:
ossia qualunque sia x allora $g(x_0) \leq g(x)$
DI CONSEGUENZA
qualunque sia x allora, essendo g(x_0)<= g(x) ed f crescente
$f(g(x_0)) \leq f(g(x))$
ossia x_0 è punto di minimo per f(g(x)) con valore minimo $f(g(x_0))$

Rapida discussione del motivo per cui non vale per la funzione composta $y=Log((x-3)^2)$

giovedì 5 novembre ore 13,15-14,15

ATTENZIONE AL CAMBIO DI ORARIO

Esercizi su monotonia di funzioni composte f(g(x)) di funzioni monotone:

se f e g sono entrambe monotone crescenti o entrambe monotone descrescenti, allora f(g(x)) è monotona crescente,

se f e g sono entrambe monotone una crescente e l'altra decrescente allora f(g(x)) è monotona decrescente,

studio del segno delle funzioni e individuazione di quali sono i quadranti in cui si trova il grafico di una funzione

(in particolare sono stati illustrati gli esercizi D28-29-30-31 del folgio 5 dell'Eserciziario e varianti)

nel caso di f(x) monotona, studio della monotonia di f(-x), di -f(x), di 1/f(x): se f è monotona crescente, allora f(-x), -f(x), e 1/f(x) sono monotone descrescenti

(ovviamente per 1/f(x) è necessario che $f(x)\neq 0$)

lunedì 9 novembre ore 15-17

Studio qualitativo del grafico di una funzione: comportamento ai bordi degli intervalli di cui è composto l'insieme di definizione (o campo di esistenza) di una funzione f(x)

Definizione di limite finito di f(x) per x che tende ad a da destra, per x che tende a b da sinistra, per x che tende ad x_0, per x che tende a + ∞ e per x che tende a -∞.

Definizione di limite ±infinito di f(x) per x che tende ad a da destra, per x che tende a b da sinistra, per x che tende ad x_0, per x che tende a + ∞ e per x che tende a -∞.

Esempi (presi dalle slide della prof.ssa Torre, lezione 7, CTF 2011-12, in particolare si veda Limiti, forme indeterminate (slide8) nel sito "http://www-dimat.unipv.it/atorre/CTF2011-12/lezioni.html)

proprietà dei limiti: il limite della somma è la somma dei limiti, il limite del prodotto è il prodotto dei limiti, etc.

Illustrazione del problema delle forme indeterminate.

studio del limite del rapporto di due polinomi, per x che tende a +∞.

mercoledì 11 novembre ore 15-17

Limite di funzioni composte: limiti con sostituzione, con esempi di applicazione.

Alcuni limiti notevoli $\lim_{(x\to 0)} (e^x-1)/x=1$, limiti di esponenziali per x che tende a +∞ (e per x che tende a -∞)

limiti di rapporti di funzioni potenza e di esponenziali,

limiti di rapporti fra logaritmi e funzioni potenza,

Continuità di una funzione in un punto x_0: $\lim_{(x\to x0)} f(x)=f(x_0)$,

Continuità in un intervallo aperto (a,b), cioè continuità in ogni punto di (a,b)

Continuità in un intervallo chiuso [a,b], cioè continuità in ogni punto di (a,b) e
$\lim_{(x\to a^+)} f(x)=f(a)$
$\lim_{(x\to b^-)} f(x)=f(b)$

Uso della continuità per il calcolo dei limiti di funzioni continui composte

Proprietà delle funzioni continue

la somma di due funzioni continue è una funzione continua,

il prodotto di due funzioni continue è una funzione continua,

il rapporto di due funzioni continue è una funzione continua, (se il denominatore non si annulla)

se una funzione è invertibile e continua, allora la sua funzione inversa è continua (inoltre se una funzione è invertibile e crescente anche la sua funzione inversa è crescente)

ESEMPI: i polinomi, i rapporti di polinomi (dove il denominatore non si annulla),

le funzioni esponenziali, i logaritmi (in quanto funzioni inverse degli esponenziali)

le funzioni trigonometriche e le loro inverse:

l'inversa di sin (x), detta arcsin(x) [arcoseno di x, ovvero arco il cui seno è x]

si restringe sin(x) a [-π/2, +π/2], dove la funzione sin(x) risulta crescente e continua

e si ottiene la funzione arcsin : [-1,+1] → [-π/2, +π/2] continua e crescente

l'inversa di cos (x), detta arccos(x) [arcocoseno di x, ovvero arco il cui coseno è x]

si restringe cos(x) a [0, +π], dove la funzione cos(x) risulta decrescente e continua

e si ottiene la funzione arccos : [-1,+1]→ [0, π] continua e decrescente

l'inversa di tan (x), detta arctan(x) (o arctg(x)) [arcotangente di x, ovvero arco la cui tangente è x]

si restringe tan(x) a (-π/2, +π/2), estremi esclusi, in quanto tan(x) non è definita per x=π/2+kπ, ossia dove cos(x)=0

Nell'intervallo (-π/2, +π/2) la funzione tan(x) risulta crescente e continua ed è tale che

$\lim_{(x\to \pi/2 -)} \tan(x)=+\infty$, mentre $\lim_{(x\to -\pi/2+)} \arctan(x)=-\infty$,

OSSIA tan(x) ha due asintoti verticali

e si ottiene la funzione arctan : (-∞,+∞) → (-π/2, +π/2) continua e crescente

e con $\lim_{(x\to+\infty)} \arctan(x)=\pi/2$, mentre $\lim_{(x\to-\infty)} \arctan(x)=-\pi/2$

OSSIA ha due asintoti orizzontali.

(si consiglia di vedere le slide della prof.ssa Torre, lezione 7, CTF 2011-12, in particolare si veda Limiti, forme indeterminate (slide8) nel sito "http://www-dimat.unipv.it/atorre/CTF2011-12/lezioni.html)

svolti alcuni esercizi, presi dal sito della Prof.ssa Giulia Giantesio http://docente.unife.it/giulia.giantesio/esercizi-di-matematica-per-ctf-2013-2014> e precisamente dal file 6-esercizi-sui-limiti e dall'Eserciziario, foglio 5

giovedì 13 novembre ore 13-15

Esercizi sui limiti, in casi di forme indeterminate riconducibili a casi "semplici" limiti notevoli (senza dimostrazione, ma si consiglia di controllare sulla calcolatrice scientifica)

$\sin(x)/x$ tende a 1 per x che tende a 0,

$(1+b/x)^x$ tende a e^b per x che tende a $+\infty$ (qualunque sia b reale)

Relazione (per il caso b=1) con il limite $\lim_{(y\to 0)} \mathrm{lln}(1+y)/y = 1$:

OVVERO

$\lim_{(x\to+\infty)}(1+1/x)^x = e$ se e solo se $\lim_{(x\to+\infty)}\ln[(1+1/x)^x] = \ln(e)$

se e solo se $\lim_{(x\to+\infty)} x\ln(1+1/x) = 1$

e posto $y=1/x$ che tende a 0 quando x tende a $+\infty$, e tenuto conto che $x=1/y$

$1= \lim_{(x\to+\infty)} x\ln(1+1/x) = \lim_{(y\to 0)} (1/y)\ln(1+y)$

Esericizi 32-37, 41-43, 49-50, 58, 61, 63 ,e altri...

Esercizi sulla continuità e sui limiti: *Esercizi* 1 e 2 pag 7

Studio parziale del grafico di una funzione $y=f(x)$ per le funzioni $f(x)=x/(x^2-4)$ e $f(x)=(x^2-4x)(1-x)$ [Esercizio 1 pag.7 ed Esercizio 2 pag. 8]

(gli esercizi sono stati presi dal sito della Prof.ssa Giulia Giantesio http://docente.unife.it/giulia.giantesio/esercizi-di-matematica-per-ctf-2013-2014> e precisamente dal file 6-esercizi-sui-limiti)

Cenno al problema dell'asintoto obliquo:

la retta $y=mx+q$ è un asintoto obliquo per la funzione f(x) (per x che tende a $+\infty$) se

$\lim_{(x\to+\infty)}[f(x)-(mx+q)]=0$ o equivalentemente $\lim_{(x\to+\infty)}[f(x)-mx]=q$

necessariamente, se si divide per x,

$\lim_{(x\to+\infty)}[f(x)-(mx+q)]/x=0$, ma ciò equivale a chiedere che $\lim_{(x\to+\infty)} f(x)/x = m$,

in quanto $\lim_{(x\to+\infty)}(mx+q)/x= \lim_{(x\to+\infty)} m + (q/x) = m$

TUTTAVIA ciò non basta, bisogna poi controllare se esiste un valore q per cui $\lim_{(x\to+\infty)}[f(x)-mx]=q$

Nel caso di $f(x)=(x^2-4x)/(1-x)$

accade che $\lim_{(x\to+\infty)} f(x)/x = \lim_{(x\to+\infty)} (x^2-4x)/(x-x^2) = -1$, e quindi $m=-1$

e inoltre

$\lim_{(x\to+\infty)}[f(x)-mx\ ] = \lim_{(x\to+\infty)}[(x^2-4x)/(1-x) - (-1)x\ ] = \lim_{(x\to+\infty)}[(x^2-4x)(1-x) + x\ ]$

$= \lim_{(x\to+\infty)}[(x^2-4x +x(1-x))/(1-x)\ ] = \lim_{(x\to+\infty)}[(x^2-4x +x-x^2)/(1-x)\ ] = \lim_{(x\to+\infty)}[-3x /(1-x)]$
$=3$

e quindi la funzione ammette un asintoto obliquo (per x che tende a + ∞) dato dalla retta di equazione $y=-x+3$

Si può ripetere il ragionamento anche per x che tende a - ∞, ed otttenere che la retta di equazione $y=-x+3$ è un asintoto obliquo anche per x che tende a - ∞

OSSERVAZIONE IMPORTANTE: la condizione $\lim_{(x\to+\infty)} f(x)/x = m$, NON E' SUFFICIENTE, infatti se prendessimo ad esempio

la funzione $g(x)=f(x)+|x|^{1/2}$, con $y=f(x)$ che ammette la retta $y=mx+q$ come asintotno obliquo

allora si avrebbe lo stesso

$\lim_{(x\to+\infty)} g(x)/x = \lim_{(x\to+\infty)} [f(x)/x + |x|^{1/2}/x\ ] = m + \lim_{(x\to+\infty)} |x|^{1/2}/x= m+0 =m$

ma poi ovviamente, se vale $\lim_{(x\to+\infty)}[f(x)-mx\ ]=q$, ossia se la retta $y=mx+q$ è un asintoto per $y=f(x)$,

allora $y=g(x)$ non ammette asintoto obliquo, in quanto

$\lim_{(x\to+\infty)}[g(x)-mx\ ]=\lim_{(x\to+\infty)}[f(x)+ |x|^{1/2}-mx\ ] =\lim_{(x\to+\infty)}[f(x)-mx + |x|^{1/2}] =\text{"}q+ \infty\text{"}=+ \infty$

lunedì 16 novembre ore 15-17

equazione di una retta secante alla curva data dai punti $(x,f(x))$ nei punti $P_0=(x_0, f(x_0))$ e $P_1=(x_1, f(x_1))$: $y=f(x_0)+ \{ [f(x_1)-f(x_0)]/(x_1-x_0) \} (x-x_0)$

ed equazione della retta tangente alla curva data dai punti $(x,f(x))$ nel punto $(x_0, f(x_0))$ come limite della retta secante quando P_1 tende a P_0 :

$y= f(x_0)+ \lim_{(x1\to x0)}\{ [f(x_1)-f(x_0)]/(x_1-x_0) \} (x-x_0)$, ossia $y= f(x_0)+ f '(x_0) (x-x_0)$

OSSIA la derivata $f ' (x_0) = \lim_{(x1\to x0)}\{ [f(x_1)-f(x_0)]/(x_1-x_0) \}$ come coeficiente angolare della retta tangente alla curva $y=f(x)$ nel punto $P_0=(x_0, f(x_0))$

funzioni derivabili in un intervallo (a,b): se essie la derivata in ogni punto dell'intervalllo (a,b)

Calcolo delle derivate di f(x)=c, f(x)=x, f(x)= x^2, f(x)=x^3. Uso della formula $(a+b)^3$, $(a+b)^4$, etc., con l'ausilio del triangolo di Tartaglia [noto anche come triangolo di Pascal]

estensione al caso di f(x)=x^n, per n intero naturale e di f(x)=x^a, per a reale (ed x >0)

Calcolo delle derivate di f(x)=e^x e di f(x)=a^x , per a >0

(usando il limite notevole $\lim_{(h\to+0)} (e^h-1)/h=1$)

proprietà delle derivate: derivata di a(fx), derivata della somma, derivata del prodotto, derivata del rapporto di funzioni derivabili

Derivata della funzione composta, (idea attraverso il rapporto incrementale)

Derivata della funzione inversa (motivazione geometrica e

calcolo delle derivate di f(x)= ln (x) e di f(x)= $\log_a(x)$

(si veda anche il file REGOLE DI DERIVAZIONE)

mercoledì 18 novembre ore 15-17

Relazioni tra continuità e derivabilità. Derivata destra e derivata sinistra. Relazioni tra crescenza di una funzione derivabile e positività della derivata. Punti critici.

Funzioni definite in un intervallo chiuso e limitato [a,b]: enunciato del teorema di Weierstrass se f è continua in un intervallo chiuso e limitato [a,b] allora ammette massimo e minimo.

Ricerca degli estremi per funzioni continue definite in un intervallo chiuso e limitato [a,b] : i punti di massimo e minimo vanno cercati tra gli estremi a e b, tra i punti critici, ossia quelli in cui la funzione è derivabile e la derivata si annulla, ed eventualmente quelli in cui non esiste la derivata.

Per questa parte vedere le slide della prof.ssa Anna Torre http://www-dimat.unipv.it/atorre/CTF2011-12/Lezione10.pdf

Discussione degli esercizi C4.3 e C4.4 del libro Gentili-Villani, e di alcuni esercizi proposti dagli studenti: in particolare gli esercizi D6 e D40 del foglio 2 dell'Eserciziario, D 24 del foglio 3 dell'Eserciziario

giovedì 19 novembre ore 13-15

Esercizio D4 del foglio 5 dell'Eserciziario con e senza derivate, idea con le derivate: basta osservare che
f(x)=$ax^3 +b x^2 +cx +d$

e che
$f'(x)=3\,ax^2+2\,b\,x+c$
e impostare il sistema
$f(0)=0$,
$f(1)=1$,
$f'(1)=0$, (in quanto il punto 1 è un punto estremale e quindi la derivata prima in 1 si annulla)
$f(3)=0$
ossia, traducendo le condizioni
$d=0$,
$a+b+c+d=1$,
$3a+2b+c=0$,
$27a+9b+3c+d=0$
e risolvere il sistema ottenuto (di 4 equazioni nelle 4 incognite a , b c, d)
ma essendo d=0, in realtà si riduce immediatamente a un sistema di 3 equazioni nelle 3 incognite a, b, c.

(si veda anche il file REGOLE DI DERIVAZIONE)

Esercizio D21 sempre del foglio 5 (con e senza derivate):
IDEA
si tratta di una funzione crescente f (la radice di x) calcolata in una funzione g(x) (un polinomio di secondo grado con coefficiente di grado 2 negativo) il punto x_0 di massimo di f(g(x)) coincide con il punto di massimo della funzione g(x):

infatti se x_0 è punto di massimo per g,
ossia se g(x) è minore o uguale a $g(x_0)$ per ogni x
allora, essendo f una funzione crescente si ha che f(g(x)) è minore o uguale di $f(g(x_0))$ per ogni x nell'insieme di definizone di f(g(x))
ossia x_0 è punto di massimo per f(g(x))
VARIANTE: potete ripetere lo stesso ragionamento per un'altra funzione f crescente, ad esempio $f(x)=e^x$

Esercizio (dal libro del prof. Foschi): trovare i punti di intersezione tra una retta r di equazione ax+by+1=0 e la retta perpendicolare alla retta r e passante per l'origine.
Svolti altri esercizi su richiesta degli studenti.

lunedì 23 novembre ore 15-17: DATA PER LA PROVA DI AUTOVALUTAZIONE
ore 17-18: correzione/spiegazione alla lavagna degli esercizi

Il compito potrà vertere su tutti gli argomenti svolti finora: calcoli numerici, percentuali, disuguaglianze, sistemi di disuguaglianze, sistemi di equazioni lineari, passaggi da e a scale logaritmiche o doppiamente logaritmiche, semplici esercizi di geometria analitica, e trigonometria, grafici di trasformazioni di funzioni e/o di funzioni inverse, limiti di funzioni, grafico qualitativo di una funzione.

In pratica gli argomenti dei fogli1-5 dell'eserciziario, escluse le progressioni (che abbiamo MOMENTANEAMENTE SALTATO)
Le derivate compariranno solo come argomento facoltativo.

Ci saranno 3 domande a risposta multipla e un esercizio a risposta aperta. Le domande a risposta multipla dovranno essere giustificate (brevemente).

La prova di autovalutazione verrà inoltre giudicata con un voto da 0 a due punti, valido per un anno accademico: il punteggio ottenuto verrà aggiunto al voto dell'esame.

Ore 17-17,30 Correzione delle domande a risposta multipla D1, D1', D2, D2', D3 e D3'.

mercoledì 25 novembre ore 15-17

Discussione di alcuni errori nella soluzione della prova di autovalutazione:

in particolare sul seguente errore: nel caso di un sistema di n equazioni lineari in n incognite,

il fatto che sia nullo il determinante della matrice associata al sistema di equazioni lineari,

NON GARANTISCE che ci siano infinite soluzioni,

inoltre è vero che, sempre se il determinante è nullo, se si usa la regola di Cramer, necessariamente deve accadere che i determinanti dei numeratori ottenuti dal sostituire le colonne con la colonna dei termini noti deve essere nulla,

ovvero E' VERO CHE se uno di questi determinanti NON E' NULLO allora sicuramente il sistema NON AMMETTE SOLUZIONI,

MA IL VICEVERSA NON E' VERO.

ESEMPIO: il sistema

$x+y-z=a$

$2x+2y-2z=b$

$3x+3y-3z=c$

e la matrice associata

1 1 -1

2 2 -2

3 3 -3

ha determinante nullo,

ed è immediato vedere che l'unica possibilità affinché ci siano soluzioni è che $b=2a$ e $c=3a$ ed in tale caso tutte le soluzioni sono $(x,y, x+y-a)$.

Invece il sistema

$x + y - z=1$

$2x+2y-2z=0$

$3x+3y-3z=0$

non ammette soluzioni, ed è immediato vedere che sono nulli tutti i determinati delle tre matrici

1	1	-1		1	1	-1		1	1	1
0	2	-2		2	0	-2		2	2	0
0	3	-3		3	0	-3		3	3	0

Discussione delle domande D4 e D4'

derivate delle funzioni trigonometriche e delle loro inverse.

