Giovedì 26/5 niente ricevimento studenti.

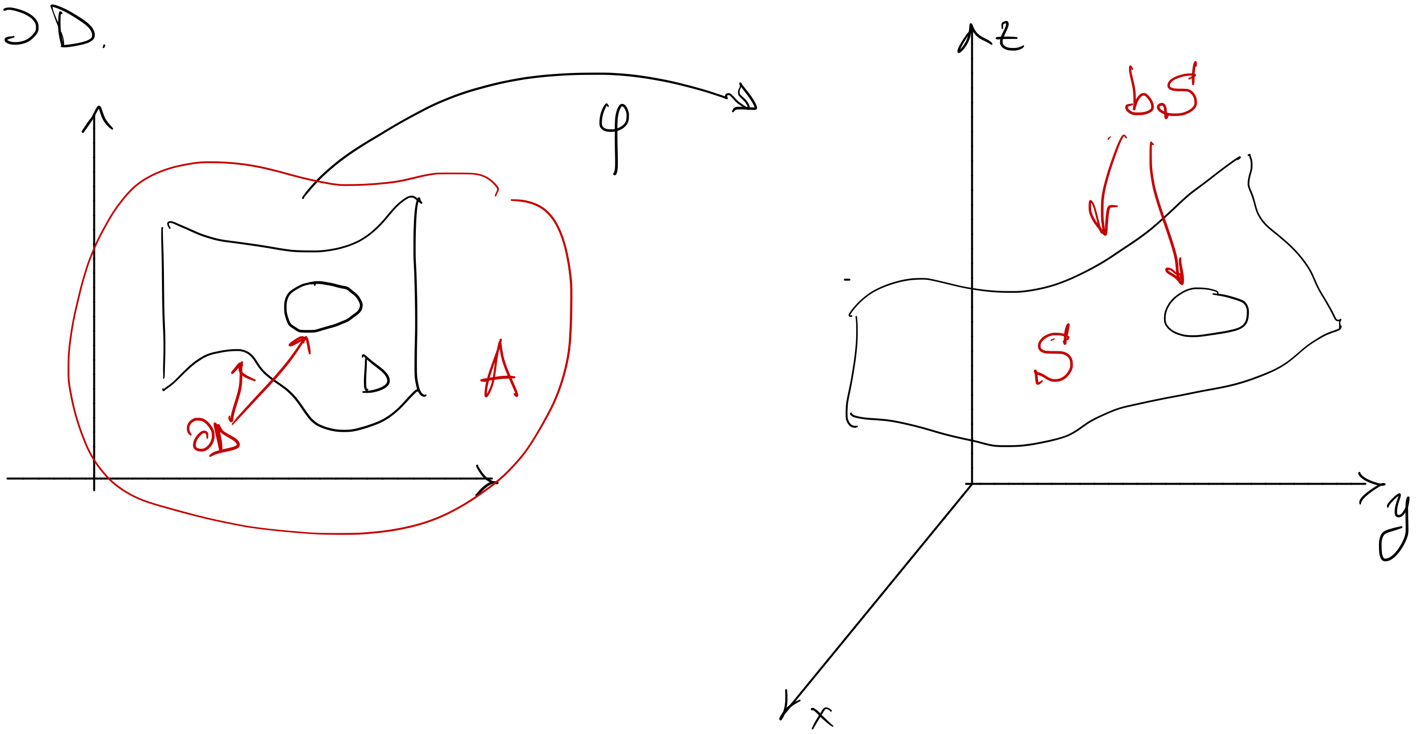
SUPERFICI CON BORDO

DEF Una superficie con bordo è una funzione

$$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

dominio regolare

φ: restrizione di una funzione C^1 definita su un aperto $A \supset D$.



t.c. 1) φ iniettiva su tutto D (fino alla frontiera)

2) $\varphi_u \wedge \varphi_v \neq 0$ su tutto D (" " ")