Questa parte si può trovare nel file allegato in fondo REGOLE DI DERIVAZIONE, insieme alle derivate delle funzioni esponenziali e delle funzioni logaritmiche e alla discussione dell'esercizio D4 del foglio 5 dell'Eserciziario

giovedì 26 novembre ore 13-15

Convessità di una funzione (o concavità rivolta verso l'alto del grafico della funzione) in un intervallo (a,b) finito o infinito

e concavità di una funzione (o concavità rivolta verso il basso del grafico della funzione) in un intervallo (a,b) finito o infinito

Interpretazione grafica, PROTOTIPO di funzione convessa: $f(x)=x^2$

OSSERVAZIONE se f(x) è convessa allora -f(x) è concava (e viceversa)

caratterizzazione

1) attraverso la derivata prima:

se la funzione f(x) è derivabile in (a,b) e la derivata prima è crescente nell'intervallo (a,b) allora f(x) è convessa

2) attraverso la derivata seconda:

se la funzione f(x) è derivabile due volte in (a,b) e la derivata seconda è maggiore o uguale a zero nell'intervallo (a,b) allora f(x) è convessa

Flessi orizzontali e flessi obliqui (esempi)

Regola di De L'Hopital (esempi)

Teorema del confronto dei limit (anche noto come teorema dei carabinieri)

(per la teoria, in forma sintetica, si possono guardare le slide della Prof.sa Anna Torre; slide10)

Esempi tratti dal sito della Prof.ssa Giulia Giantesio
http://docente.unife.it/giulia.giantesio/esercizi-di-matematica-per-ctf-2013-2014> e precisamente dal file 8: Esercizi sullo studio di funzione

lunedì 30 novembre ore 15-17

Approssimazione di funzioni derivabili con polinomi
Formula di Taylor (in particolare per n=0,1,2 e maggiorazioni del resto (ovvero dell'errore commesso)
ESEMPI svolti
Calcolo approssimato di $e^{(1/100)}$ (e di $e^{-(1/100)}$) con un polinomio di grado 0,1,2, e maggiorazioni dell'errore commesso
Calcolo approssimato di cos(pigreco/100) con un polinomio di grado 2, e maggiorazioni dell'errore commesso
Calcolo approssimato di radice di (1+x) nelle vicinanze di 0, con un polinomio di grado 1 (e quindi con 1+x/2) e maggiorazioni dell'errore commesso

(per la teoria, in forma sintetica, le ultime due pagine di slide11 della Prof.ssa Anna Torre)

Cenno all'idea di differenziale (questo argomento verrà ripreso)
Se f è derivabile con derivata continua, allora
f(x+dx)-f(x)=: Delta f(x)
è l'incremento di f nell'intervallo di estremi x e x+dx, invece
df(x)=f'(x) dx
è l'incremento della tangente ad f (tangente al grafico di f nel punto (x,f(x)) nell'intervallo di estremi x e x+dx.

Esercizio su massimo e/o minimo:

in un corridoio a forma di L di cui una prima parte ha larghezza 1 metro e una seconda parte ha larghezza due metri, e altro 3,20 metri dobbiamo far passare una lastra di larghezza 4 m e altezza 3,18 metri (quindi deve passare in verticale)
E' possibile?

(per una soluzione si veda il 21 novembre nel Diario delle Lezioni del 2014-15)

mercoledì 2 dicembre ore 15-17

Problema del calcolo delle aree. Metodo di approssimazione per ottenere l'area del cerchio. Introduzione agli integrali definti.

Problema del calcolo dell'area della regione compresa tra l'asse x (per x compreso tra a e b) e il grafico di una funzione f(x) continua in [a,b] e con f(x)≥0:
approssimazioni dell'integrale definito.
Calcolo dell'integrale fra a e b della funzione x, sia geometricamente che con la definzione formale

[*a questo scopo abbiamo utilizzato e verificato la formula* 1+2+...+(n-1)+n = n(n+1)/2 :
I*NFATTI*
due volte la somma 1+2+...+(n-1)+n *vale* n *volte* (n-1), *come mostra la somma qui sotto*

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + \dots + & (n-1) & + & n \\
+ & n & + & (n-1) & + \dots + & 2 & + & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) = n\,(n-1)$$

FINE DELLA VERIFICA DELLA FORMULA]

Illustrazione delle proprietà dell'integrale definito.

Per questa parte, oltre al libro, si vedano le slide della prof. Torre Integrali (slide12) (attenzione è in power point)

e il diario delle lezioni 2014-15: **mercoledì 2 dicembre**

Esercizio: studio e grafico della funzione f(x)= x^2/(x^2+3), inclusi i flessi.
(per quanto riguarda i flessi si veda il diario delle lezioni 2014-15: **mercoledì 26 novembre**)

giovedì 3 dicembre ore 13-15

Primitive e Integrali indefiniti: relazione con gli integrali definiti.

Calcolo degli integrali indefiniti (ossia di tutte le primitive) per le principali funzioni.

1) Si tratta di "invertire" la tabella delle derivate.

Sul libro si trova una tabella completa, ma suggerisco anche la tabella da youmath all'indirizzo
http://www.youmath.it/lezioni/analisi-matematica/integrali/596-integrali-notevoli.html

Esempi di applicazione.

(non affrontato, in questa lezione, sarà fatto nella lezione di lunedì 7 dicembre)

2) Oppure si tratta di usare le formule di calcolo per sostituzione, o quelle di integrazione per parti

Esempi di applicazione

IMPORTANTE ci sono casi in cui non è nota l'espressione esplicita dell'integrale indefinito, in tali casi però si può ricorrere a tabelle o ad approssimazioni.

ESEMPIO f(x)= (densità gaussiana)

venerdì 4 dicembre ore 11-13 NON C'E' L'aula

lunedì 7 dicembre ore 15-17

Formule di calcolo per sostituzione, e quelle di integrazione per parti

Derivano rispettivamente dalle formule della derivazione per le funzioni composte e dalla formula di derivazione del prodotto di due funzioni:

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE:

sia F una primitiva di f, ossia F'(t)=f(t), e sia g(x) una funzione derivabile, con g'(x) continua, allora

F(g(x)) è una primitiva di f(g(x))g'(x), OSSIA

se $\int f(x)\, dx = F(x)+C$ allora $\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = F(g(x)) + C$

IMPORTANTE ricordando che g'(x)dx= dg(x) è il DIFFERENZIALE DI g(x) SI USA SCRIVERE

$\int f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int f(g(x))\, dg(x) = F(g(x)) + C$

INFATTI BASTA VERIFICARE CHE F(g(x)) sia una primitiva di f(g(x))g'(x),

ossia

la derivata di F(g(x)) +C sia uguale a f(g(x)) g'(x)

e ciò segue immediatamente dalla formula di derivazione della funzione composta:

$(d/dx)\{F(g(x))+C\} = F'(g(x))\, g'(x) + 0 = f(g(x))\, g'(x)$

ESEMPIO DI APPLICAZIONE

$\int \sin(x)\, (\cos(x))^2\, dx = \int (-\cos(x))'\, \cos^2(x)\, dx = -\int \cos^2(x)\, d\cos(x)$

Poiché $\int t^2\, dt = t^3/3 + C$ con la formula di integrazione per sostituzione possiamo affermare che

$\int \sin(x) \cos^2(x)\, dx = \int (-\cos(x))' \cos^2(x)\, dx = -\int \cos^2(x)\, d\cos(x) = -\cos^3(x)/3 + C$

e quindi, ad esempio

$\int_0^\pi \sin(x) \cos^2(x)\, dx = - \cos^3(x)/3 \,|_0^\pi =$

$=- \cos^3(\pi)/3 \ - (- \cos^3(0)/3) = -(-1)^3/3 + 1^3/3=2/3$

OSSERVAZIONE IMPORTANTE: Se aveste dimenticato il segno - nella primitiva, vi sarebbe venuto -2/3

Ma un integrale negativo sarebbe stato un risultato impossibile, in quanto la funzione $f(x)=\sin(x) \cos^2(x) \geq 0$ per x nell'intervallo di integrazione $[0,\pi]$ e, quindi, ANCHE PRIMA DI ESEGUIRE I CALCOLI, SAPPIAMO CHE l'integrale deve essere un numero ≥ 0.

Esercizi dal Foglio 7 dell'Eserciziario in particolare l'Esercizio D14

mercoledì 9 dicembre ore 15-17

Ancora sulle regole di integrazione per parti e per sostituzione.

Per l'integrazione per parti si veda la prima versione delle REGOLE DI INTEGRAZIONE

Esempio del calcolo dell'area della regione contenuta in un'ellisse di equazione $(x/a)^2+(y/b)^2=1$ (con a e b >0)

utilizzando l'espressione dell'integrale della radice di $1-x^2$, ossia

$\int (1-x^2)^{1/2}\, dx = (1/2)\, x\, (1-x^2)^{1/2} + (1/2) \arcsin(x)+C$

e si trova che l'area è uguale ad π ab.

OSSERVAZIONE, nel caso in cui a=b=r si ritrova la formula dell'area del cerchio .

Esempi vari ed esercizi tratti dal sito della Prof.ssa Giulia Giantesio http://docente.unife.it/giulia.giantesio/esercizi-di-matematica-per-ctf-2013-2014> e precisamente dal file 11: Esercizi sul calcolo integrale (esclusi gli integrali per le funzioni razionali fratte)

Per risolvere questi esercizi suggerisco di guardare la tabella deli integrali da youmath all'indirizzo
http://www.youmath.it/lezioni/analisi-matematica/integrali/596-integrali-notevoli.html

Sul web si trovano numerose tabelle, ma ATTENZIONE, possono contenere errori.

(come ad esempio nella tabella
http://www.dmf.unisalento.it/~panareo/Fisica1/Materiale_didattico/tabint.pdf)

Inoltre vi rendo noto che esiste un sito https://www.wolframalpha.com/examples/Math.html

in cui potete trovare molti esempi di calcolo di integrali, ma non solo.
Il suo utilizzo deve essere il seguente: provate a svolgere un esercizio e poi controllate sul sito di wolfram-alpha

INFINE IMPORTANTE: esistono funzioni di cui non si sa scrivere nessuna primitiva, come ad esempio la funzione

$\varphi(x)= (1/(2\pi)^{1/2})\ \ e^{-x2/2}$

si sa che esiste una funzione primitiva Φ (x) ossia tale che la sua derivata coincide con

$\varphi(x)= (1/(2\pi)^{1/2})\ \ e^{-x2/2}$

ma non la si può scrivere tramite le funzioni "elementari" ossia le potenze, le funzioni esponenziali, i logaritmi le funzioni trigonometriche, ma esistono delle tavole che permettono di calcolarla per moltissimi valori di x.

Quindi, tramite le tabelle della funzione Φ (x) si può calcolare l'integrale di $\varphi(x)$ in un intervallo (a.b) come Φ (b)-Φ (a).

QUESTO ESEMPIO VERRA' RIPRESO quando ci occuperemo di statistica: è un esempio molto importante negli studi sperimentali, ed è legato agli errori di misurazione.

giovedì 10 dicembre ore 13-15

Calcolo del **volume di un cilindro di base un cerchio di raggio R e altezza h** : il volume è semplicemente l'area della base per l'altezza, quindi

VOLUME DEL CILINDRO= $\pi R^2 h$

Calcolo del **volume di un cono di base un cerchio di raggio R e altezza h** :

il volume si può calcolare come limite della somma di tanti cilindri di raggio e altezza variabili

(una specie di "torta nunziale" a "strati sempre più numerosi e sottili" ossia con

$\int_0^h \pi r^2(y)\ dy$

dove y= altezza dal basso e r(y) è il raggio corrispondente:

si ottiene che r(y):R= h-y=h da cui r(y)= (R/h) (h-y)

[infatti si tratta di considerare un triangolo simile al triangolo rettangolo di base R ed altezza h, ma di base r(y) e altezza h-y, ossia quanto rimane da y fino ad h]

$\int_0^h \pi r^2(y)\ dy= \int_0^h \pi (R/h)^2 (h-y)^2 dy$

da cui, svolgendo i calcoli viene VOLUME DEL CONO= $\pi R^2 h/3$.

Calcolo del **volume di una sfera di raggio R**: conviene calcolare prima il volume della semisfera con un metodo simile a quello per calcolare il volume del cono.

Inoltre ci si riduce al caso R=1, per semplicità.

il volume della semisfera di raggio 1 è quindi data da $\int_0^1 \pi\, r^2(y)\, dy$

dove y= altezza dal basso ma questa volta, per il teorema di Pitagora vale $y^2+r^2(y)=1$, da cui $r^2(y)=1-y^2$, e quindi

$\int_0^1 \pi\, r^2(y)\, dy = \int_0^1 \pi\, (1-y^2)\, dy = \pi\, [\, y- y^3/3\,]_0^1 = \pi\, [\, 1- 1/3] = \pi\, 2/3$

da cui VOLUME DELLA SFERA DI RAGGIO R = $4\pi R^3/3$ [= VOLUME DELLA SFERA DI RAGGIO 1 x R^3]

Estensione dell'integrale al caso in cui uno degli estremi dell'integrale vale $+\infty$

$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{(b\to +\infty)} \int_a^b f(x)\, dx$ (SE TALE LIMITE ESISTE)

o uno degli estremi dell'integrale vale $-\infty$

$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{(a\to -\infty)} \int_a^b f(x)\, dx$ (SE TALE LIMITE ESISTE)

ESEMPI:

$\int_1^{+\infty} (1/x^2)\, dx = \lim_{(b\to +\infty)} \int_1^b (1/x^2)\, dx$

$= \lim_{(b\to +\infty)} (-1/x) |_1^b = \lim_{(b\to +\infty)} [(-1/b) -(-1)]$

$= \lim_{(b\to +\infty)} [1- (1/b)] =1$

$\int_{-\infty}^0 e^x\, dx = \lim_{(a\to -\infty)} \int_a^0 e^x\, dx = \lim_{(a\to -\infty)} e^x |_a^0$

$= \lim_{(a\to -\infty)} [e^0 - e^a] = 1$

INVECE

la funzione cos(x) non è integrabile in $(0, +\infty)$ in quanto l'integrale indefinito di cos(x) è sin(x)+C e quindi l'integrale di cos(x) tra 0 e b vale sin(b) che continua ad oscillare tra +1 e -1 e il limite non esiste.

Esercizio 8.19 del libro di Villani-Gentili:

calcolo approssimato di $\int_{-0.4}^{0.4} \exp\{-x^2/2\}\, dx$, usando la formula di Taylor.

IL PROBLEMA E' CHE NON E' POSSIBILE SCRIVERE UNA PRIMITIVA della funzione $\exp\{-x^2/2\}$ in termini delle funzioni elementari, quindi l'unica cosa da fare è fare un calcolo approssimato

IDEA APPROSSIMARE $\int_a^b f(x)\, dx$ con $\int_a^b T_n f(x)\, dx$

dove $T_n f(x)$ è il polinomio di Taylor di grado n di f(x)

Al contrario di $\int_a^b f(x)\, dx$, che non sappiamo calcolare quando $f(x)= \exp\{-x^2/2\}$, sicuramente sappiamo calcolare $\int_a^b T_n f(x)\, dx$ perché sappiamo integrare tutti i polinomi.

VEDREMO CHE possiamo prendere come polinomio di Taylor $1-x^2/2$ e che quindi possiamo approssimare

$\int_{-0.4}^{0.4} \exp\{-x^2/2\}\, dx$ con

$\int_{-0.4}^{0.4} (1-x^2/2)\, dx = 2 \int_0^{0.4} (1-x^2/2)\, dx = 2\, (x-x^3/6)|_0^{0.4} =$

$= 2\, (4 * 10^{-1}-(4 * 10^{-1})^3/6) = 8 * 10^{-1}- 64 * 10^{-3}/3 = 0,8 - 21,333333 * 10^{-3}=$

$= 0,7786666666666666666666666666667$

vedremo che l'errore commesso è minore in valore assoluto di $5,12 * 10^{-4}$

Ed infatti utilizzando il sito di Wolfram Alpha
https://www.wolframalpha.com/examples/Math.html

(ed in particolare cliccando

e scrivendo l'istruzione **integrate exp{- x^2/2} dx from x=-0.4 to 0.4**

si ottiene $\int_{-0.4}^{0.4} \exp\{-x^2/2\}\, dx = 0,779169$

e l'errore commesso vale

0,7786666666666666666666666666667- 0,779169|=
0,0005023333333333333333333333330

CALCOLO DELL'ERRORE

$\int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b T_n f(x)\, dx = \int_a^b [f(x) -T_n f(x)]\, dx$

ed è facile convincersi che (stiamo assumendo a<b)

$| \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b T_n f(x)\, dx | \leq \int_a^b |f(x) -T_n f(x)|\, dx$

e che se $0 \leq h(x) \leq g(x)$ allora $\int_a^b h(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$,

da cui

prendendo $h(x)=|f(x) - T_n f(x)|$ e $g(x) = \sup_{\xi \text{ in } [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \; |x-x_0|^{n+1}/(n+1)!$ (con x_0 fissato)

per cui $0 \leq h(x)=|f(x) - T_n f(x)| \leq \sup_{\xi \text{ in } [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \; |x-x_0|^{n+1}/(n+1)! = g(x)$

si ha

$| \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b T_n f(x) \, dx | \leq \int_a^b |f(x) - T_n f(x)| \, dx$

$\leq \int_a^b \sup_{\xi \text{ in } [a,b]} |f^{(n+1)}(\xi)| \; |x-x_0|^{n+1}/(n+1)! \, dx$

Per trovare un polinomio che approssimi $f(x)= \exp\{-x^2/2\}$ possiamo procedere come segue:

sappiamo che il polinomio di Taylor di $f(t)= e^{-t}$ di grado 1, per $t_0=0$, è

T_1f(t)=1-t (in quanto $f(0)= e^{-0}=1$ e $f'(t)=-e^{-t}$ e quindi $f'(0)=-e^{-0}=-1$)

sappiamo che per $t \geq 0$ si ha,

$|e^{-t} -(1-t)| \leq \sup_{\xi \text{ in } [0,t]} |f''(\xi)| \; |t|^{1+1}/(1+1)! = \sup_{\xi \text{ in } [0,t]} |e^{-\xi}| \; |t|^2/2 = |t|^2/2$

Preso $t=x^2/2$ possiamo affermare che

$|e^{-x2/2} -(1-x^2/2)| \leq (x^2/2)^2/2 = x^4/8$

e quindi

$| \int_{-0.4}^{0.4} \exp\{-x^2/2\} \, dx - \int_{-0.4}^{0.4} (1-x^2/2) \, dx|$

$= | 2 \int_0^{0.4} \exp\{-x^2/2\} \, dx - 2 \int_0^{0.4} (1-x^2/2) \, dx |$

$= 2 \; | \int_0^{0.4} \exp\{-x^2/2\} \, dx - \int_0^{0.4} (1-x^2/2) \, dx |$

$\leq 2 \int_0^{0.4} |\exp\{-x^2/2\} \, dx - (1-x^2/2)| \, dx$

$\leq 2 \int_0^{0.4} x^4/8 \, dx = (1/4) \; x^5/5 \,|_0^{0.4}$

$= (1/4) \; (4 * 10^{-1})^5 /5 = 4^4 * 10^{-5} /5 = 256/5 * 10^{-5}$

$= 51{,}2 * 10^{-5} = 5{,}12 * 10^{-4} = 0{,}000512$

e quindi possiamo affermare che

$\int_{-0.4}^{0.4} \exp\{-x^2/2\}\, dx = \int_{-0.4}^{0.4} (1-x^2/2)\, dx \pm 5{,}12 * 10^{-4} =$

$=0{,}7786666666666666666666666666667 \pm 5{,}12 * 10^{-4} =$

in quanto, abbiamo visto, possiamo calcolare l'integrale del polinomio approssimante.

ATTENZIONE per il diario delle lezioni dal 14 dicembre 2015 in poi vedere il prossimo argomento

- errori di approssimazione File

  Si tratta del troncamento e dell'arrotondamento, dell'errore della somma, della differenza e del prodotto, manca il reciproco e il quoziente, argomenti relativi alle lezioni del 5 e 7 ottobre.

- esercizi su percentuale File
- Esercizi-8-ottobre-2015 File
- Equazioni e disequazioni-corretto File

  Il file contiene alcuni appunti ed esempi sulle equazioni di secondo grado, sulle disequazioni di secondo grado e sulle disequazioni irrazionali

  ATTENZIONE SI TRATTA DELLA CORREZIONE (spero definitiva) DEL FILE PRECEDENTE!!

- SISTEMI-LINEARI-due-per-due File

  in questo file ci sono la discussione dei sistemi lineare di due equazioni in due incognite.

  le matrici di due righe e due colonne e il loro determinante.

  le coordinate polari

  le trasformazioni lineari del piano in sé (associate a una matrice)

  le due interpretazioni geometriche delle soluzioni dei sistemi in due equazioni e due incognite

- determinante-come-area File

  figura che aiuta a capire come mai il determinante rappresenta l'area di un parallelogramma

  - determinante-come-area-file-provvisorio
  - Relazione tra determinate e area del parallelogramma File

    In questo file trovate la spiegazione della relazione tra determinate e area del parallelogramma e la soluzione del problema anche con i metodi classici.

    ossia con il calolco della base e dell'altezza del parallelogramma (nel caso dell'esericizio proposto)

  - REGOLE DI DERIVAZIONE File

    Questo file contiene la discussione delle regole di derivazione, e delle derivate dellefunzioni esponenziali e delle funzioni logaritmiche, e delle funzioni trigonometriche cos(x), sin(x) e tan(x) e delle loro inverse arccos(x), arcsin(x) e tan(x).