L'immagine di ∂D tramite φ si chiama bordo della superficie

$S = \varphi(D)$, chiamiamo $b S = \varphi(\partial D)$

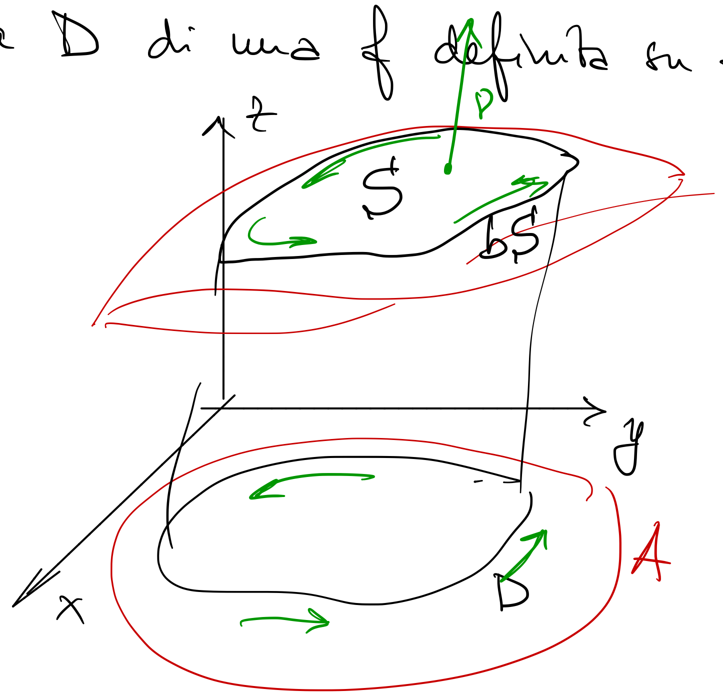
Possiamo immaginare una superficie con bordo come una superficie ottenuta "ritagliando" una superficie più grande

OSS Non bisogna confondere il bordo di S con la frontiera ∂S in senso topologico, in quanto $\partial S = S$. (non avendo punti interni).

ESEMPI

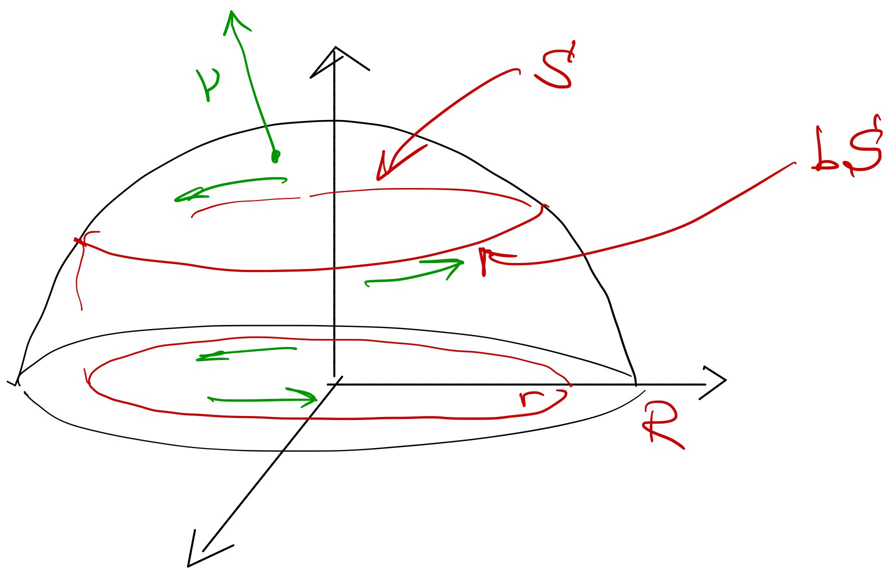
1) Superfici grafico. $\quad z = f(x,y) \quad f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe $C^1(D)$

f restrizione a D di una f definita su $A \supset D$.