    Il file conitne anche una discussione della domanda D4 del foglio 5 dell'Eserciziario insieme a un'interessante variante la cui soluzione usa le derivate.

  - REGOLE DI INTEGRAZIONE File

    Il file è una prima versione sulle regole di integrazione per parti e per sostituzione. Al momento c'è solo l'integrazione per parti, con esempi.

  - prova di Novembre 2015 File
-

DIARIO DELLE LEZIONI DAL 14 dicembre in poi

lunedì 14 dicembre ore 15-17

Esempi di equazioni differenziali di primo e di secondo ordine.

ESEMPIO 0

Quando si calcola UNA PRIMITIVA (o l'integrale indefinito) di una funzione f(x) si cerca UNA FUNZIONE F(x) TALE CHE (o tutte le funzioni tali che) la sua derivata F'(x) sia uguale ad f(x): ossia F'(x)= f(x)

scrivendo y(x) invece di F(x) abbiamo quindi il primissimo esempio di equazione differenziale:

y'(x)=f(x)

di cui una primitiva F(x) è una soluzione e invece F(x)+C, al variare della costante C nei reali rappresenta l'insieme di tutte le soluzioni .

ESEMPIO 1

y'(x)=-2xy(x)

è un'equazione differenziale perché è un'equazione che coinvolge una funzione e le sue derivate

si dice **del primo ordine**, perché compare solo la derivata prima

A DIFFERENZA delle equazioni lineari (ad esempio) le soluzioni non sono numeri MA FUNZIONI!!

possiamo verificare che la funzione $y(x)= e^{-x2}$

è soluzione dell'equazione y'(x)=-2xy(x),

infatti $y(x)= e^{-x2}$ e quindi $y'(x)= e^{-x2} (-2x) = y(x) (-2x) =-2x\, y(x)$

SIMILMENTE anche tutte le funzioni

$y(x)= C e^{-x2}$, al variare di C nei numeri reali

sono soluzioni dell'equazione y'(x)=-2xy(x),

infatti $y(x)= C e^{-x2}$ e quindi $y'(x)= C e^{-x2} (-2x) = y(x) (-2x) =-2x\, y(x)$

AFFERMAZIONE (senza dimostrazione):

Le funzioni $y(x)= C e^{-x2}$ sono tutte e sole

le soluzioni dell'equazione differenziale y'(x)=-2xy(x),

La famiglia delle funzioni $y(x)= C e^{-x2}$, al variare di C nei reali, è detta **soluzione generale** dell'equazione y'(x)=-2xy(x),

ESEMPIO 2

y''(x) =-y(x)

Anche questa è un'equazione differenziale, ma **del secondo ordine**, perché vi compare la derivata seconda

anche

y''(x)+hy(x)+ky(x) =0 (con h e k NUMERI REALI) è un'equazione differenziale del secondo ordine, perché vi compaiono le derivate fino all'ordine due.

Tornando all'esempio si verifica facilmente che y(x)= sin(x) è soluzione di y''(x)=-y(x),

INFATTI se y(x)= sin(x), allora y'(x)=cos(x) e quindi y''(x)= -sin(x) = - y(x)

ma anche y(x)=A sin(x) è soluzione, per ogni scelta di A nei numeri reali

ANALOGAMENTE

si verifica facilmente che y(x)= cos(x) è soluzione di y''(x)=-y(x),

INFATTI se y(x)= cos(x), allora y'(x)=-sin(x) e quindi y''(x)= -cos(x) = - y(x)

ma anche y(x)=B cos(x) è soluzione, per ogni scelta di B nei numeri reali

ED INFINE è facile verificare che **y(x)=Asin(x)+Bcos(x)** è soluzione, per ogni scelta di A e di B nei numeri reali

AFFERMAZIONE (senza dimostrazione)

tutte e sole le soluzioni dell'equazione y''(x)=-y(x),

sono del tipo y(x)=A sin(x)+Bcos(x), con A e B reali

La famiglia delle funzioni y(x)=A sin(x)+Bcos(x), al variare di A e B nei reali è detta **soluzione generale** dell'equazione y''(x)=-y(x).

Soluzione generale di un'equazione differenziale: è la famiglia di tutte le soluzioni di un'equazione differenziale.

Come negli esempi precedenti dipende da una sola costante nel caso delle equazioni differenziali di primo grado

e dipende invece da due costanti nel caso delle equazioni differenziali di secondo grado.

ESEMPIO 3

Nell'ESEMPIO 0 abbiamo visto che le equazioni differenziali del in cui compare solo la derivata prima ma non la funzione stessa

ossia del tipo

y'(x) = f(x)

sono sostanzialmente lo stesso problema della ricerca delle funzioni primitive

Vediamo il caso in cui f(x)=3, e poi il caso in cui f(x)=K costante:

$y'(x)= 3$ ha come soluzioni $y(x)=3x+C$, C reale

più in generale

$y'(x)= K$ ha come soluzione generale $y(x)=Kx+C$, con C reale

Analogamente

$y'(x)= e^{3x}$, ha come soluzione generale $y(x)= e^{3x}/3 +C$, con C reale

----

ESEMPIO 3 bis

anche le equazioni differenziali di secondo grado del tipo

$y''(x)= f(x)$

si risolvono con lo stesso metodo, ma ci vogliono DUE passaggi,

ad esempio, per ogni valore K fissato

$y''(x)=K$

possiamo affermare (integrando) che

$y'(x) = K x + A$, con A reale

e quindi (integrando una seconda volta)

$y(x) = Kx^2/2 + A x + B$, con A e B reali

che rappresenta la soluzione generale dell'equazione differenziale di secondo grado $y''(x)=K$

IMPORTANZA DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Le equazioni differenziali servono a descrivere l'evoluzione nel tempo di fenomeni naturali: ad esempio la caduta di un oggetto:

supponiamo di lasciar cadere in nell'istante 0 un oggetto di massa 1kg da un'altezza di 10 metri.

(trascurando la resistenza dell'aria) l'unica forza alla quale è sottoposto è la forza di gravità, quindi, per la legge di Newton,

posto $y(t)$ il livello (rispetto al terreno) raggiunto dall'oggetto al tempo t si avrà che la sua accelerazione è pari alla costante g, ossia

$y''(t) = -g$,   dove $g=9,8 m/s^2$

(la forza è diretta nel verso opposto dell'asse delle y)   quindi

$y'(t) = -g\,t + C_1$,   per qualche costante C_1

e quindi

$y(t) = -gt^2/2 + C_1 t + C_2$, per qualche costante C_1, e per qualche costante C_2.

[*SI NOTI che le dimensioni sono state omesse, ma dimensionalmente tutto funziona:*

y(t) è misurata in metri, g in metri diviso secondi al quadrato, ma è moltiplicata per t^2*, che si suppone misurato in secondi, e quindi si ottengono metri*]

Per determinare le due costanti C_1 e C_2 possiamo/dobbiamo imporre le condizioni

$y(0)=10$ e $y'(0)=0$ (abbiamo semplicemente lasciato cadere l'oggetto)

e quindi

$10 = y(0) = -g0^2/2 + C_1\, 0 + C_2 = C_2$

da cui $C_2 = 10$

e

$0 = y'(0) = -g\, 0 + C_1, = C_1$,

da cui $C_1 = 0$

e la SOLUZIONE è QUINDI $y(t) = -gt^2/2 + 10$

e in tal caso l'oggetto tocca terra nell'istante in cui y(t)=0 ossia per t tale che

$0=y(0)=-gt^2/2+10$ cioè $10= g\, t^2/2$ ossia $t^2= 20/g$ = quindi $t=(20/9,8)^{1/2}$ =1,43 secondi CIRCA

SE INVECE AVESSIMO LANCIATO (verso l'alto) L'OGGETTO IN VERTICALE CON UNA VELOCITA' di 3m/s allora avremmo dovuto imporre le condizioni

$y(0)=10$ e $y'(0)=3$

da cui avremmo ottenuto di nuovo

$10 = y(0) = -g0^2/2 + C_1\, 0 + C_2 = C_2$, da cui $C_2 = 10$

e

$3 = y'(0) = -g\, 0 + C_1, = C_1$,   da cui $C_1 = 3$, e quindi la SOLUZIONE sarebbe stata

$y(t)= - gt^2/2 + 3 t+ 10$

e in tal caso l'oggetto tocca terra nell'istante in cui $y(t)=0$ ossia per t tale che

$0=y(0)=- gt^2/2+3t+10$ cioè $g t^2 -6t-20=0$ ossia $t_1,t_2 = [3\pm (9+20*9,8)^{1/2}]/9,8$ quindi

(ovviamente scegliamo la soluzione positiva)

$t= [3+ (9+20*9,8)^{1/2}]/9,8 =1,77$ secondi CIRCA

(e quindi, come c'era da aspettarsi, ci mette più tempo rispetto al caso precedente)

Successioni numeriche: progressioni aritmetiche e progressioni geometriche.

Facciamo un passo indietro e vediamo come le successioni aritmentiche e quelle geometriche

possono essere pensare come MODELLI DI EVOLUZIONE, MA A TEMPO DISCRETO, ovvero

forma ricorsiva e interpretazione come equazioni alle differenze: analogia con il caso continuo

Richiamo:

una successione è una funzione dall'insieme dei numeri naturali a valore nell'insieme dei numeri reali

NOTAZIONE x(n) oppure x_n

PROGRESSIONI ARITMETICHE

$S(n) = S + n d$, $n = 0, 1, 2, ..., n, ...$

PROGRESSIONI GEOMETRICHE

$C(n) = C q^n$, $n = 0, 1, 2, ..., n, ...$ (q diverso da 1)

STUDIO DELLE PROGRESSIONI ARITMETICHE

$S(n) = S + n d$, $n = 0, 1, 2, ..., n, ...$

ovvero

$S(0)=S$ (primo termine della progressione aritmetica)

$S(1)= S+d$ (secondo termine della progressione aritmetica)

$S(2)= S+2d$ (terzo termine della progressione aritmetica)

$S(3)= S+3d$ (quarto termine della progressione aritmetica)

e così via

S è detto primo termine della progressione aritmetica

d è detto RAGIONE o DIFFERENZA della progressione aritmetica

il motivo del nome differenza è facilmente spiegabile, infatti

$d=S(1)-S(0)= S(2)-S(1)= S(3)-S(2)=.....= S(n)-S(n-1)$

ANZI in effetti possiamo affermare che

$S(n) =S + n d$

è una soluzione dell'equazione alle differenze

$x(n)-x(n-1)= d$ OVVERO EQUIVALENTEMENTE $x(n)= x(n-1)+d$

e che la soluzione generale della precedente equazione è

$x(n) = n d +C$

Infatti, posto $C=x(0)$ si ha

$x(0) = C$,

$x(1) = x(0) + d = C + d$

$x(2) = x(1) + d = [x(0) + d] + d = x(0) + 2 d = C + 2 d$

$x(3) = x(2) + d = [x(0) + 2 d] + d = x(0) + 3 d = C + 3 d$

e così via

SI NOTI l'analogia della equazione alle differenze

$x(n)-x(n-1)= d$ con soluzione generale $x(n) = C + n d$

con l'equazione differenziale $y'(t) = K$ con soluzione generale $y(t) = C + K t$

UN ALTRO PROBLEMA interessante è trovare la formula della somma dei primi n termini di una progressione aritmetica ossia della somma

$S(0) + S(1) + S(2) + ...+ S(n-1) =$

$= S + (S + d) + (S + 2 d) + (S + 3d) + ... + (S + (n-1) d)$

$= S + S+ S + S+... + S +$ (n addendi)

$+ 0 +1 d + 2 d+ 3 d+ ... + (n-1) d =$ (n addendi incluso lo zero)

$= n S + d [1 + 2 + 3 + ... + (n-1)] =$

$= n S + d (n-1) n/2$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la formula

$1+2+...+m = m(m+1)/2$

SI NOTI l'analogia con la formula:

$\int_0^t(H+ K x) dx = H t + K t^2/2$

STUDIO DELLE PROGRESSIONI GEOMETRICHE

$C(n) = C q^n$, $n = 0, 1, 2, ..., n, ...$ (q diverso da 1)

si vede facilmente che C(n) è soluzione dell'equazione alle differenze

$x (n) - x(n-1) = (q -1) x(n-1)$

OVVERO, EQUIVALENTEMENTE

$x(n) = q x(n-1)$

INFATTI

$C(n) = C q^n = C q^{n-1} q = C(n-1) q = q C(n-1)$

D'altra parte si vede facilmente che, posto C=x(0), le soluzioni di

$x(n) = q x(n-1)$

è data da $x(0) q^n = C q^n$, infatti

$x(0)= C$

$x(1)= q x(0) = q C = C q^1$,

$x(2)= q\ x(1) = q\ C\ q^1 = C\ q^2$,

$x(3)= q\ x(2) = q\ C\ q^2 = C\ q^3$,

e così via

SI NOTI l'analogia con l'equazione differenziale

$y'(t)= a\ y(t)$ la cui soluzione generale è $y(t)= C\ e^{at}$,

[come si verifica facilmente: $(d/dt)\ y(t)= C\ a\ e^{at}= a\ C\ e^{at}= a\ y(t)$]

ALTRO PROBLEMA INTERESSANTE: calcolare la somma dei primi n termini di una progressione geometrica, ossia calcolare

$C(0) + C(1) + C(2) + ... + C(n-1) =$

$= C + C\ q^1 + C\ q^2 + ...+ C\ q^{n-1} =$

$= C\ [\ 1+ q^1 + q^2 + ...+ q^{n-1}] =$

$= C\ [1- q^n\ ]/(1-q) = C\ [q^n -1]/(q-1)$ ATTENZIONE C'ERA UN ERRORE DI STAMPA!!!

(ovviamente la prima forma si usa per $q<1$ e la seconda per $q >1$,

di modo che il denominatore è sempre positivo)

dove l'ultima uguaglianza è dovuto al fatto che

$1+ q^1 + q^2 + ...+ q^{n-1} = [1- q^{n-1}\ ]/(1-q)$

INFATTI

da una parte

$1+ q^1 + q^2 + ...+ q^{n-1} +q^n = \boldsymbol{[1+ q^1 + q^2 + ...+ q^{n-1}\ ]} + q^n$

dall'altra parte

$1+ q^1 + q^2 + ...+ q^{n-1} +q^n = 1+ [q^1 + q^2 + ...+ q^{n-1} + q^n\ ]=$

$= 1+ q\ \boldsymbol{[1+ q^1 + q^2 + ...+ q^{n-1}\ ]}$

QUINDI

$[1+q^1+q^2+\ldots+q^{n-1}]+q^n=1+q^1+q^2+\ldots+q^{n-1}+q^n=$

$=1+q\,[1+q^1+q^2+\ldots+q^{n-1}]$

OVVERO

$[1+q^1+q^2+\ldots+q^{n-1}]+q^n=1+q\,[1+q^1+q^2+\ldots+q^{n-1}]$

DA CUI,

$[1+q^1+q^2+\ldots+q^{n-1}]-q\,[1+q^1+q^2+\ldots+q^{n-1}]=1-q^n$

OVVERO

$[1+q^1+q^2+\ldots+q^{n-1}]\,(1-q)=1-q^n$

e quindi, SE q è diverso da 1,

$1+q^1+q^2+\ldots+q^{n-1}=[1-q^n]/(1-q)$

mercoledì 16 dicembre ore 15-17

Dopo aver rivisto quanto fatto nella lezione di lunedì, abbiamo notato l'analogia della somma delle progressioni geometriche con l'integrale tra 0 e t della funzione

$y(t)=C\,e^{at}$, soluzione dell'equazione $y'(t)=a\,y(t)$

infatti

una progressione geometrica $x(n)=Cq^n$

è soluzione dell'equazione alle differenze

$x(n)-x(n-1)=(q-1)\,x(n-1)$

e

$\sum_{k=0}^{n-1} C\,q^k=C\,[q^n-1]/(q-1)$

e

$\int_0^t Ce^{ax}dx=C\,e^{ax}|_0^t/a=C\,[e^{at}-1]/a$

L'analogia diviene più evidente quando si osserva che, per $q>0$,

posto $q=e^a$, ossia $a = \ln(q)$

si ha $Cq^k = C\, e^{ak}$,

e quindi una progressione geometrica cresce esponenzialmente per $q>1$ e descresce esponenzialmente per $0<q<1$

(quando q è negativa invece Cq^k cambia segno a seconda se k è pari o dispari)

COMMENTO SUGLI ESERCIZI D13 e D14 del FOGLIO 8 dell'Eserciziario

D13 La concentrazione di un farmaco nel sangue **diminuisce nell'unita' di tempo del 6%.** Si supponga uguale a 1 la concentrazione iniziale al tempo
$t = 0$. La funzione che descrive l'andamento della concentrazione e'

13A $C(t) = e^{-0,06t}$ Risposta esatta.

13B $C(t) = (1,06)^t$

13C $C(t) = e^{-0,94t}$

13D $C(t) = e^{-1,06t}$

13E $C(t) = (-0,06)^t$

D. 14 La concentrazione di un farmaco nel sangue **diminuisce nell'unita' di tempo del 6%.** Si supponga uguale a 1 la concentrazione iniziale al tempo
$t = 0$. La funzione che descrive l'andamento della concentrazione e'

14A $C(t) = (0,94)^t$ Risposta esatta.

14B $C(t) = (1,06)^t$
14C $C(t) = e^{-0,94t}$
14D $C(t) = e^{-1,06t}$

14E $C(t) = (-0,06)^t$.

A PRIMA VISTA SI RIMANE SCONCERTATI, ma c'è una spiegazione:

in realtà nell'equazione $y'(t)=a\, y(t)$ il coefficiente a rappresenta il **tasso di variazione a tempo continuo** o anche **tasso istantaneo di variazione** mentre nell'equazione $x(n) - x(n-1)= (q-1)\, x(n-1)$ il coefficiente $r = q-1$ rappresenta il tasso di variazione a tempo discreto

si parla poi di **tasso (istantaneo) di crescita se *a >0*** nel caso a tempo continuo

e di **tasso di crescita a tempo discreto *q-1>0* (ovvero se *q>1*)** (ovviamente nel caso a tempo discreto)

e di **tasso (istantaneo) di decrescita b, con b>0, se a=-b<0 ,** nel caso a tempo continuo

e di **tasso di decrescita a tempo discreto p, con p>0 se *-1<q-1<0* (ovvero se 0<*q<1*)** , (ovviamente nel caso a tempo discreto)

Quindi D13 si riferisce al caso a tempo continuo, mentre D14 si riferisce al caso a tempo continuo.

TUTTAVIA ANCHE SE I TESTI DEGLI ESERCIZI NON SPECIFICANO se siamo a tempo continuo o a tempo discreto, va sottolineato che dalle risposte si capisce che l'unica risposta possibile è quella vicino alla quale c'è scritto risposta esatta:

esaminiamo l'esercizio D 13:

13A $C(t) = e^{-0,06t}$ PLAUSIBILE se si interpreta la frase **diminuisce nell’unita’ di tempo del 6%** come il tasso istantaneo di decrescita vale 0,06=6%

13B $C(t) = (1,06)^t$ va scartata perché (a tempo discreto) è una funzione crescente

13C $C(t) = e^{-0,94t}$ va scartata perché (a tempo continuo) è una funzione con tasso (istantaneo) di decrescita 0,94 e NON 0,06(=6%)

13D $C(t) = e^{-1,06t}$ va scartata perché (a tempo continuo) è una funzione con tasso (istantaneo) di decrescita 1,06 e NON 0,06(=6%)

13E $C(t) = (-0,06)^t$ va scartata perché (a tempo discreto) è una funzione che cambia segno e non avrebbe significato in questo contesto

esaminiamo l'esercizio D 14:

14A $C(t) = (0,94)^t$ PLAUSIBILE se si interpreta la frase **diminuisce nell’unita’ di tempo del 6%** come il tasso discreto di decrescita vale 0,06=6%

e quindi q-1=- 0,06 da cui q=1-0,06= 0,94

14B $C(t) = (1,06)^t$ va scartata perché (a tempo discreto) è una funzione crescente

14C $C(t) = e^{-0,94t}$ va scartata perché (a tempo continuo) è una funzione con tasso (istantaneo) di decrescita 0,94 e NON 0,06(=6%)

14D $C(t) = e^{-1,06t}$ va scartata perché (a tempo continuo) è una funzione con tasso (istantaneo) di decrescita 1,06 e NON 0,06(=6%)

14E $C(t) = (-0,06)^t$. va scartata perché (a tempo discreto) è una funzione che cambia segno e non avrebbe significato in questo contesto

----

sono stati svolti diversi esercizi ed esempi: tra i quali DA FOGLIO 2 dell'Eserciziario

D7, D11, D27

in particolare per il D27: I primi tre termini di una progressione geometrica sono, nell'ordine, k-3, 2k-4, 4k-3.