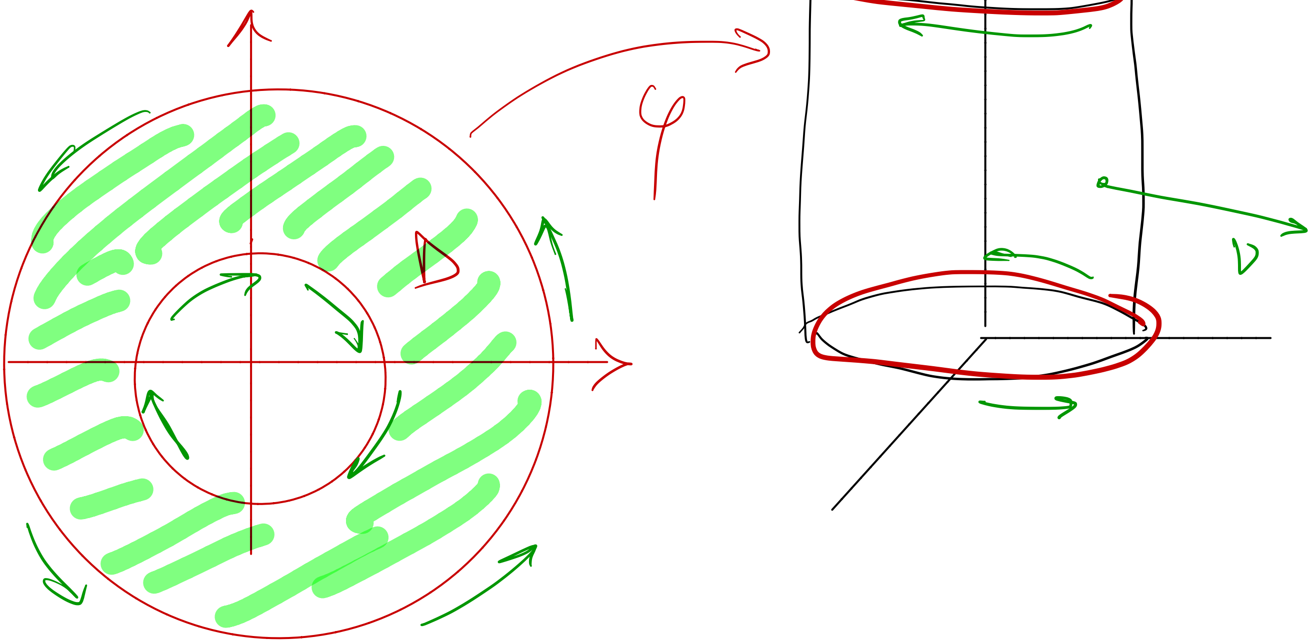


2) Segmento sferico $\quad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

$(x,y) \in D = \{ (x,y) : \; x^2 + y^2 \le r^2 < R^2 \}$



3) <u>Cilindro</u>.