La ragione della successione e':

va usato il fatto che essendo C(0)=C, C(1)=C q, e C(2)= C q^2,

il valore cercato q, ossia il valore della ragione della progressione geometrica, è uguale a

q= C(1)/C(0) , ma anche C(1)/C(0)

Dal testo sappiamo che C(0)=k-3, C(1)=2k-4, C(2)=4k-3 .

uguagliando C(1)/C(0) = C(2)/C(1) ossia (2k-4)/(k-3)= (4k-3)/(2k-4) si ottiene k=7 e quindi q= C(1)/C(0)=(2k-4)/(k-3) = 5/2

[SI CONSIGLIA DI CONTROLLARE SE LO STESSO RISULTATO VIENE PONENDO q=C(2)/C(1)= (4k-3)/(2k-4): se non venisse vorrebbe dire che abbiamo commesso un qualche errore...]

si consiglia di svolgere gli esercizi D12, D13, D17, D18, D19, D 20, D25, D31, D 32, D35, D 36, D37

giovedì 17 dicembre ore 13-15

ATTENZIONE QUESTA PARTE COMPRENDE ANCHE ARGOMENTI NON ANCORA SVOLTI

ESEMPI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1) Equazione differenziale del tipo **dy/dx= k y/x**

con soluzione generale $\mathbf{y(x)=Cx^k}$: soluzione per verifica

INFATTI $\mathbf{y'(x)=C\,k\,x^{k-1} = k\,C\,x^k/x = k\,y(x)/x.}$

2) Equazione differenziale del tipo **dy/dx= a y(1-y)** , con a>0 e con la richiesta che 0<y<1,

con soluzione generale $\mathbf{y(x)=1/(1+Ce^{-ax})}$: soluzione per verifica, solo per C>0 (così la funzione y(x) è definita per ogni x e vale $0<y(x)<1$)

INFATTI, ricordando che $(d/dx)[1/f(x)]= - f'(x)/f^2(x)$

$y'(x)= - [C e^{-ax} (-a)]/ [1+ C e^{-ax}]^2= (1/[1+ C e^{-ax}]) ([a C e^{-ax}] /[1+ C e^{-ax}])$

$= y(x) a (1-y(x)) = a y(x) (1-y(x))$

in quanto

$a(1-y(x))= a (1- 1 /[1+ C e^{-ax}]) = a ([1+ C e^{-ax} -1] /[1+ C e^{-ax}])= a C e^{-ax} /[1+ C e^{-ax}]$

Studio delle soluzioni $\mathbf{y(x)=1/(1+Ce^{-ax})}$ al variare di $C>0$, ossia

a) la funzione è definita per ogni x e vale $0<y(x)<1$ per ogni x

b) la funzione è crescente su tutto R, infatti

$y'(x)= a y(x) (1-y(x)) >0$ [in quanto $a>0$, $y(x)>0$ e $1-y(x)>0$]

c) COMPORTAMENTO AI BORDI

$\lim_{x\to+\infty} y(x)= \lim_{x\to+\infty} 1/[1+ C e^{-ax}] =1/[1+0]=1$

$\lim_{x\to-\infty} y(x)= \lim_{x\to-\infty} 1/[1+ C e^{-ax}] (=1/[1+\infty])=0$

d) PUNTI DI FLESSO, CONCAVITA' e CONVESSITA'

per trovare i punti di flesso e studiare la concavità e la convessità di y(x) bisogna calcolare la derivata seconda e studiarne il segno,

ma invece di calcolarla esplicitamente utilizziamo l'equazione differenziale che la funzione y(x) soddisfa, come illustrato qui sotto:

$y''(x)= (d/dx) y'(x) = (d/dx) a y(x) (1-y(x)) = a(d/dx)[y(x) - y^2(x)]$

$= a [y'(x)-2y(x)y'(x)]= a y'(x) [1-2y(x)]$

ora si vede immediatamente che essendo a> e $y'(x)>0$ [come visto nel punto b)]

$y''(x) >0$ se e solo se $1-2y(x) >0$ ossia la funzione è convessa se e solo se $y(x)<1/2$, è concava se e solo se $y(x) >1/2$ ed ha un flesso se e solo se $y(x)=1/2$

INFINE a soluzione di $y(x)=1/2$ equivale a trovare x tale che

$1/[1+ C e^{-ax}] =1/2$ cioè $1+ C e^{-ax} = 2$ cioè $C e^{-ax} = 1$

cioè (moltiplicando ambo i membri dell'uguaglianza per e^{ax})

$C = e^{ax}$, ed infine si ottiene che l'unico punto di flesso è $x=\ln(C)/2$

ATTENZIONE $y(x)=1/(1+Ce^{ax})$ è soluzione dell'equazione $dy/dx= - a\, y(1-y)$

Enunciato (parziale) del **Teorema di Cauchy** sull'esistenza e unicità delle soluzioni di un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine in forma normale **$y'(x) = \Phi(x,y(x))$ con condizione iniziale $y(x_0)=y_0$.**

SOTTO OPPORTUNE CONDIZIONI sulla funzione $\Phi(x,y)$, esiste ed è unica la soluzione di $y'=\Phi(x,y)$ con condizione iniziale $y(x_0)=y_0$.

METODO GENERALE PER TROVARE LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY di ordine 1:

data una soluzione generale, che dipende da una costante C (o meglio da un parametro C) ,
si deve imporre la condizione che $y(x_0)=y_0$, e trovare il valore C:
il teorema di Cauchy ci garantisce che si trova sempre una e una sola soluzione.

ESEMPIO la soluzione di $y'(x)= 3\, y(x)\, (1-y(x))$ con $y(1)=3/4$ è quella funzione

$y(x)= 1/[1+ C e^{-3x}]$ tale che $y(1)= 1/[1+ C e^{-3}] =3/4$ ossia $1+ C e^{-3}= 4/3$, ossia $C=e^3/3$, e la soluzione cercata è

$y(x)= 1/[1+ (e^3/3) e^{-3x}]= 3/[3+ e^{-3(x-1)}]$

METODO GENERALE PER TROVARE LA SOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY di ordine 2:

ossia del problema del tipo **$y''(x)=\Phi(x,y(x), y'(x))$ con condizioni iniziali $y(x_0)=y_0$ e $y'(x_0)=y'_0$.**

Data una soluzione generale, che dipende da due costanti A e B, imporre le condizioni che $y(x_0)=y_0$ e $y'(x_0)=y'_0$, e trovare i valori A e B:

il teorema di Cauchy ci garantisce che si trova sempre una e una sola coppia (A,B) che individua la soluzione cercata.

Nel libro si accenna al caso in cui **invece delle condizioni del tipo $y(x_0)=y_0$ e $y'(x_0)=y'_0$**, si richiedono condizioni del tipo **$y(x_0)=y_0$ e $y(x_1)=y_1$.**

In questo caso PUO' SUCCEDERE che ci sia una sola soluzione, oppure nessuna o infinite.

Come esempio abbiamo visto il caso dell'equazione del tipo

$y''(x)=- k\, y(x)$ con $k>0$

la cui soluzione generale è

$$y(x)= A \sin(\sqrt{k}\, x) + B \cos(\sqrt{k}\, x).$$

Considerando che

$$y'(x)= A \cos(\sqrt{k}\, x)\, \sqrt{k} - B \sin(\sqrt{k}\, x)\, \sqrt{k}\ .$$

e che quindi

$$y(x_0)= A \sin(\sqrt{k}\, x_0) + B \cos(\sqrt{k}\, x_0),$$

e

$$y'(x_0)= A \cos(\sqrt{k}\, x_0)\, \sqrt{k} - B \sin(\sqrt{k}\, x_0)\, \sqrt{k},$$

imporre la condizione $y(x_0)=y_0$ **e** $y'(x_0)=y'_0$,

significa risolvere il seguente sistema di due equazioni nelle due incognite A e B

$$A \sin(\sqrt{k}\, x_0) + B \cos(\sqrt{k}\, x_0)=y_0,$$

$$A \cos(\sqrt{k}\, x_0)\, \sqrt{k} - B \sin(\sqrt{k}\, x_0)\, \sqrt{k}= y'_0,$$

la cui matrice è

$$\begin{matrix} \sin(\sqrt{k}\, x_0) & \cos(\sqrt{k}\, x_0) \\ \cos(\sqrt{k}\, x_0)\, \sqrt{k} & -\sin(\sqrt{k}\, x_0)\, \sqrt{k} \end{matrix}$$

con determinante

$$-\sin^2(\sqrt{k}\, x_0)\, \sqrt{k} - \cos^2(\sqrt{k}\, x_0)\, \sqrt{k}= -\sqrt{k}\left(\sin^2(\sqrt{k}\, x_0) + \cos^2(\sqrt{k}\, x_0) \right) = -\sqrt{k} \neq 0$$

e quindi esiste sempre una e una sola soluzione (come del resto ci garantisce il teorema di Cauchy)

INVECE se proviamo ad imporre le condizioni "al bordo" del tipo $y(x_0)=y_0$ **e** $y(x_1)=y_1$, **otteniamo il sistema**

$$A \sin(\sqrt{k}\, x_0) + B \cos(\sqrt{k}\, x_0) = y_0,$$

$$A \sin(\sqrt{k}\, x_1) + B \cos(\sqrt{k}\, x_1) = y_1,$$

la cui matrice è

$$\begin{matrix} \sin(\sqrt{k}\, x_0) & \cos(\sqrt{k}\, x_0) \\ \sin(\sqrt{k}\, x_1) & \cos(\sqrt{k}\, x_1) \end{matrix}$$

con determinante

$\sin(\sqrt{k}\, x_0) \cos(\sqrt{k}\, x_1) - \cos(\sqrt{k}\, x_0) \sin(\sqrt{k}\, x_1) = \sin(\sqrt{k}\, x_0 - \sqrt{k}\, x_1)$

che può essere nullo o non a seconda dei valori di $\sqrt{k}$, x_0 e x_1

e quindi **NON E' DETTO CHE abbia una e una sola soluzione, ossia ce ne è una e una sola se $\sin(\sqrt{k}\, x_0 - \sqrt{k}\, x_1) \neq 0$**,

mentre se $\sin(\sqrt{k}\, x_0 - \sqrt{k}\, x_1) = 0$ potrebbe non avere soluzione o invece potrebbe accadere che ne abbia infinite (dipende dai valori di y_0 e y_1)

----

l'equazione $y'(t)=ay(t)$ ha soluzione generale $y(t)=C\, e^{at}$, se si impone la condizione iniziale $y(t_0)=y_0$, si ottiene che

$y(t_0)=C\, e^{at_0}$, da cui $y_0 = C\, e^{at_0}$,

ovvero

$C= y_0\, e^{-at_0}$,

ed in definitva

$y(t)=y_0\, e^{-at_0}\, e^{at} = y_0\, e^{a(t-t_0)}$,

ESERCIZIO D. 34 del FOGLIO 2 ricordando che l'equazione del decadimento radiottivo

è del tipo $y'(t)=-\lambda y(t)$ (con $\lambda>0$) per cui la soluzione è

$y(t)=C\, e^{-\lambda t}$, (dove $C= y(0)$) e quindi il tempo di dimezzamento si può trovare come il tempo T tale che

$y(T)=y(0)/2$ cioè tale che

$C\, e^{-\lambda T} = C/2$ OVVERO $e^{-\lambda T} = 1/2$ OVVERO $e^{\lambda T} = 2$ da cui $\lambda T=\log(2)$ e quindi

se λ è noto possiamo trovare T [$= \log(2)/\lambda$] e viceversa se T è noto possiamo trovare λ [$= \log(2)/T$]

OSSERVAZIONE/ suggerimento: per risolvere l'esercizio può essere anche utile osservare che il tempo S in cui la sostanza diventa un quarto rispetto al valore iniziale è invece tale che

$C\, e^{-\lambda S} = C/4$ OVVERO $e^{-\lambda S} = 1/4$ OVVERO $e^{\lambda S} = 4$ da cui $\lambda S=\log(4)= 2\log(2)$ e quindi $S=2T$

METODI DI SOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DIFFERENZIALI

1) Equazioni differenziali a variabili separabili OSSIA del tipo

$y'(x)= g(x)\, h(y)$

Per la spiegazione di questo metodo bisogna ricordare la nozione di differenziale di una funzione $f(x)$ e riscritto il metodo di integrazione per sostituzione con l'uso dei differenziali.

(TRA L'ALTRO QUESTO FATTO SPIEGA IL NOME DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI)

DEFINIZIONE Data una funzione derivabile $f(x)$, con derivata continua, si chiama differenziale di $f(x)$ l'espressione **$df(x)= f'(x)dx$**

SIGNIFICATO GEOMETRICO del differenziale: fissato x_0, l'equazione della retta tangente in x_0, è $y(x)-f(x_0)=f'(x_0)\,(x-x_0)$, ovvero

$$y(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0)$$

ed in particolare $y(x_0)=f(x_0)$. Se consideriamo la differenza della retta tangente nei punti $x_0+\Delta x$ e x_0, ossia $y(x_0+\Delta x) -y(x_0)$, si ha che

$$y(x_0+\Delta x) -y(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x_0+\Delta x-x_0) - f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x$$

Prendendo un x generico al posto di x_0 e dx al posto di Δx otteniamo che

$$\mathbf{y(x+dx) -y(x) = f'(x)\,dx = df(x)}$$

e QUINDI il **significato geometrico del differenziale come incremento della retta tangente nell'intervallo di estremi x e x+dx**

Questa notazione permette di riscrivere la regola di integrazione per sostituzione in modo più " accattivante"

Supponiamo che $\int \varphi(x)\, dx = \Phi(x) +C$

(ma possiamo anche scrivere $\int \varphi(t)\, dx = \Phi(t) +C$)

e che $f(x)$ sia una funzione derivabile, con derivata continua, allora sappiamo che

$$\int \varphi(f(x))\, f'(x)dx = \Phi(f(x)) +C = \Phi(t)|_{t=f(x)} +C$$

ora, usando il differenziale possiamo riscrivere questa formula come

$$\int \varphi(f(x))\, f'(x)dx = \int \varphi(f(x))\, df(x) = \int \varphi(f)\, df\,|_{f=f(x)} .$$

QUESTO MODO DI SCRIVERE CI SARA' UTILE PER SCRIVERE PIU' SEMPICEMENTE il METODO DI SOLUZIONE PER LE EQUAZIONE A VARIABILI SEPARABILI.

INFATTI un'equazione del tipo

$$y'(x)= g(x)\, h(y(x))$$

equivale a $y'(x)\, dx = g(x)\, h(y(x))\, dx$ ovvero a $[y'(x)\, dx]/ h(y(x)) = g(x)\, dx$

e quindi i due integrali indefiniti sono uguali ossia

$\int [1/ h(y(x))]\, y'(x)\, dx = \int g(x)\, dx$ che possiamo esprimere anche come

$$\int [1/ h(y(x))]\, dy(x) = \int g(x)\, dx$$

o brevemente come

$$\int [1/ h(y)]\, dy\, |_{y=y(x)}= \int g(x)\, dx$$

di conseguenza, posto **H(t) una primitiva di 1/h(t)** e **G(x) una primitiva di g(x)** si ottiene

$$H(y(x))= G(x) + C$$

e **SE LA FUNZIONE H è INVERTIBILE**

per ottenere la funzione y(x) basta applicare a entrambi i membri della precedente uguaglianza la funzione H^{-1}

ottenendo così la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y(x)= H^{-1} (H(y(x))) = H^{-1}(G(x) + C)$$

ESEMPIO
1) calcolo della soluzione dell'equazione $dy/dx= k\, y/x$ (per x>0) che è a variabili separabili:

$dy/y=kdx/x$ da cui $\int [1/ y(x)]\, dy(x) = \int k\, [1/x]\, dx$ **ovvero** $\log(|y(x)|) = k \log(x)+c$ **ovvero** $|y(x)|=x^k e^c$

a questo punto possiamo osservale che |y(x)| è sempre diverso da zero e quindi la soluzione non può cambiare segno
e quindi la solzuione generale è $y(x)=C\, x^k$, (per x>0) dove $C= + e^c$, oppure $C= -e^c$, a seconda del segno di y.

Per calcolare la soluzione del problema di Cauchy si può procedere come al solito: data la soluzione generale del problema si impone la condizione iniziale

2) Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti non costanti ossia del tipo

$$a(x)y'(x) + b(x)\, y(x) + c(x) = 0$$

con **$a(x)\neq 0$** (ALTRIMENTI NON è un'equazione differenziale)

e quindi equivalente a

$y'(x) + [b(x)/a(x)]\ y(x) + [c(x)/a(x)] = 0$

cioè, posto **$B(x)=b(x)/a(x)$ e $C(x)=c(x)/a(x)$,** equivalente a

$y'(x) + B(x)\ y(x) + C(x) = 0$

(a) CASO OMOGENEO (cioè $C(x)=0$) e quindi a variabili separabili

(b) CASO GENERALE (cioè $C(x)$ non necessariamente nullo) con il metodo della variazione delle costanti (ideato da Lagrange)

Il metodo è spiegato sul libro

(a) CASO OMOGENEO (cioè C(x)=0) e quindi a variabili separabili

l'equazione omogenea è **$y'(x) + B(x)\ y(x) = 0$**

che è a variabili separabili ossia $y'(x)/y(x)=-B(x)$ che equivale a

$dy/y=-B(x)dx$ cioè $\int dy/y = - \int B(x)dx$

e quindi, se $F_B(x)$ è una primitiva di $B(x)$, cioè $(d/dx)F_B(x)=B(x)$,

$\ln|y(x)| = - F_B(x) +c$

(equivalentemente, come sul libro, si scrive anche $\ln|y(x)| = - \int B(x)dx +c$)

da cui, posto $C=e^c$, (e quindi $C>0$)

$|y(x)| = e^{\ln|y(x)|} = e^{- F_B(x) +c}= C\ e^{- F_B(x)}$

(o anche, come sul libro, $|y(x)| = C\ e^{- \int B(x)dx}$)

ora ci accorgiamo che si può tolgiere il valore assoluto e si ottiene che la soluzione generale è

$y(x) = C\ e^{- F_B(x)}$ (o anche $y(x)= C\ e^{- \int B(x)dx}$),

con C che può assumere un qualunque valore reale (senza la restrizione che $C>0$)

venerdì 18 dicembre ore 11-13 NON C'E' L'AULA

lunedì 21 dicembre ore 15-17

Equazione lineare del primo ordine non omogenea

$y'(x) + B(x)\, y(x) + C(x) = 0$

dopo aver ricordato come si trova la soluzione nel caso C(x)=0, abbiamo visto

(b) CASO GENERALE (cioè C(x) non necessariamente nullo) con il metodo della variazione delle costanti (ideato da Lagrange)

Ora si cerca la soluzione dell'equazione differenziale non omogenea

$y'(x) + B(x)\, y(x) + C(x) = 0$ o equivalentemente $y'(x) = - B(x)\, y(x) - C(x)$

del tipo **$y(x)=u(x)\, e^{- F_B(x)}$**

cioè:

al posto della costante C si mette una funzione u(x) che "*varia al variare di x*"

da questa osservazione il nome di ***metodo della variazione delle costanti (o della costante)***

$y'(x) = (d/dx)[u(x)\, e^{- F_B(x)}] = u'(x)\, e^{- F_B(x)} + u(x)\, e^{- F_B(x)} (-B(x))$

$= u'(x)\, e^{- F_B(x)} -B(x)\, u(x)\, e^{- F_B(x)} = u'(x)\, e^{- F_B(x)} -B(x)\, y(x)$

e quindi la funzione $y(x)=u(x)\, e^{- F_B(x)}$ è soluzione dell'equazione $y'(x) = - B(x)\, y(x) - C(x)$ se e solo se

$u'(x)\, e^{- F_B(x)} - B(x)\, y(x) = - B(x)\, y(x) - C(x)$

ossia se e solo se

$u'(x)\, e^{- F_B(x)} = - C(x)$ cioè $u'(x) = - C(x)\, e^{F_B(x)}$

che equivale a chiedere che

$u(x)= - \int C(x)\, e^{F_B(x)}\, dx = L(x)+C$ dove L(x) è una primitiva di $C(x)\, e^{F_B(x)}$.