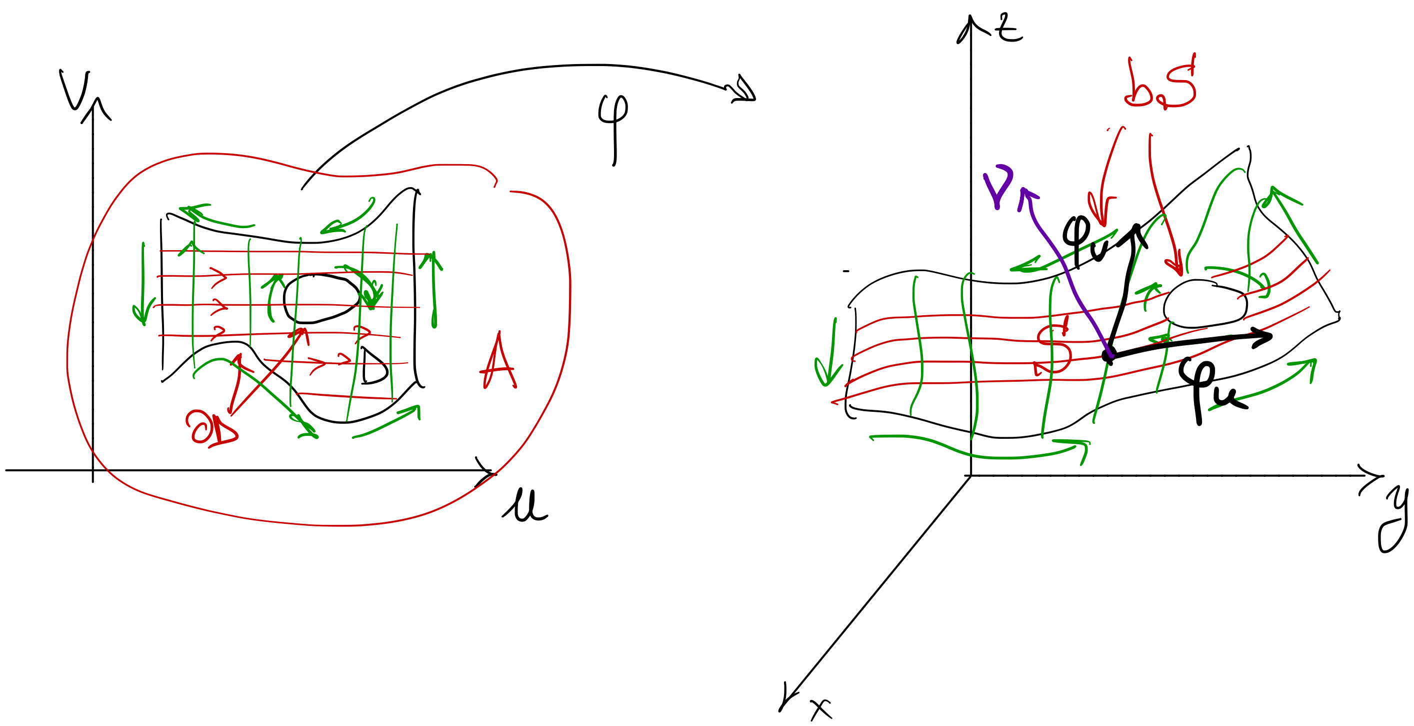
ESEMPI DI SUPERFICI SENZA BORDO.

<u>Sfera</u>.

<u>Toro</u>

Si può dimostrare che le superfici con bordo sono orientabili.

Orientazione del bordo



La frontiera ∂D di D viene orientata nel modo consueto. Questo induce un verso di percorrenza del bordo di S.

Ma allo stesso tempo la scelta dell'ordine di u, v ha indotto la scelta del versore normale di S (in altre parole, ha indotto la scelta di una "pagina" di S).

E' facile convincersi che l'orientazione del bordo e l'orientazione del versore normale sono collegate: guardando S dal lato del versore normale si vede percorrere il bordo lasciando S sulla sinistra.

<u>OSS</u>. Il bordo di S è unione di curve regolari.

Rotore di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^3$

Sia $\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale $C^1(A; \mathbb{R}^3)$
A aperto.

$$\underline{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$$

DEF $\operatorname{rot} \underline{F} = \nabla \wedge \underline{F} = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} =$

$$= \left((F_3)_y - (F_2)_z , (F_1)_z - (F_3)_x , (F_2)_x - (F_1)_y \right).$$

OSS in dim. 2 la definizione era coerente con questa.

Se $\underline{F}(x,y) = (F_1(x,y), F_2(\cancel{x},y), 0)$

$$\operatorname{rot} \underline{F} = (0, 0, (F_2)_x - (F_1)_y)$$

TEOREMA DI STOKES

Sia $S = \varphi(D)$ una superficie con bordo.

Sia $\underline{F}$ un campo vettoriale C^1 definito in un aperto contenente S. Allora si ha (scelta un'orientazione di S e quindi di ∂S).