In definitiva la soluzione dell'equazione lineare non omogenea

$y'(x) + B(x)\, y(x) + C(x) = 0$

è data da

$y(x) = - \left(\int C(x)\, e^{F_B(x)}\, dx\right) e^{- F_B(x)} = (-L(x) +C)\, e^{- F_B(x)}$

ovvero, come sul libro,

$$y(x) = - \; e^{-\int B(x)\,dx} \left(\int C(x) \; e^{\int B(x)} dx + K\right)$$

ESEMPIO equazione differenziale $y'=A(M-y)$

OMOGENEA $y' = -Ay$ **la cui soluzione è** $y_o(x) = C\,e^{-Ax}$

(il sottoindice ci ricorda che è la soluzione dell'equazione differenziale omogenea)

cerchiamo la soluzione di $y'=AM-Ay$ del tipo

$y(x) = u(x)\,e^{-Ax}$

da cui

$y'(x) = (d/dx)[\,u(x)\;e^{-Ax}\,] =$

$= u'(x)\,e^{-Ax} + u(x)\,e^{-Ax}\;(-A) =$

$= u'(x)\;\;e^{-Ax}\;\; -A\,u(x)\,e^{-Ax}$

$= \; u'(x)\,e^{-Ax} - \; Ay(x)$

$= MA - Ay(x)$

se e solo se

$u'(x)\,e^{-Ax} \; = MA$

cioè (moltiplicando per e^{Ax} ambo i membri dell'uguaglianza)

$u'(x)\,e^{-Ax}\;e^{Ax} = MA\;\;e^{Ax}$, ossia $u'(x) = MA\,e^{Ax} = M\,(d/dx)[e^{Ax}]$

da cui $u(x)= M\,e^{Ax}+ C$

e quindi la soluzione dell'equazione non omogenea

$y'=AM-Ay$ è $y(x)= u(x)e^{-Ax} \;=\; (M\,e^{Ax}+ C)e^{-Ax} \; = M + Ce^{-Ax}$

Esempio di come ricavare un'equazione differenziale:

La legge del raffreddamento di NEWTON afferma che la velocità di raffreddamento di un corpo è proporzionale alla differenza di temperatura tra il corpo e l'ambiente.

Se la temperatura dell'ambiente è costante e vale M e β è la costante di proporzionalità, posto y(t) la temperatura del corpo al tempo t

scrivere l'equazione differenziale che soddisfa la funzione temperatura del corpo.

La velocità di raffreddamento è la derivata di y(t): il rapporto $[y(t+\Delta)-y(t)]/\Delta$ rappresenta la velocità media di raffreddamento nell'intervallo $[t, t+\Delta]$ e quindi, mandando Δ a zero si ottiene la derivata y'(t).

La differenza tra temperatura del corpo e temperatura dell'ambiente è y(t)-M

e quindi la legge di Newton ci assicura che,

$y'(t) = \beta\,(y(t)-M)$ che è del tipo **$y'=A(M-y)$ con $A=-\beta$.**

La soluzione generale è quindi $y(t)= M + Ce^{-At} = M + Ce^{\beta t}$

Supponiamo ora che la temperatura iniziale sia y(0)=M+2 (>M) e troviamo la soluzione particolare:

basta imporre $y(0)=M+Ce^{\beta 0} = M+C = M+2$, cioè C=2

da cui la soluzione particolare è

$y(t)=M +2\, e^{\beta t}$

OSSERVANDO che a seconda del segno di β si ha un comportamento diverso per t che tende all'infinito, ossia

SE $\beta>0$ ALLORA $\lim_{t\to+\infty} y(t)=\lim_{t\to+\infty} M +2\, e^{\beta t} = +\infty$

SE $\beta=0$ ALLORA $y(t)= M +2\, e^{0t} = M+2$

SE $\beta<0$ ALLORA $\lim_{t\to+\infty} y(t)=\lim_{t\to+\infty} M +2\, e^{\beta t} = M$

capiamo che il valore di β deve essere negativo: ci aspettiamo che se mettiamo un corpo in un ambiente a temperatura costante M, dopo un certo tempo anche la temperatura del corpo sarà M (ovvero talemente vicina a M da essere indistinguibile da M)

ALTRO ESERCIZIO SVOLTO vedere

D40 FOGLIO RA2. in

RISPOSTE A DOMANDE su ESERCIZI

QUI RIPORTO SOLO IL TESTO

In un lago di pesca sportiva i pesci si riproducono ad un tasso del 3% alla settimana. Ogni settimana vengono pescati 36 kg di pesce. Si supponga che al
tempo t=0 ci siano 200 kg di pesce nel lago. Si scriva l'equazione differenziale che descrive il problema.

Qual e' il valore di stabilita'? (sarebbe MEGLIO dire di EQUILIBRIO)

Si descriva l'andamento delle funzione che risolve il problema.

La quantita' di pesci nel lago aumenta o diminuisce?
Se aumenta, dopo quanto tempo raddoppia?

Se diminuisce, dopo quanto tempo il lago e' vuoto?

(vedere RISPOSTE A DOMANDE su ESERCIZI , dove si trova che la soluzione generale è $x(t)= C\,e^{Ht} - (K/H)$

ma se si richiede che x(0)=x allora la soluzione del problema di Cauchy è $x(t)= (x + (K/H))\,e^{Ht} - (K/H)$

si tratta della soluzione dell'equazione generale di un'equazione differenziale lineare del primo ordine nel caso in cui B(x)=-H e C(x)=-K

IMPORTANTE: LA SPIEGAZIONE di cosa significa **valore di equilibrio** nel caso di un'equazione del tipo $x'(t)=Hx(t)+K$ (con H diverso da 0).

Sia α tale che $H\alpha + K = 0$ ossia $\alpha = -K/H$

allora la funzione costante $x(t) = \alpha = -K/H$ è soluzione dell'equazione $x'(t)=Hx(t)+K$

infatti chiaramente si ha

da una parte che $x'(t)=0$ in quanto x(t) è costante

e dall'altra $H\,x(t)+K = H\alpha + K= 0$

e quindi banalmente vale $x'(t)=Hx(t)+K$ (entrambi i membri sono nulli)

QUESTO SIGNIFICA CHE L'UNICA SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE $x'(t)=Hx(t)+K$ con dato iniziale $x(0) = \alpha$ è la soluzione costante $x(t)=\alpha$

(l'unicità è data dal teorema di Cauchy)

in altre parole, (pensando a x(t) come al moto di un punto) se inizialmente il punto è nella posizione α di equilibrio, allora il punto non si sposta.

Per parlare di stabilità bisognerebbe controllare SE $x(t)$ tende al valore α per t che tende ad infinito.

QUESTO E' IL CASO DELL'ESERCIZIO D. 45 del Foglio 8:

Ad un paziente vengono somministrati 4 mg di un certo farmaco. Il tasso di smaltimento del farmaco
e' dell' 80% al giorno. Dopo il primo giorno, viene giornalmente somministrata una nuova dose Q = 2 mg.

La funzione che descrive lo smaltimento del farmaco nel tempo ha un andamento

decrescente e tendente all'asintoto orizzontale y = 2,5

Infatti, nell'ipotesi che

(i) il farmaco venga somministrato per via endovenosa tramite una flebo, durante tutto la giornata,

e

(ii) che il tempo sia misurato in giorni, e la quantità di farmaco in mg

1) l'equazione differenziale è

$y'(t)= -80/100\, y(t)+ 2, \; y(0)= 4$

2) ricordando che la soluzione di $x'(t)=H\, x(t)+K, x(0)=x$ è data da $x(t)= (x + (K/H))\, e^{Ht} - (K/H)$,

la soluzione particolare cercata vale

$y(t)= [4 + 2/(-8/10)]\, e^{-0.8\, t} - 2/(-8/10) = [4 - 20/8]\, e^{-0.8\, t} + 20/8 = [4 - 2{,}5]\, e^{-0.8\, t} + 2{,}5 = 1{,}5\, e^{-0.8\, t} + 2{,}5$

e quindi

la soluzione è una funzione decrescente e tende a 2,5 per t che tende a + infinito.

OSSERVAZIONE:

se invece il farmaco fosse iniettato tutto insieme ogni mattina alla stessa ora (ad esempio con un'iniezione endovenosa) allora l'andamento sarebbe invece del tipo

y'(t) = -80/100 y(t), per t in [0,1) con y(0)= 4 per cui per t in [0,1) si avrebbe $y(t)= 4 e^{-0.8 t}$

ed in particolare si avrebbe che poco prima della successiva iniezione il valore sarebbe $\lim_{t\to 1^-} 4e^{-0.8 t} = 4 e^{-0.8}$

nell'istante 1 (subito dopo l'iniezione di 2 mg del farmaco) si avrebbe invece **una situazione più complessa**

PER DARE UN'IDEA

$y(1)= 4 e^{-0.8} +2$, y'(t) = -80/100 y(t), per t in [1,2) e quindi la soluzione sarebbe invece

$y(t)= y(1) e^{-0.8 (t-1)}$,

e quindi $\lim_{t\to 2^-} y(t)= \lim_{t\to 1^-} y(1)e^{-0.8 (t-1)} =(4 e^{-0.8} +2) e^{-0.8 (2-1)} = 4 e^{-(0.8) 2} + 2e^{-0.8}$

e quindi

al tempo t=2 (subito dopo l'iniezione di 2 mg del farmaco)

$y(2) = 4 e^{-(0.8) 2} + 2e^{-0.8} +2$, y'(t) = -80/100 y(t), per t in [2,3)

e così via

è chiaro che il caso del farmaco somministrato con la flebo è più semplice da analizzare.

LE EQUAZIONI DI BERNOULLI (non sono state analizzate)

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL SECONDO ORDINE A COEFFICIENTI COSTANTI E OMOGENEE

sono equazioni del tipo

y''(x)+b y'(x) + cy(x)=0

Abbiamo controllato alcuni casi particolari in una lezione precedente:

per risolvere questa equazione si procede come segue

si considera il polinomio caratteristico associato, ossia il polinomio $\lambda^2+b\lambda+c$

e si studia l'equazione di secondo grado

$\boldsymbol{\lambda^2+b\lambda+c=0}$

(detta equazione caratteristica)

Ci possono essere tre casi

1) esistono **DUE SOLUZIONI di $\lambda^2+b\lambda+c=0$, m_1 ed m_2 DISTINTE** (o equivalentemente il discriminante **$\Delta=b^2-4c>0$** ed m_1, m_2= $-(b/2)\pm(\sqrt{\Delta})/2$

e allora la soluzione generale è

$y(x) = A\, e^{m_1 x}+B\, e^{m_2 x}$.

2) le **due soluzioni di $\lambda^2+b\lambda+c=0$ COINCIDONO ossia $m_1 = m_2 = m$ (= - b/2)** (o equivalentemente il discriminante **$\Delta=b^2-4c=0$**)

allora la soluzione generale è

$y(x)= A\, e^{m x}+B\, x\, e^{m x}$.

3) il discriminante **$\Delta=b^2-4c<0$**

(o equivalentemente, MA SOLO PER COLORO CHE CONOSCONO I NUMERI COMPLESSI, le soluzioni di $\lambda^2+b\lambda+c=0$ sono complesse e coniugate e valgono $-(b/2)\pm i\,(\sqrt{|\Delta|})/2$, dove i è l'unità immaginaria)

allora la soluzione generale è

$y(x)= e^{p x}\,[A \sin(q x) +B \cos(q x)]$,

dove $p=-b/2$ e $q=(\sqrt{|\Delta|})/2$.

ESEMPI

1) $y''(x)-y(x)=0$

qui il polinomio caratteristico è $\lambda^2-1=0$, cioè $m_1=-1$ ed $m_2=+1$

e quindi la soluzione generale è

$y(x)= A\, e^{-x}+B\, e^{+x}$.

2) $y''(x)-2y'(x)+y(x)=0$

qui il polinomio caratteristico è $\lambda^2-2\lambda+1=0$, cioè $(\lambda-1)^2=0$ e quindi $m_1=m_2=+1$

e quindi la soluzione generale è

$y(x)= A\, e^{x}+B\, x\, e^{x}$.

3) $y''(x)+y(x)=0$

qui il polinomio caratteristico è $\lambda^2+1=0$, cioè il discriminante è negativo e vale

$\Delta=b^2-4c= 0-4$ allora $p=-(b/2)=0$ e $q=(\sqrt{|\Delta|})/2= (\sqrt{4})/2)=1$,

e quindi (poiché $e^{0x}=1$) la soluzione generale è

$y(x) = A \sin(x) +B \cos(x)$

OSSERVAZIONE: per verificare che le funzioni trovate sono soluzioni, basta verificare che, ad esempio, nel caso 1),

SEPARATEMENTE che $\mathbf{e^{m_1 x}}$ è soluzione dell'equazione $y''+by'+cy=0$ e che $\mathbf{e^{m_2 x}}$ è soluzione dell'equazione $y''+by'+cy=0$

LA VERIFICA E' LASCIATA PER ESERCIZIO, ma ne riportiamo una qui alcune verifiche (NON SVOLTE A LEZIONE): supponiamo che

1) ci siano DUE SOLUZIONI di $\lambda^2+b\lambda+c=0$, m_1 ed m_2 DISTINTE, ossia $\lambda^2+b\lambda+c=(\lambda-m_1)(\lambda-m_2)$

allora

posto $y_1(x)=e^{m_1 x}$ si ha **$(y_1)'(x)=m_1e^{m_1 x} = m_1 y_1(x)$** e **$(y_1)''(x)=(m_1)^2e^{m_1 x} =(m_1)^2 y_1(x)$**

e quindi

$y_1''(x)+by_1'(x)+cy_1(x)$ = **$(m_1)^2 y_1(x) + bm_1 y_1(x) + c\, y_1(x)= y_1(x) [(m_1)^2 + bm_1 + c]=0$**

Lo stesso vale per m_2.

Se invece

le due soluzioni di $\lambda^2+b\lambda+c=0$ COINCIDONO ossia $m_1 = m_2 = m$ (= - b/2) ovvero $\lambda^2+b\lambda+c=(\lambda-m)^2=\lambda^2-2m\lambda+m^2$

ovvero $c= b^2/4$

allora controlliamo che **$y(x)=x\, e^{mx}$** è soluzione (CHE LO SIA $y(x)=e^{mx}$ è la stessa verifica del punto precedente)

e infatti

$y'(x)= e^{mx} + xme^{mx} = (1 +m x) e^{mx}$

$y''(x)= me^{mx} + me^{mx} + xm^2e^{mx} = 2\ me^{mx} + xm^2e^{mx} = (2\ m + xm^2)e^{mx}$

da cui

$y''(x)-2m\ y'(x)+m^2y(x)= (2\ m + xm^2)e^{mx}\ -2m\ (1 +m\ x)\ e^{mx}\ +m^2\ x\ e^{mx}$

$= e^{mx}\ [2\ m + xm^2 - 2m\ (1 +m\ x) + m^2\ x\ ] = e^{mx}\ [2\ m + xm^2 - 2m - 2m^2\ x + m^2\ x\ ] = e^{mx}\ 0=0$

MOTIVO PER CUI BASTA FARE LA VERIFICA UNA SOLUZIONE PER VOLTA

INFATTI se $y_1(x)$ è soluzione ossia se $(y_1)''(x)+b(y_1)'(x)+cy_1(x)=0$ allora banalmente anche $Ay_1(x)$ è soluzione

in quanto $(Ay1)'=A\ (y1)'$, e $(Ay1)''=A\ (y1)''$ e quindi $(Ay_1)''(x)+b(Ay_1)'(x)+cAy_1(x)=A[(y_1)''(x)+b(y_1)'(x)+cy_1(x)]=0$

e se $y_2(x)$ è soluzione ossia se $(y_2)''(x)+b(y_2)'(x)+cy_2(x)=0$

allora anche $y_1(x)+y_2(x)$ è soluzione

in quanto $(y_1+y_2)'= (y_1)'+(y_2)'$ e $(y_1+y_2)''= (y_1)''+(y_2)''$

e quindi

$(y_1+y_2)''(x)+b(y_1+y_2)'(x)+c(y_1+y_2)(x)$

$= (y_1)''(x)+b(y_1)'(x)+cy_1(x)+ (y_2)''(x)+b(y_2)'(x)+cy_2(x)=0+0=0$

mercoledì 23 dicembre ore 15-17 vacanza

(le lezioni riprendono giovedì 7 gennaio 2016 BUON NATALE (vedete l'ESERCIZIO di BUON NATALE matematico) e BUON ANNO!)

giovedì 7 gennaio 2016 ore 15-17

Funzioni di due variabili U(x,y), derivate parziali, differenziale di una funzione di due variabili, integrale di linea di una forma differenziale, forme differenziali esatte, integrale di linea di una forma differenziale esatta, collegamento con alcuni tipi di equazioni differenziali.

Per questa parte si veda il diario delle lezioni dello scorso anno (è stato aggiornato e corretto di piccole sviste)

alla data

venerdì 9 gennaio 2015 Cenno alle funzioni di due variabili, e ai differenziali

Uniche differenze:

Abbiamo risolto i problemi

D45 del Foglio 7

e

D7 del Foglio 8

Inoltre, come giustificazione della CONDIZIONE SUFFICIENTE AFFINCHE' UNA FORMA DIFFERENZIALE SIA ESATTA:

SE ESISTONO LA DERIVATA PARZIALE di $F_1(x,y)$ rispetto ad y e LA DERIVATA PARZIALE di $F_2(x,y)$ rispetto ad x e sono uguali e continue, cioè

$(\partial/\partial y)F_1(x,y)=(\partial/\partial x)F_2(x,y)$

allora la forma differenziale $F_1(x,y)\ dx + F_2(x,y)\ dy$ è esatta,

ossia

allora ESISTE UNA FUNZIONE U(x,y) tale che

$F_1(x,y)=(\partial/\partial x)U(x,y)$ e $F_2(x,y)=(\partial/\partial y)U(x,y)$.

abbiamo visto in un esempio che, tale condizione è ALMENO necessaria, (almeno nel caso in cui U(x,y) sia di tipo polinomiale):

(NON ABBIAMO DIMOSTRATO CHE E' SUFFICIENTE, però)

data la funzione

$U(x,y)=3x^2+5x^2y+2y^2$,

abbiamo calcolato le derivate parziali

$(\partial/\partial x)U(x,y) = 6x+10xy$,

$(\partial/\partial y)U(x,y) = 5x^2 + 4y$,

e le derivate parziali di secondo ordine

ossia

derivata seconda parziale rispetto ad x

$(\partial^2/\partial^2 x)U(x,y) = (\partial/\partial x)[(\partial/\partial x)U(x,y)\ ] = (\partial/\partial x)[6x+10xy\ ] = 6 + 10y,$

derivata seconda parziale rispetto ad y

$(\partial^2/\partial^2 y)U(x,y) = (\partial/\partial y)[(\partial/\partial y)U(x,y)\ ] = (\partial/\partial y)[5x^2 + 4y]=4$

derivata seconda parziale mista rispetto prima ad x e poi rispetto ad y

$(\partial^2/\partial y\partial x)U(x,y) =(\partial/\partial y)\ [(\partial/\partial x)U(x,y)]=(\partial/\partial y)[6x+10xy\ ] = 10\ x$

derivata seconda parziale mista rispetto prima ad y e poi rispetto ad y

$(\partial^2/\partial x\partial y)U(x,y) =(\partial/\partial x)\ [(\partial/\partial y)U(x,y)]=(\partial/\partial x)[\ 5x^2 + 4y] = 10\ x$

e abbiamo notato che le derivate parziali miste coincidono:

quindi se

ESISTE UNA FUNZIONE U(x,y) tale che

$F_1(x,y)=(\partial/\partial x)U(x,y)$ **e** $F_2(x,y)=(\partial/\partial y)U(x,y)$.

allora

$(\partial/\partial y)\ F_1(x,y)=(\partial/\partial y)[(\partial/\partial x)U(x,y)]$ **e** $(\partial/\partial x)\ F_2(x,y)=(\partial/\partial x)\ [(\partial/\partial y)U(x,y)]$

e quindi

$(\partial/\partial y)\ F_1(x,y)=(\partial/\partial y)[(\partial/\partial x)U(x,y)]=(\partial/\partial x)\ [(\partial/\partial y)U(x,y)]=(\partial/\partial x)\ F_2(x,y)$

venerdì 8 gennaio ore 11-13 ??? NON C'E' L'AULA

lunedì 11 gennaio 2016 ore 15-17

Distinzione tra Statistica descrittiva, Statistica inferenziale e Probabilità

Esempio del lancio dei dadi (vedere il file lancio di dadi (serie da 36 ciascuno))

sono stati esaminati gli esempi e le definizioni di Statistica descrittiva contenute in http://www-dimat.unipv.it/atorre/CTF2011-12/Statistica01.pdf

ed in particolare gli istogrammi, i grafici a torta, le frequenze assolute, le frequenze relative,

le frequenze assolute cumulate e le frequenze relative cumulate.

Nel caso di DATI QUANTITATIVI sono stati introdotti alcuni indici:

valore centrato, media aritmetica, mediana,

e un cenno alla media geometrica, il cui logaritmo è la media aritmetica dei logaritmi dei dati osservati

UNICA OSSERVAZIONE (nel caso di dati quantitativi):

A DIFFERENZA DELLE SLIDE della Prof. Anna Torre

gli n dati osservati sono stati denotati con

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n$,

gli n dati osservati messi in ordine crescente sono stati denotati con

$\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)}, \ldots, \xi_{(n-1)}, \xi_{(n)}$,

l'insieme degli m valori assunti è stato denotato con

$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}, x_m,\}$

$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{m-1}, f_m$, sono le frequenze assolute di $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}, x_m$, ossia $f_i = \#\{j \leq n$, tali che $\xi_j = x_i\}$

ESEMPIO osservo i pesi di 11 persone:

$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{10}, \xi_{11}$, è 59, 73, 63,71, 59, 65, 63, 59, 73, 65, 59

$\xi_{(1)}, \xi_{(2)}, \xi_{(3)}, \ldots, \xi_{(10)}, \xi_{(11)}$, è invece 59, 59, 59, 59, 63,63,65,65, 71, 73, 73

$\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}, x_m,\}$ è invece $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5,\} = \{59, 63, 65, 71, 73\}$

$f_1, f_2, f_3, \ldots, f_{m-1}, f_m$, è $f_1=4$, $f_2=2$, $f_3=2$, $f_3=1$, $f_5=2$

il valore centrale è quindi $(x_{min}+x_{max})/2 = (59+73)//2=66$

la mediana è $\xi_{(n+1/2)}$, e quindi nell'esempio $\xi_{(6)}$, ossia 63

la media aritmetica è $\underline{x}=(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\ldots+\xi_{n-1}+\xi_n)/n$ e quindi nell'esempio

(59 + 73 + 63 + 71 + 59 + 65 + 63 + 59 + 73 + 65+ 59)/11

la media aritmetica è $\underline{x}=(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\ldots+\xi_{n-1}+\xi_n)/n$ ma coincide con la media pesata

$\underline{x}=(x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+...+x_{m-1}f_{m-1}+x_mf_m)/n =x_1(f_1/n)+x_2(f_2/n)+x_3(f_3/n)+...+x_{m-1}(f_{m-1}/n)+x_m(f_m/n)$

e quindi nell'esempio coincide con

(59*4+63*3+65*2+71*1+73*2)/11= 59*(4/11) + 63 *(2/11) + 65*(2/11) + 71*(1/11)+ 73*(2/11)=64,45

ANALOGIA TRA MEDIA ARITMETICA pesata E BARICENTRO O CENTRO DI MASSA

(a lezione abbiamo visto questa analogia con la leva: ma la semplice derivazione di questo fatto non è in programma)

ATTENZIONE LA MEDIA ARITMETICA NON VA UTLIZZATA SEMPRE (COME AD ESEMPIO nel seguente esercizio)

Esericizo D1 del Foglio 9 dell'Eserciziario:

Un veicolo marcia per 50 km alla velocità v_1, e per altri 50 km alla velocità v_2. La sua velocità
sull'intero percorso di 100 km e' data da
1A La media aritmetica di v_1 e v_2
1B La media geometrica di v_1 e v_2
1C La differenza tra v_1 e v_2
1D La somma di v_1 e v_2
1E Nessuna delle precedenti   Risposta esatta.

SOLUZIONE: si tratta infatti di osservare che la velocità media è data dallo spazio percorso diviso il tempo impiegato per percorrerlo

ossia v_{media}=100km/(t_1 + t_2)

ora v_1=50km/t_1, e analogamente v_2=50km/t_2, e quindi t_1=50km/v_1, e t_2=50km/v_2,

e quindi

v_{media}=100km/(t_1 + t_2) = 100km/[(50km/v_1) +(50km/v_2)]

= 1/[(50km/v_1)(1/100km) +(50km/v_2)(1/100km)]

=1/[(1/v_1)(1/2) +(1/v_2)(1/2)]

[per conoscenza: tale valore è detto media armonica di v_1 e v_2]

Si è accennato al fatto che a volte i dati sono raggruppati in classi (con una conseguente perdita di dati)

tuttavia in questi casi si può ottenere lo stesso una media aritmetica

utilizzando il valore centrato di ciascuna classe

si veda la slide http://www-dimat.unipv.it/atorre/CTF2011-12/Statistica02.pdf

anche per come si può trovare graficamente la mediana.

Sono stati discussi gli esercizi 1 e 2 di queste slide .

martedì 12 gennaio 2016 ore 16-18 AULA A del PLESSO TECCE

Abbiamo svolto l'esercizio 3 del file

http://www-dimat.unipv.it/atorre/CTF2011-12/Statistica02.pdf

In termini generali:

se la media aritmetica dell'età di una popolazione 1 (ad esempio del NORD) con N_1 abitanti è $\underline{x}_1$,

e la media aritmetica dell'età di una popolazione 2 (ad esempio del SUD) con N_2 abitanti è $\underline{x}_2$,

ALLORA **è possibile calcolare la media aritmetica $\underline{x}$ dell'età della popolazione totale**

(ossia unendo la popolazione 1 con la popolazione 2: NORD e SUD insieme)

INFATTI POSTO

$\xi_1,\xi_2,\xi_3,\ldots, \xi_{N1-1},\xi_{N1}$, le età degli abitanti della popolazione 1

e $\xi'_1,\xi'_2,\xi'_3,\ldots, \xi'_{N2-1},\xi'_{N2}$, le età degli abitanti della popolazione 2

sia ha che

$\underline{x}_1=(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\ldots+\xi_{N1-1}+\xi_{N1})/N_1$, e $\underline{x}_2=(\xi'_1+\xi'_2+\xi'_3+\ldots+\xi'_{N2-1}+\xi'_{N2})/N_2$,

mentre la media aritmetica su tutta la popolazione è data dalla media pesata

$\underline{x} = \underline{x}_1[N_1/(N_1+N_2)] + \underline{x}_2[N_2/(N_1+N_2)]$

INFATTI

$\underline{x}=(\xi_1+\xi_2+\xi_3+...+\xi_{N1-1}+\xi_{N1}+\xi'_1+\xi'_2+\xi'_3+...+\xi'_{N2-1}+\xi'_{N2})/(N_1+N_2)$

$=(\xi_1+\xi_2+\xi_3+...+\xi_{N1-1}+\xi_{N1})/(N_1+N_2) + (\xi'_1+\xi'_2+\xi'_3+...+\xi'_{N2-1}+\xi'_{N2})/(N_1+N_2)$

$=[(\xi_1+\xi_2+\xi_3+...+\xi_{N1-1}+\xi_{N1})/(N_1+N_2)] (N_1/N_1) + [(\xi'_1+\xi'_2+\xi'_3+...+\xi'_{N2-1}+\xi'_{N2})/(N_1+N_2)](N_2/N_2)$

$=[(\xi_1+\xi_2+\xi_3+...+\xi_{N1-1}+\xi_{N1})/N_1] [N_1/(N_1+N_2)] + [(\xi'_1+\xi'_2+\xi'_3+...+\xi'_{N2-1}+\xi'_{N2})/N_2][N_2/(N_1+N_2)]$

$=\underline{x}_1[N_1/(N_1+N_2)] + \underline{x}_2[N_2/(N_1+N_2)]$

Abbiamo poi visto gli indici di dispersione in PARTICOLARE VARIANZA e SCARTO QUADRATICO MEDIO

(IMPORTANTI)

E VARIANZA CAMPIONARIA (stimata) e SCARTO QUADRATICO MEDIO CAMPIONARIO (stimato)

(si suggerisce di vedere le slide http://www-dimat.unipv.it/atorre/CTF2011-12/Statistica03.pdf)

OSSERVAZIONE dalle definizioni si vede che

VARIANZA= [(n-1)/n]VARIANZA CAMPIONARIA

e quindi per n grande si vede facilmente che [(n-1)/n] è vicino ad 1 e quindi differiscono poco.

Cenno ai quartili

ABBIAMO POI INIZIATO A INTRODURRE LA PROBABILITA'
(a partire dalle slide http://www-dimat.unipv.it/atorre/CTF2011-12/Probabilita1.pdf)
breve discussione sulle varie impostazioni (classica, frequentista, soggettivista)
e ASSIOMATICA.

DISCUSSIONE SUL RUOLO DELL'INFORMAZIONE: le probabilità cambiano A SECONDA dell'informazione che abbiamo:
(si vedano di ESEMPI 1 2 e 3 delle slide http://www-dimat.unipv.it/atorre/CTF2011-12/Probabilita1.pdf)
questo punto verrà ripreso domani .

mercoledì 13 gennaio 2016 ore 15-17

Discussione su Probabilità, Assiomi, e conseguenze: FORMULA DELLE PROBABILITA' TOTALI E FORMULA DI BAYES

(vedere le lezioni di **Giovedì 15 gennaio 2015 (dello scorso a.a. 2014-15)**

(INIZIO AGGIUNTO il 14 gennaio)

In particolare abbiamo visto un esempio di estrazione SENZA RIMBUSSOLAMENTO da un'urna contente 2 palline bianche e 3 azzurre

POSTO A_1 l'evento la prima pallina estratta è azzurra e A_2 l'evento la seconda pallina estratta è azzurra

POSTO B_1 l'evento la prima pallina estratta è bianca e B_2 l'evento la seconda pallina estratta è bianca

abbiamo osservato che $P(B_2)=P(B_1)=2/5$ in diversi modi,

ANCHE SE $P(B_2|B_1)=1/4$ e $P(B_2|A_1)=2/4=1/2$

AD ESEMPIO, CON LA FORMULA DELLE PROBABILITA' TOTALI e considerando che B_1 è il complementare di A_1

$P(B_2)= P(B_1)\ P(B_2|B_1) +P(A_1)P(B_2|A_1)= (2/5)\ (1/4) + (3/5)(2/4) =(1/10)+(3/10)=4/10=2/5$

(FINE AGGIUNTO il 14 gennaio)

abbiamo poi svolto esercizi dal file

esercizi-di statistica-PROVVISORIO

edFileed in particolare abbiamo discusso della regressione e del metodo dei minimi quadrati

(invece il problema dei TEST DIAGNOSTICI verrà discusso domani)

giovedì 14 gennaio 2016 ore 13-15 Abbiamo ripreso l'esempio (esercizi-di statistica-PROVVISORIO) sulla retta di regressione finendo i calcoli dell'esempio e mostrando che la retta di regressione dei dati di tipo y rispetto ai dati di tipo x è diversa dalla retta di regressione dei dati di tipo x rispetto ai dati di tipo y (anche se per quei dati le due rette sono molto vicine)

Abbiamo visto alcuni esempi di applicazione della formula delle probabilità totali e della formula di Bayes:

in particolare
(dalle slide della professoressa A. Torre http://www-dimat.unipv.it/atorre/CTF2011-12/Probabilita2.pdf
http://www-dimat.unipv.it/atorre/CTF2011-12/Probabilita2.pdf)

Esempio 2 Suppongo di giocare testa o croce con una persona sconosciuta. Vinco se esce testa, perdo se esce croce. A priori mi fido abbastanza della persona con cui sto giocando ed attribuisco al fatto, che possa aver truccato la moneta a suo favore, probabilità pari a 1/100.

Se perdo per 10 lanci consecutivi, il mio grado di fiducia nell’altro giocatore resta sempre lo stesso ?

Abbiamo visto come possono essere utili i grafi (ad albero) per questo tipo di problemi.

Si consiglia di vedere anche l'Esempio1 (tecnico) dell'estrazione da un'urna scelta a caso, anche se non svolto a lezione:
può essere utile per capire l'utilità della formula di Bayes)

Come altra applicazione IMPORTANTE abbiamo visto i Test Diagnostici
(si consiglia di vedere sia le slide della prof. Torre http://www-dimat.unipv.it/atorre/CTF2011-12/testdia.pdf
sia il file esercizi-di statistica-PROVVISORIO

Infine abbiamo visto come usare la distribuzione normale (anche detta gaussiana standard) e le tavole relative.

DIRE CHE LA DISTRIBUZIONE DI UNA VARIABILE STATISTICA (o di una variabile aleatoria) E' BEN APPROSSIMATA DA (o segue)

una distribuzione gaussiana di media μ e varianza σ^2, (o equivalentemente di deviazione standard σ)

significa che LA PERCENTUALE DI VALORI CHE SI TROVANO in un intervallo (a,b] è BEN APPROSSIMATA dall'area della regione compresa tra l'asse x e la funzione
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2)}{2\sigma^2}}$ nell'intervallo (a, b]

Purtroppo non c'è una formula esplicita (in termini delle funzione usuali, espenonziali, logaritmi, potenze, funzioni trigonometriche,) per calcolare tale integrale, ma ci sono delle tavole che permettono di calcolare queste aree. Nella tavola del libro vengono dati gli integrali sugli intervalli del tipo

$[\mu - u\,\sigma, \mu + u\,\sigma]$, fuori di tali intervalli, ossia in $[\mu - u\,\sigma, \mu + u\,\sigma]^c = (-\infty, \mu - u\,\sigma] \cup [\mu + u\,\sigma, \infty)$, e in intervalli del tipo $[\mu + u\,\sigma, \infty)$,

per u=0; u=0,2; u=0,4; etc... fino ad u=3,2

Guardando la tabella si nota facilmente che nelle righe relative allo stesso u,

la prima colonna, relativa all'integrale su $[\mu - u\,\sigma, \mu + u\,\sigma]$, e la seconda, relativa ll'integrale su $[\mu - u\,\sigma, \mu + u\,\sigma]^c$, sommano ad uno,

e che la colonna relativa all'integrale su $[\mu + u\,\sigma, \infty)$, è la metà di quella relativa all'integrale su $[\mu - u\,\sigma, \mu + u\,\sigma]^c = (-\infty, \mu - u\,\sigma] \cup [\mu + u\,\sigma, \infty)$,

In particolare abbiamo visto i seguenti problemi, tratti dalle slide della prof. A. Torre
http://www-dimat.unipv.it/atorre/CTF2011-12/Statistica04.pdf

Problema - Supponendo che la distribuzione dei pesi degli individui di una popolazione sia gaussiana con media μ = 61 kg e deviazione standard (scarto quadratico medio) σ = 5 kg

1. scrivere l'equazione della gaussiana relativa ai pesi di tale popolazione

2. calcolare la percentuale di individui il cui peso è compreso tra 59 kg e 63 kg

sul PUNTO 2: (trascurando di riportare i kg) si tratta di trovare u e v tali che
$59 = \mu - u\,\sigma = 61 - u\,5$, ossia $u=(61-59)/5=2/5=4/10=0{,}4$
e
$63 = \mu - v\,\sigma = 61 + v\,5$, ossia $v=(63-61)/5=2/5=4/10=0{,}4$
in questo esempio u=v in quanto l'intervallo [59,63] ha come punto medio proprio μ = 61
di conseguenza: [59,63] = [61- 0,4 *5, 61+ 0,4*5] e quindi bisogna utilizzare la tavola della distribuzione normale (o gaussiana)

relativa alla colonna $[\mu - u\,\sigma, \mu + u\,\sigma]$, per u=0,4. il numero nella tavola è 0,3108, e quindi la percentuale cercata è circa 31%.

DOMANDE COLLEGATE :

(i) qual è la percentuale delle persone che pesano più di 63 chili?

si tratta della percentuale delle persone che sono nell'intervallo $[63, \infty) = [61+ 0{,}4*5, \infty)$
e quindi bisogna utilizzare la colonna relativa agli intervalli del tipo $[\mu + u\,\sigma, \infty)$ per u = 0,4, in questo caso la tabella fornisce il numero 0, 3446, ossia la percentuale di persone che pesano più di 63 chili è circa il 34%

(ii) qual è la percentuale delle persone che pesano meno di 59 chili?

si tratta della percentuale delle persone che sono nell'intervallo $(-\infty, 59]$, che è l'intervallo simmetrico (rispetto a μ=61) all'intervallo $[63, \infty) =[61+ 0{,}4*5, \infty)$ e quindi per la simmetria rispetto a μ=61 della distribuzione gaussiana, percentuale delle persone che pesano meno di 59 chili ha lo stesso valore della percentuale di persone che pesano più di 63 chili, ossia circa il 34%,

Problema - Le altezze h di un gruppo di reclute sono distribuite con buona approssimazione secondo una curva gaussiana

con media μ = 170 cm e deviazione standard (scarto quadratico) σ□ = 5 cm. Le divise sono disponibili in 5 taglie:
1. per individui di altezza   161 cm
2. per individui di altezza compresa tra 161 e 167 cm
3. per individui di altezza compresa tra 167 e 173 cm
4. per individui di altezza compresa tra 173 e 179 cm
5. per individui di altezza > 179 cm.
Stimare il numero delle divise delle varie taglie sapendo che le reclute sono 750 .

Soluzione - Si tratta di stimare la percentuale di reclute che cade in ciascuna delle quattro differenti classi di altezza:
(h= altezza)

1. per $h \leq 161 = 170 - 1.8\,\sigma$ quindi 3.6% delle reclute (circa 750 * 3,6/100 reclute, ossia circa 27 reclute)
2. per $161 < h \leq 167$), ossia h in ($170 - 1.8\,\sigma$, $170 - 0.6\,\sigma$] quindi 24% delle reclute (circa 750 * 24/100 reclute, ossia circa 180 reclute)
3. per $167 < h \leq 173$), ossia h in ($170-0.6\,\sigma$, $170+0.6\,\sigma$] quindi 45% delle reclute (circa 750 * 45/100 reclute, ossia circa 338 reclute)
4. per $173 < h \leq 179$), ossia h in ($170+0.6\,\sigma$, $170+1.8\sigma$] quindi 24% delle reclute (circa 750 * 3,6/100 reclute, ossia circa 180 reclute)
5. per $h > 179 = 170+1.8\,\sigma$) quindi 3.6% delle reclute (circa 750 * 3,6/100 reclute, ossia circa 27 reclute)

per ottenere le percentuali bisogna procedere come segue:
AD ESEMPIO la percentuale di individui con altezza h in ($170 - 1.8\sigma$, $170 - 0.6\sigma$]
è circa uguale alla percentuale di individui con altezza in ($170 +0{,}6\,\sigma$, $170 + 1{,}8\,\sigma$]

in quanto va approssimata con l'area relativa alla funzione $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2)}{2\sigma^2}}$,
che è simmetrica rispetto a μ.
e che, per ottenere tale percentuale basta considerare che l'integrale su ($170 - 1.8\sigma$, $170 - 0.6\sigma$] U ($170 +0{,}6\,\sigma$, $170 + 1{,}8\,\sigma$]
è uguale alla differenza tra l'integrale su ($170 - 1.8\sigma$, $170 + 1{,}8\,\sigma$]
(che vale 0,9282, come si ricava dalla tabella nella colonna relativa a [μ - u σ, μ +u σ], per u=1,8)
e l'integrale su ($170 - 0.6\sigma$; $170 +0{,}6\,\sigma$]
(che vale 0,4514 , come si ricava dalla tabella nella colonna relativa a [μ - u σ, μ +u σ], per u=0,6)

In conclusione l'integrale su ($170 - 1.8\,\sigma$, $170 - 0.6\sigma$] è la metà di questa differenza ossia vale
(0,9282 - 0,4514)/2=0,4768/2=0,2384
da cui la percentuale viene il 24%.

FINE DELLE LEZIONI, ci vediamo la settimana prossima per i ricevimenti collettivi del 19 e 20 gennaio (vedere sotto)

venerdì 15 gennaio ore 11-13 NON C'E' L'AULA

DOPO LA FINE DELLE LEZIONI

martedì 19 gennaio 2016 ore 14-16, aula A del plesso TECCE
ricevimento collettivo in vista dell'esame del 22 gennaio

PER VEDERE ALCUNI DEGLI ESERCIZI DISCUSSI SU RICHIESTA DEGLI STUDENTI PRESENTI
vedere l'argomento DOMANDE DEGLI STUDENTI 2016,
DOMANDE degli STUDENTI 2016
qui sotto
SI SUGGERISCE DI VEDERE ANCHE RISPOSTE A DOMANDE su ESERCIZI
dello scorso anno accademico

mercoledì 20 gennaio 2016 ore 14-16, aula A del plesso TECCE
ricevimento collettivo in vista dell'esame del 22 gennaio

vale quanto scritto per martedì 19 gennaio 2016

- ESERCIZIO di BUON NATALE matematico File

  è solo un biglietto di auguri di BUON NATALE matematico

  e che usa le proprietà degli esponenziali e dei logaritmi

- lancio di dadi (serie da 36 ciascuno) File

  il file contiene un sunto dei dati osservati, con istogrammi e grafici a torta e alcuni calcoli di medie aritmetiche.

  I dati sono stati ottenuti lanciando 36 dadi per 19 volte.

- esercizi-di statistica-PROVVISORIO File

  Questo file contiene esercizi dal FOGLIO 9 dell'eserciziario insieme a discussioni teoriche

  il file contiene anche una discussione sulla retta di regressione e sui test DIAGNOSTICI

  QUESTA VERSIONE è provvisoria. SE TROVATE ERRORI O SVISTE o se il file richiede altre spiegazioni,

  mettetevi in contatto con la docente, GRAZIE

-

Domande di studenti 2016

DI SEGUITO LE RISPOSTE A DOMANDE SUGLI ESERCIZI, di ALCUNI STUDENTI ALCUNE SONO RISPOSTE A QUESITI POSTI PER POSTA ELETTRONICA, ALTRI SONO STATI DISCUSSI IN CLASSE.

FOGLIO 9 (STATISTICA) D. 22 Si consideri la retta di regressione che meglio approssima i tre punti A(0,0), B(1,1), C(2,1).
La **distanza verticale** tra B e il punto di ascissa 1 della retta di regressione e'
22A 1/3 Risposta esatta.
22B 1
22C 2

22D 1/2
22E 0

ATTENZIONE: il termine distanza verticale non sarebbe necessario, ma viene usato per CHIARIRE che NON si tratta delle DISTANZA tra il punto B e la retta di regressione, ma tra il punto B e il punto appartenente alla retta di regressione, che ha la stessa ascissa del punto B (cioè di ascissa 1)

La retta di regressione dei punti (x_i, y_i) passa sempre dal punto la cui ascissa è $\underline{x}$ = la media aritmetica dei punto x_i , quindi in questo caso(0+1+2)/3= 1, e la cui ordinata è $\underline{y}$ la media dei punti y_i quindi in questo caso, (0+1+1)/3=2/3
quindi in questo caso la distanza tra il punto (1,1) e il punto di ascissa 1 della retta è semplicemente
|1-(2/3)|=1/3

IN ALTERNATIVA (e poi sarebbe chiesto comunque all'orale)
si può CALCOLARE la retta di regressione, che è la retta $y-\underline{y} = m(x-\underline{x})$ con $m=COV_{XY}/(\sigma_X)^2$
dove $COV_{XY} = \underline{xy} - \underline{x}\,\underline{y}$, con $\underline{xy}$ = media aritmetica dei prodotti $x_i\, y_i$,
ossia in questo caso $\underline{xy}$ =(0*0 + 1*1 + 2*1)/3= 1 e quindi
$COV_{XY} = \underline{xy} - \underline{x}\,\underline{y} = 1 - 1*2/3=1/3$
OVVERO COV_{XY} è la media artimentica dei prodotti $(x_i - \underline{x})(y_i-\underline{y})$
ossia
[(0-1)(0-2/3) + (1-1)(1-2/3) +(2-1)(1-2/3)]/3 = [2/3 +0 +1/3]/3= 1/3

e
$(\sigma_X)^2 = \underline{xx} - \underline{x}\,\underline{x}$, con $\underline{xx}$ = media aritmetica dei prodotti $x_i\, x_i,=(x_i)^2$.
ossia in questo caso $\underline{xx} = [0^2+1^2+2^2]/3=5/3$
e quindi
$(\sigma_X)^2 = \underline{xx} - (\underline{x})^2 = 5/3 - 1^2= 2/3$
OVVERO
$(\sigma_X)^2$ = media artimentica di $(x_i - \underline{x})^2$, ossia in questo caso
$[(0-1)^2 + (1-1)^2 +(2-1)^2]/3 = [1 +0 +1]/3= 2/3$

e quindi $m= COV_{XY}/(\sigma_X)^2 = (1/3)/(2/3)=1/2$

RA2 D. 24 Lanciando due volte un dado:
a) qual è la probabilità che escano due numeri pari?
b) qual è la probabilità che la somma delle facce sia 4?
c) qual è la probabilità che la somma delle facce sia 4, sapendo che al primo lancio non e' uscito ne' il numero 5 ne' il numero 6?

svolto in classe
SOLUZIONE Per risolvere questo esercizio vanno elencati i $36=6^2$ casi possibili
(coppie (i,j) con i, j che variano tra 1 e 6, VEDERE IL NUOVO FILE LANCIO DI DUE DADI)
e contare i casi favorevoli, e dividere per i casi possibili.
a) per due numeri pari è facile vedere che i casi favorevoli sono $9=3^2$

e che quindi P(due numeri pari)=$3^2/6^2=(3/6)^2=1/4$

b) i casi favorevoli sono (1,3) (2,2) e (3,1) e quindi , posto X_1 il valore del primo dado e X_2 il valore del secondo dado
$P(X_1 +X_2 =4)= 3/36=1/12$

c) si tratta di calcolare P(B|A)
dove A={X_1 pari e X_2 pari} e B={$X_1 +X_2 =4$} .
Essendo P(B|A) =P(B"intersezione"A)/P(A)
e B"intersezione"A= {(2,2)} e quindi
P(B|A) =P(B"intersezione"A)/P(A)= (1/36)/(3/36)=1/3

FOGLIO 10- D5 Lanciando 4 volte una moneta, qual è la probabilità che esca un numero pari (0, 2 o 4) di teste?
VARIE SOLUZIONI POSSIBILI
1) una soluzione si può ottenere elencando tutti i casi (sono sedici) e contare i casi favorevoli
(T,T,T,T) *
(T,T,T,C)
(T,T,C,T)
(T,T,C,C) *
(T,C,T,T)
(T,C,T,C) *
(T,C,C,T) *
(T,C,C,C)

(C,T,T,T)
(C,T,T,C) *
(C,T,C,T) *
(C,T,C,C)
(C,C,T,T) *
(C,C,T,C)
(C,C,C,T)
(C,C,C,C) *

2) una generale è la seguente, che non ho avuto modo di illustrarvia lezione, però, ma spero di avere modo di dirvela martedì e/o mercoledì, in modo che la conosciate:
la probabilità di avere esattamente k teste in n lanci è semplicemente numero di combinazioni di k elementi di classe k,
e che si può calcolare come n!/[k! (n-k)!] e quindi la probabilità di k teste in n lanci è {n!/[k! (n-k)!]} / 2^n
a questo punto, per risolvere l'esercizio, basta prendere n=4 e sommare la probabilità {4!/[k! (4-k)!]}/2^4 per k=0,2,4 ossia
4!/[0! (4-0)!]/16 +{ 4!/[2! (4-2)!]}/16+ {4!/[4! (4-4)!]}/16=
= {4)!/[0! 4!]}(1/16 + {4!/[2! 2!]}/16 + {4!/[4! 0!]}/16 =
= 1/16 + {(4*3*2*1)/(2*2)}/16+ 1/16 =[1+6+1]/16=1/2

INOLTRE
3) UNA SOLUZIONE SINTETICA ed elegante,
ma che non mi aspetto che troviate da soli...
e che per di più vale solo per un numero n di lanci, con n DISPARI
è la seguente
posto X il numero di teste ed Y il numero di croci ottenute su n lanci,
possiamo considerare gli eventi
A={X è pari} e B={Y è pari},
allora A e B sono l'uno il complementare dell'altro,
perché se X è pari allora Y è dispari,
QUINDI P(A)=1-P(B)
MA D'ALTRA PARTE, se la moneta non è truccata,
ALLORA
P(A)=P(B) (si ottiene scambiando testa con croce)
e quindi, risolvendo il sistema x=1-y, x=y , dove x=P(A) e y=P(B) si ottiene subito
P(A)=P(B)=1/2

INFINE,
4) questa soluzione vale ANCHE PER n pari vorrei farle notare che già dall'elenco nel caso n=4 si capisce che se si considerano i casi favorevoli all'evento A si dividono in quelli in cui il primo lancio è TESTA e quelli in cui il primo lancio è CROCE e che i casi in cui si "SCAMBIANO" T e C nell'ESITO INIZIALE sono nello stesso numero

(T,T,T,T) * (C,T,T,T)
(T,T,T,C) (C,T,T,C) *
(T,T,C,T) (C,T,C,T) *
(T,T,C,C) * (C,T,C,C)
(T,C,T,T) (C,C,T,T) *
(T,C,T,C) * (C,C,T,C)
(T,C,C,T) * (C,C,C,T)
(T,C,C,C) (C,C,C,C) *

infatti ad esempio in (T,T,T,C) c'è un numero dispari di teste, ma in (C,T,T,C) c'è un numero pari di teste, e viceversa in (T,T,C,C) c'è un numero pari di teste, ma in (C,T,C,C) c'è un numero dispari di teste.

FOGLIO10 D. 2 Qual è la probabilità di *ottenere almeno 1 Testa e 1 Croce* lanciando 4 volte una moneta ?
2A 2/4
2B 1/8
2C 1
2D 14/16
2E 6/16
PRIMA SOLUZIONE, poco efficiente
I casi possibili sono $16=2^4$, e sono i seguenti, e quelli segnati con l'asterisco sono i casi favorevoli
e sono 14
quindi la soluzione è 14/16=7/8

(T,T,T,T)
(T,T,T,C) *
(T,T,C,T) *
(T,T,C,C) *
(T,C,T,T) *
(T,C,T,C) *
(T,C,C,T) *
(T,C,C,C) *

(C,T,T,T) *
(C,T,T,C) *
(C,T,C,T) *
(C,T,C,C) *
(C,C,T,T) *
(C,C,T,C) *
(C,C,C,T) *
(C,C,C,C)

TUTTAVIA sarebbe più semplice dire:
lanciando 4 volte una moneta, i casi possibili sono $16=2^4$, posto A=l'evento "*ottenere almeno 1 Testa e 1 Croce"*
quelli favorevoli all'evento complementare A^c sono solo due: tutte teste OPPURE tutte croci
e quindi la probabilità dell'evento $P(A^c)=2/16$ e quindi $P(A)=1- P(A^c)=1- 2/16=14/16=7/8$

FOGLIO10 D.8 Il 10% di una popolazione ha gli occhi azzurri.
Qual è la probabilità che, presi tre individui a caso, esattamente due abbiano gli occhi azzurri?
8A 0,027
8B 0,009
8C 0,001
8D 0,01
8E 0,03

UNA SOLUZIONE POSSIBILE E' LA SEGUENTE: sia N la numerosità della popolazione
dai dati sappiamo che (1/10) della popolazione ha gli occhi azzurri, ossia $N_a=N/10$ hanno gli occhi azzurri
(e il rimanente $N_c =[9/10]N=N-N_a$ ha gli occhi di altro colore)

L'evento A="*esattamente due hanno gli occhi azzurri*" si può scomporre nell'unione di tre eventi:
A_1="*il primo ed il secondo hanno gli occhi azzurri ed il terzo ha gli occhi di altro colore*"
A_2="*il primo ed il terzo hanno gli occhi azzurri ed il secondo ha gli occhi di altro colore*"
A_3="*il secondo ed il terzo hanno gli occhi azzurri ed il primo ha gli occhi di altro colore*"
Chiaramente $P(A_1)= N_a(N_a-1)\, N_c/[N(N-1)(N-2)]= [N_a/N]\, [(N_a-1)/(N-1)]\, [N_c/(N-2)]$
INFATTI
i casi possibili sono N(N-1)(N-2) in quanto
si può scegliere la prima persona in N modi, la seconda in N-1 modi e la terza in N-2 modi

i casi favorevoli sono $N_a(N_a-1)\ N_c$ in quanto
si può scegliere la prima persona in N_a modi (va scelta fra le N_a persone con gli occhi azzurri),
la seconda in N_a-1 modi (va scelta fra le N_a -1 persone rimanenti con gli occhi azzurri),
e la terza inN_c modi (va scelta fra le N_c persone con gli occhi di altro colore)
e ANALOGAMENTE
$P(A_2)= N_a\ N_c\ (N_a-1)/[N(N-1)(N-2)]= P(A_1)$
e
$P(A_3)= N_c\ N_a\ (N_a-1)/[N(N-1)(N-2)]= P(A_1)$
e quindi
$P(A)= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3) = 3\ P(A_1) = 3\ [N_a/N]\ [(N_a-1)/(N-1)]\ [\ N_c/(N-2)]$

SI OSSERVI ORA CHE
N_a/N =1/10 (dato del problema)
e che, per N grande, $(N_a-1)/(N-1)$ è molto vicino a N_a/N= 1/10
e analogamente, sempre per N grande, $N_c/(N-2)$ è molto vicino a N_c/N = 9/10

(infatti, dividendo numeratore e denominatore per N si ha $(N_a-1)/(N-1)= [(N_a/N)-(1/N))/[1-(1/N)] = [(1/10)-1/N]/[1-(1/N)]$ che tende a 1/10 per N che tende ad infinito)
quindi la probabilità cercata si può calcolare (approssimativamente) come
$P(A)= P(A_1)+P(A_2)+P(A_3) = 3\ P(A_1) = 3\ [N_a/N]\ [(N_a-1)/(N-1)]\ [\ N_c/(N-2)] =_{(circa)} 3\ [\ (1/10)\ (1/10)\ (9/10)] = 27/1000= 0{,}027$

FOGLIO 10 D. 22 Un tiratore centra il bersaglio 8 volte su 10. Qual è la probabilità che *centri il bersaglio almeno una volta sparando due colpi*?
22A 0,91
22B 0,96
22C 0,97
22D 0,99
22E 1

SOLUZIONE, senza ricorrerre al concetto di indipendenza:
prima di tutto conviene osservare che l'evento *A="centri il bersaglio almeno una volta sparando due colpi"*
è il complementare dell'evento *B="non centri mai il bersaglio sparando due colpi"*
e quindi *P(A)=1-P(B)*

INOLTRE possiamo pensare che il problema sia equivalente ad estrarre due volte con REINSEIMENTO una pallina da un'urna che contiene 2 palline bianche e 8 rosse
con la convenzione che estrarre una PALLINA BIANCA corrisponde a NON CENTRARE IL BERSAGLIO, mentre estrarre una PALLINA ROSSA corrisponde a NON CENTRARE IL BERSAGLIO.

Allora il problema di calcolare P(B)=P(estrarre sempre pallina bianca) = $2^2/10^2=4/100=0{,}04$:
infatti i casi possibilie sono 10^2, in quanto ogni volta posso estrarre una qualunque delle 10 palline,
mentre i casi favorevoli sono 2^2 , in quanto corrisponde a estrarre ogni volta una delle due

pallie bianche
di conseguenza P(A)=1-P(B)= 1- 0,4=0,96

FOGLIO 10 D. 23 Il 4% di una popolazione e' affetto da una certa malattia.
L'accertamento della malattia e' affidato
ad un test di laboratorio che fornisce nel 90% dei casi la risposta corretta
(sia in presenza che in assenza di malattia, ovvero specificita' del test = sensibilita' del test).
Per un individuo il test ha dato esito positivo.
Qual'è la probabilità che egli abbia effettivamente la malattia?
23A 36%
23B 14%
23C 50%
23D 90%
23E 27%
Si tratta di una versione semplificata del problema dei TEST DIAGNOSTICI
UTILIZZANDO LE NOTAZIONI USUALI (si vedano il libro, le slide della prof.ssa Torre e il file Esercizi di STATISTICA)
I dati pel problema sono
$P(M^+)=4\%=4/100$
(da cui $P(M^-)=1- P(M^+)=1- (4/100)=96/100$
$P(T^+|M^+)=P(T^-|M^-)=90\%=90/100$
da cui, ad esempio $P(T+|M^-)=1-P(T^-|M^-)=1- (90/100)=10/100$

LA DOMANDA E' $P(M^+| T^+)$

Per la formula di Bayes

$P(M^+| T^+)= [P(M^+)\ P(T^+M^+)\ ]/[P(M^+)\ P(T^+M^+)\ +P(M^-)\ P(T^{+|}M^-)\ ] = [(4/100)$
$(90/100)][(4/100)\ (90/100)+(96/100)\ (10/100)]=$
(semplificando)
$= (4*90)/[(4*90)+96*10]= (4*9)/[(4*9)+96]= 36/[36+96]= 36/132=_{(circa)}0{,}27= 27\%$

FOGLIO 9 -D48
Ad un concorso con 10000 concorrenti, i voti alla prova scritta sono risultati distribuiti secondo una gaussiana con media aritmetica $\mu = 5{,}2$ e scarto quadratico medio $\sigma = 1$. Quante persone hanno, approssimativamente, ottenuto la sufficienza (cioe' un voto ≥ 6?)

SCHEMA DI SOLUZIONE

Prima di tutto si deve tenere presente che se dei dati x_i si comportano
come una gaussiana di media μ e scarto quadratico medio (o deviazione standard) σ

questo significa che le percentuali che questi siano in una certa regione possono essere calcolati usando le aree corrispondenti individuate dalla densità gauusiana corrispondente.

Queste aree si possono calcolare attraverso delle tabelle (pagina 183 del libro, oppure il file STATISTICA 04 della prof. ssa TORRE) che permettono di calcolare la probabilita' che i dati siano
in intervalli di tipo simmetrico rispetto alla media $[\mu-u\sigma, \mu+u\sigma]$ al variare di u, fuori di tali intervalli o in intervalli del tipo $[\mu+u\sigma, +\infty)$

Quindi si tratta di trovare u tale che $\mu+u\sigma=6$ OSSIA $u=(6-\mu)/\sigma$

tenendo presente che $\mu = 5,2$ ed $\sigma=1$ e poi utilizzare al tabella corrispondente.

FOGLIO 2 - D. 24 E' dato il sistema
y + mz = 1
-x + 2y + z = 2
-2x +y +z = 1
Quale delle seguenti coppie fornisce il valore di m per cui il sistema ammette infinite soluzioni,
unitamente ad una delle possibili soluzioni?

24A m = 1/3; (1, 0, 3)
24B m = 1/3; (0, 1, 1)
24C m = -3; (1, 0, -1/3)
24D m = -3; (0, 1, 0)
24E m = 1/6; (4, 3, 0)
per trovare la soluzione BASTA procedere come segue
1) trovare il valore m per il quale il determinante della matrice associata al sistema è nullo ossia (ad esempio sviluppando rispetto alla prima riga)
essendo il determinante uguale a -1 [(-1)1 -1(-2)] + m [(-1) 1 - 2 (-2)]= - [-1+2] +m [-1+4]= -1 + 3 m
trovare m tale che
3m-1=0, ossia m=1/3 (QUINDI LE POSSIBILI SOLUZIONI SONO SOLO 24 A e 24 B)

SUCCESSIVAMENTE,
poiché se il determinante è nullo, allora O il sistema è impossibile (ossia non ha soluzioni) OPPURE ha infinite soluzioni

2) controllare se il sistema ottenuto ponendo m=1/3, ossia
y +(1/3) z = 1
-x + 2y + z = 2
-2x +y +z = 1
ammette come soluzione (1, 0, 3) , cioè x=1, y=0 e z=3

ossia controllare se
0 +(1/3) 3 = 1 OK
-1 + 2*0 +3 = 2 OK
-2*1 +0 +3 = 1 OK

QUINDI, essendoci una soluzione, SICURAMENTE CE NE SONO INFINITE.

OVVIAMENTE (se avessimo controllato prima la soluzione 24B avremmo ottenuto un risultato negativo, ma questo non garantiva nulla)

ALTERNATIVAMENTE possiamo trovare tutte le soluzioni del sistema

$y + (1/3)\, z = 1$
$-x + 2y + z = 2$
$-2x + y + z = 1$

ad esempio prendendo y come parametro

da cui

$(1/3)\, z = 1 - y$

$-x + z = 2 - 2y$
$-2x + z = 1 - y$

da cui NECESSARIAMENTE, dalle prime due equazioni)

$z = 3(1-y) = 3 - 3y$

$x = z - 2 + 2y$ (ossia $x = 3 - 3y - 2 + 2y = 1 - y$)

va poi controllato che, per i valori ottenuti si ha $-2x + z = 1 - y$

e infatti

$-2x + z = -2(1-y) + 3 - 3y = -2 + 2y + 3 - 3y = 1 - y$

QUINDI le INFINITE soluzioni sono del tipo

$x = 1-y$, $y = y$, $z = 3-3y$, ovvero $(1-y, y, 3-3y)$

e $(1, 0, 3) = (1-y, y, 3-3y)$ per $y=0$

FOGLIO2 - D. 33
In un campo sono piantati 30 meli, ciascuno dei quali produce mediamente 400 mele

all’anno.
Per ogni ulteriore albero che si pianta si reputa che il numero delle mele prodotte da ciascun melo diminuisca di 9; e analogamente, per ogni albero che si toglie il numero di mele prodotte da ciascun melo aumenta di 9.
Il numero complessivo di meli per cui il raccolto annuo previsto sia massimo e’ circa:
33A 37
33B 30
33C 23
33D 7
33E 40
ILLUSTRO UN PROCEDIMENTO POSSIBILE,
La soluzione consiste nell'impostare l'equazione che assegna il numero di mele prodotte al variare del numero di alberi piantati:
AD ESEMPIO se n è il umero di ulteriori alberi piantanti
allora il numero di alberi è (30+n) ma il numero di mele prodotte da ciascun melo è (400-9n)
DOVE n potrebbe essere sia positivo che negativo.
QUINDI il numero di mele prodotte in un anno è il prodotto
f(n)=(30+n)*(400 - 9n)= -9n^2 +(400-9*30)n +12000
ora f(x) è chiaramente un polinomio di secondo grado con coefficiente di grado massimo negativo che ammette come radici
x(1)=-30 e x(2)= 400/9=44,44 (circa)
e quindi come punto di massimo
il punto medio tra x(1) e x(2) ossia
[x(1)+x(2)]/2= [-30 + 400/9]/2= [-270+400]/18 =7,22 circa
QUINDI i valori INTERI possibili sono solo n=7 oppure n=8.
PER DECIDERE QUALE DEI DUE bisogna calcolare f(n) per n=7 ed n=8 e controllare quale dei due valori sia maggiore
e quindi la soluzione potrebbe essere 37 OPPURE 38 a seconda del risultato.
IMMAGINO CHE LA SOLUZIONE SIA 37 (VISTO CHE 38 NON E' TRA LE SOLUZIONI POSSIBILI)
MA NON HO CONTROLLATO.... ALTERNATIVAMENTE, posto N=30+n e quindi considerare la funzione
g(N)= N (400 - (N-30) 9) [NOTARE che, essend n=N-30, si ha g(N)= f(N-30)]

Un altro procedimento, MA da usare solo se non si sa fare altro potrebbe essere quella di calcolare direttamente f(n) per n=
33A n=37-30
33B n=30-30=0
33C n=23-30=-7
33D n=7-30=-23
33E n=40-30=10
e controlare per quale n f(n) risulta massimo.

FOGLIO 2 D. 34 Il tempo di dimezzamento di un isotopo radioattivo è di 4 anni.
Se dopo 12 anni restano 4000 isotopi radioattivi in una certa sostanza, dopo quanti anni ne

restano 1000?
34A 5
34B 20
34C 25
34D 84
34E 30

SCHEMA DELLA SOLUZIONE (ATTENZIONE HO CORRETTO QUALCHE ERRORE DI STAMPA)
il decadimento radiattivo si può modellizzare in due modi: a tempo discreto e a tempo continuo.
QUI EVIDENTEMENTE (foglio2) SIAMO A TEMPO DISCRETO:
posto $x(0)= N=$ il numero iniziale di isotopi il numero degli isotopi è modellizzato da
$x(n)= N q^n$, per $n >=0$
e dove è q un numero da trovare (essendo un decadimento $0<q<1$)
----
il tempo di dimezzamento è dato dal numero m tale che

$x(m)=x(0)/2$

ossia da

$N q^m =N/2$ cioè $q^m=1/2$ cioè passando ai logaritmi (IN BASE 2)

$m \log_2 (q) = \log_2 (1/2)$

ovvero, essendo $\log_2 (1/2)=-1$,

$m= -1/\log_2 (q)$

DI SOLITO q è noto, mentre m è da trovare, MA IN QUESTO CASO invece sappiamo $m=12$ ed $N/2=4000$

mentre $1000=4000/4 = (N/2)/4 = N/8$

e quindi da $q^m=1/2$

dobbiamo ricavare t tale che $q^t=1/8$

OSSIA, passando ai logaritmi (IN BASE 2)

$t \log_2 (q) = \log_2 (1/8) = -3$
cioè
$t= -3/\log_2 (q) = 3 [-1/ /\log_2 (q)] = 3 m$

e quindi, sapendo che $m=12$ si ha che $t=3m=36$

IN ALTERNATIVA:
potremmo ricavare q da $q^m=1/2$
otteniamo q elevando ambo i membri a $1/m$ ossia

$q^m=1/2$ se e solo se $q= (q^m)^{(1/m)}=(1/2)^{(1/m)}$

e poi trovare, da N/2=4000 che N=8000

e quindi ricavare che

$N\ q^t= 8000\ [(1/2)^{(1/m)}]^t= 1000$

se e solo se

$[(1/2)^{(1/m)}]^t= 1/8= (1/2)^3$

ossia se e solo se

$(1/2)^{(1/m)t} =(1/2)^3$ ossia

se e solo se

t/m=3 cioè t=3m

ATTENZIONE C'E' UNA CORREZIONE RISPETTO A QUANTO DETTO A LEZIONE

RA1- D. 33 E' data la funzione polinomiale $y=x^3+bx^2+cx+d$.
a) Si dica quale relazione deve valere fra i coefficienti b e c affinché essa non ammetta ne' massimo ne' minimo.

b) Data la funzione $y=x^3+2x^2+2x-1$, si verifichi che soddisfa la condizione precedente.

c) Determinarne lo zero della funzione (cioè la soluzione dell'equazione $x^3 +2x^2 +2x-1=0$) approssimato alla prima cifra decimale.

SOLUZIONE. ATTENZIONE C'E' UNA CORREZIONE RISPETTO A QUANTO DETTO A LEZIONE
a) Cominciamo con l'osservare che
il limite di x^3+bx^2+cx+d, per x che tende a +infinito, vale + infinito
e
il limite di x^3+bx^2+cx+d, per x che tende a - infinito, vale - infinito
si sta parlando di massimi e minimi locali.
Quindi la condizione è che la derivata di $f(x)= x^3+bx^2+cx+d$, sia sempre diversa da zero **OPPURE ci sia un solo punto in cui vale zero e sia un flesso**:

$f'(x)= 3x^2+ 2bx+c$
ed, essendo $f'(x)= 3x^2+ 2bx+c$
una funzione polinomiale di secondo grado, questo è vero
se e solo se
il discriminante è negativo, ossia se $(2b)^2-4 *3\ c= 4\ [b^2-3\ c]<0$
OPPURE
il discriminante è nullo, ossia se $(2b)^2-4 *3\ c= 4\ [b^2-3\ c]=0$

ma l'unica soluzione dell'equazione $f'(x)= 3x^2+ 2bx+c =0$
ossia $x= -b/3$, deve essere un punto di flesso, ossia
$f''(x)= 6x+ 2b = 6(x+b/3)$
deve cambiare segno a destra e a sinistra di $x= -b/3$, e questo è banalmente verificato.

ATTENZIONE : LA CONDIZIONE E' QUINDI $[b^2-3 c]\leq 0$

b) per la funzione $y=x^3+2x^2+2x-1$, si ha b=2 e c=2
e quindi $[b^2-3 c]=4-6=-2<0$

c) per il punto precedente, la funzione $y=x^3+2x^2+2x-1$, è quindi strettamente crescente.

Di conseguenza, tenendo conto dei limiti per x che tende a +/- infinito,
ammette un unico zero, ossia quel valore x_0 tale che

$f(x_0)=(x_0)^3+2(x_0)^2+2x_0-1=0.$

Per determinare questo valore esiste il metodo di bisezione:

IDEA: si trovano due punti x_1 e x_2 nei quali $f(x_1)$ e $f(x_2)$ hanno segno opposto.

Di conseguenza lo zero x_0 è sicuramente compreso tra x_1 e x_2, ossia x_0 appartiene all'intervallo (x_1 , x_2).

In questo caso basta osservare che
$f(0)=-1<0$ e che $f(1)= 1_3+2*1^2+2*1-1= 1+2+2-1=4>0$
Di conseguenza lo zero x_0 è sicuramente compreso tra 0 e 1

A questo punto si considera il punto di mezzo $x'=(x_1 + x_2)/2$
in questo caso $x'=1/2$
e si calcola la funzione in questo punto e i casi sono tre:
$f(x')=0$ e a questo punto abbiamo finito
oppure
$f(x')<0$
oppure
$f(x')>0$
In ognuno di questi ultimi due casi si trova un altro intervallo (x'_1 , x'_2) al quale appartiene x_0.

SI NOTI CHE IL NUOVO INTERVALLO HA AMPIEZZA CHE VALE LA META' DELL'AMPIEZZA DEL PRIMO INTERVALLO.

In questo caso
$f(x')=f(1/2)= (1/2)^3+2(1/2)^2+2/(1/2)-1= 1/8 + 2/4 +1-1>0$,
e quindi , confrontando i valori $f(0)=-1<0$, $f(1/2)>0$ e $f(1)>0$
possiamo affermare che x_0 è sicuramente compreso tra 0 e 1/2, che ha ampiezza 1/4.

A questo punto si ripete il procedimento considerando il nuovo intervallo (x'_1 , x'_2) e il suo punto di mezzo $x''=(x'_1 + x'_2)/2$ e si trova un altro intervallo di ampiezza che vale un quarto dell'ampiezza del primo intervallo,(essendo la metà della metà) e cosi' via ogni volta l'intervallo diminuisce della metà.

Nell'esempio basterà ripetere il procedimento altre 2 volte per arrivare a un intervallo di ampiezza 1/16 <1/10.

FOGLIO6-D.17 Si determini l'equazione della tangente alla funzione $y = e^{x/2}$, nel punto di ascissa $x_0 = 0$.
Se nel punto di ascissa x = 1 si approssima il valore della funzione con quello della sua tangente in $x_0 = 0$
(approssimazione di Taylor al primo grado), l'errore relativo è di circa il
17A 15%
17B 10%
17C 1,5%
17D 1%
17E non c'e' errore

SCHEMA DELLA SOLUZIONE
Per iniziare il polinomio di Taylor di grado 1, coincide con la retta tangente NE SEGUENTE SENSO
essendo $f(x)=e^{x/2}$, $f'(x)=(1/2)\, e^{x/2}$, ed $x_0=0$ si ha che l'equazione della retta tangente è

$y-f(x_0)= f'(x_0)\,(x-x_0)$

ossia

$y=f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) = e^{0/2} +(1/2)\, e^{0/2}(x-0) = 1 + x/2$

e il polinomio di Taylor è $T_1f(x)=f(x_0) + f'(x_0)\,(x-x_0) = 1 + x/2$

L'errore relativo in x=1 è per definizione $|f(1)- T_1f(1)|/ |f(1)|= |e^{1/2}- (1 + 1/2)|/| e^{1/2}|$

QUINDI si può semplicemente calcolare,

CON L'AUSILIO DI UNA CALCOLATRICE SCIENTIFICA

$e^{1/2}$=1,6487212707001281468486507878142, 1 + 1/2=1,5

e perciò l'errore assoluto vale

$|e^{1/2}- (1 + 1/2)|$= 0,1487212707001281468486507878142

e l'errore relativo vale $|e^{1/2}- (1 + 1/2)|/| e^{1/2}|$ = 0,090204010431049864594300697 51323

che è approssimativamente il 9%

e quindi la risposta è circa il 10%.

IL CHE CONCLUDE L'ESERCIZIO, MA
Più interessante sarebbe calcolare l'errore realtivo a priori, senza l'ausilio della calcolatrice scientifica:
allora potremmo dire che

$|e^{1/2}- (1 + 1/2)|<= (1/2!) \sup_{x \text{ in } [0,1]} |f''(x)| |1-0|$^2 =

$= (1/2) \sup_{x \text{ in } [0,1]} |(1/2)^2 e^{x/2}| = (1/8) \sup_{x \text{ in } [0,1]} e^{x/2}= (1/8) e^{1/2}$

dove l'ultima uguaglianza deriva dal fatto che la funzione $e^{x/2}$ è crescente.

A questo punto l'errore relativo $|e^{1/2}- (1 + 1/2)|/| e^{1/2}|$

si può MAGGIORARE con

$(1/8) e^{1/2}/| e^{1/2}| = 1/8 =0,125 = 12,5\%$

CHE PERO' NON COMPARE TRA LE RISPOSTE DELL'ESERCIZIO ed è equidistante da 10% e 15%.

PERSONALMENTE AVREI FORMULATO LE RISPOSTE IN MODO DIVERSO, ad esempio avrei messo

17A 17%
17B 10%
17C 1,5%
17D 1%
17E non c’e’ errore
IN MODO DA POTER PENSARE COME VALIDI ENTRAMBI I PROCEDIMENTI.

FOGLIO 8 (EQ-DIFFERENZIALI e progressioni) Gli individui di una colonia di moscerini aumentano in un giorno di una percentuale k rispetto al giorno precedente. All’inizio dell’osservazione ci sono circa 90 moscerini. al termine del quarto giorno 400. Quanti sono dopo un giorno?
49A circa 170
49B circa 200
49C circa 50
49D circa 130 Risposta esatta.
49E circa150

Risolviamo questo quesito a tempo discreto
e chiamiamo x(t) il numero di moscerini al tempo t, con t=0,1,2,...
sappiamo che
x(0)=90
x(1)= (1+k/100) x(0)
è il numero di moscerini al termine del primo giorno
x(2)= (1+k/100) x(1)= (1+k/100) (1+k/100) x(0)=(1+k/100)2 x(0)

è il numero di moscerini al termine del secondo giorno
...
...
$x(t)=(1+k/100)t\ x(0)$
è il numero di moscerini al termine del t-esimo giorno

SAPPIAMO INOLTRE che
$x(4)= 400$
ossia che $400=x(4)=(1+k/100)4\ x(0)= (1+k/100)4\ \ 90$

da cui

$(1+k/100)4 = 400/90 =40/9 = 4,444$ (circa)

e quindi

$(1+k/100) = (40/9)1/4 = 1,452$ (circa)

e quindi alla fine del primo giorno il numero di moscerini è
$x(1) = (1+k/100)\ x(0) = 1,452 * 90 = 130,68$ (circa)

e quindi la risposta è CIRCA 130

RA1-D. 27 Una certa dieta prevede un consumo giornaliero di grassi compreso tra 60g e 80g, e un consumo giornaliero di carboidrati compreso fra 90g e 110g.
L’alimento A contiene il 30% di grassi e il 20% di carboidrati,
e l’alimento B contiene il 15% di grassi e il 60% di carboidrati.
Che quantità dei due alimenti occorre consumare per rispettare la dieta? Si rappresenti il problema e si fornisca un esempio.

SOLUZIONE
posto
x (in grammi) la quantità giornaliera consumata di alimento A
e
y (in grammi) la quantità giornaliera consumata di alimento B
SE SI CONSUMANO SOLO GLI ALIMENTI A e B
la quantità di grassi giornaliera è
$0,30\ x + 0,15\ y$
e
la quantità di carboidrati giornaliera è
$0,20\ x + 0,60\ y$

Le condizioni poste sono quindi equivalenti a
$60 < 0,30\ x + 0,15\ y < 80$
$90 < 0,20\ x + 0,60\ y < 110$
(andrebbe bene lo stesso se invece dei minori stretti si mettessero i minori o uguale)

$60 < 0,30\ x + 0,15\ y < 80$

rappresenta una striscia compresa tra le due rette parallele

$0{,}30\,x + 0{,}15\,y = 60$ e $0{,}30\,x + 0{,}15\,y = 80$

ANALOGAMENTE
$90 < 0{,}20\,x + 0{,}60\,y < 110$
rappresenta una striscia compresa tra le due rette parallele

$0{,}20\,x + 0{,}60\,y = 90$ e $0{,}20\,x + 0{,}60\,y = 110$

e le quantità (x,y) permesse sono le quantità individuate dai punti del piano ottenuti dall'intersezione di queste due strisce
(ovviamente andrebbe fatto un disegno nel piano cartesiano)

PER TROVARE UN ESEMPIO si può ad esempio risolvere il sistema

$0{,}30\,x + 0{,}15\,y = 70$
$0{,}20\,x + 0{,}60\,y = 100$

che si può risolvere, ad esempio dividendo per 4 la seconda equazione

$0{,}30\,x + 0{,}15\,y = 70$
$0{,}05\,x + 0{,}15\,y = 25$

e sottraendo alla prima equazione la seconda equazione

si ha
$0{,}30\,x + 0{,}15\,y = 70$
$0{,}25\,x + 0\,y = 45$
ovvero
$x=45/(0.25) = 45/(1/4) = 45 \cdot 4 = 180$
$y= (70 - 0{,}30\,x)/0{,}15$ ovvero $y= (70 - (30/100)\,180)/(15/100)$
$= (70 \cdot 100 - 30 \cdot 180)/15 = 1600/15 = 106{,}67$ (circa)

- LANCIO DI DUE DADI File

  Il file contiene alcuni problemi e considerazioni sul lancio di due dadi

Notizie recenti

Aggiungi nuovo argomento...

- 21 gen, 11:19

  Giovanna Nappo

  ALTRI ESERCIZI

- 19 gen, 20:35

  Giovanna Nappo

  discussione esercizi

- 14 gen, 01:05

  Giovanna Nappo

  INFORMAZIONI ESAME 22 gennaio 2016

- 11 gen, 20:54

  Giovanna Nappo

  lezione di martedì 12 gennaio 2015

- 8 gen, 15:43

  Giovanna Nappo

  recupero LEZIONI PERSE

Argomenti precedenti ...