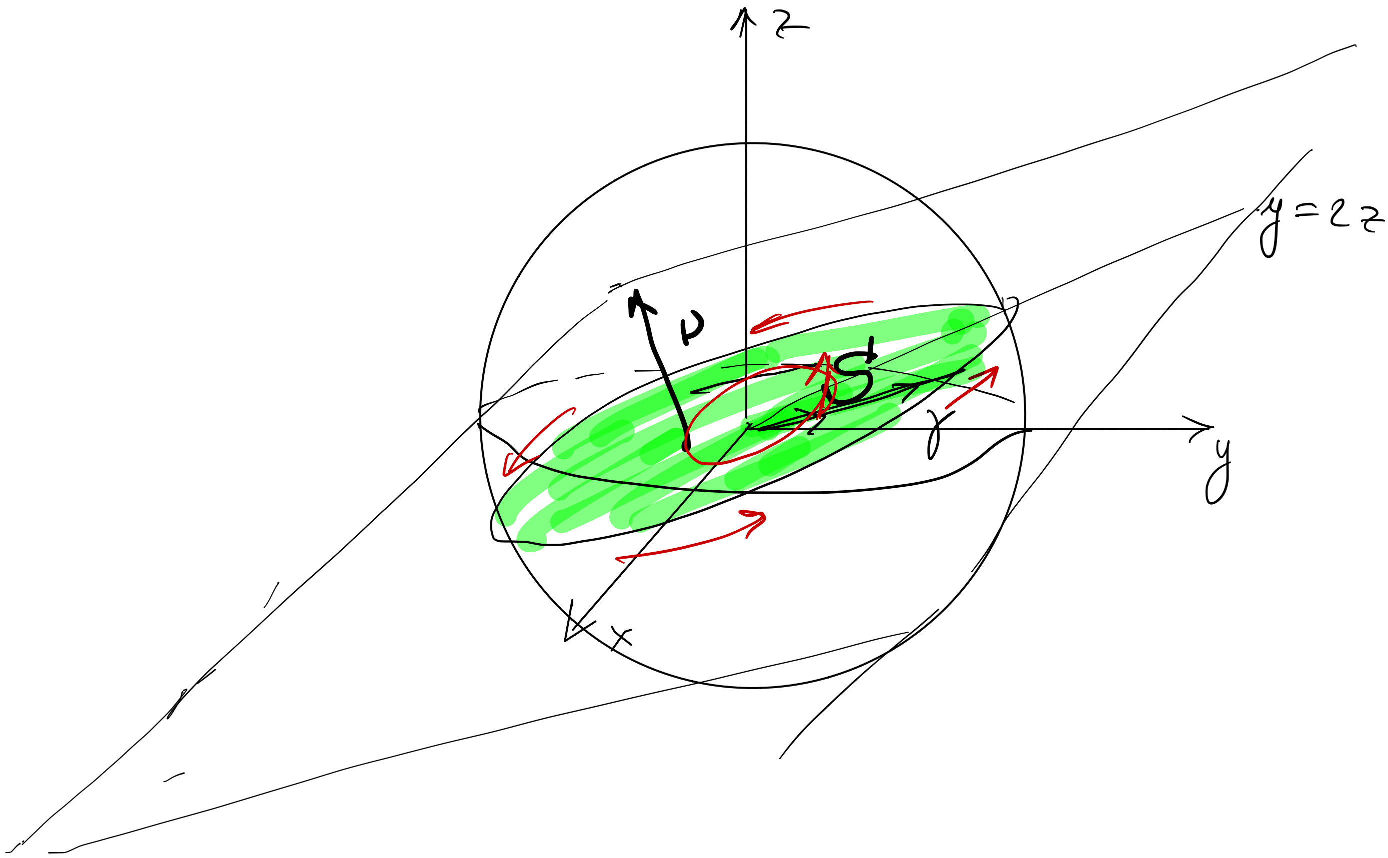
$$\int_{\partial^+ S} \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = \iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, d\sigma$$

bordo di S orientato in verso positivo

ESERCIZIO Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma (z-2y)\,dx + (z-2x)\,dy + (x+3y+y^2)\,dz$$

dove γ è la curva intersezione della sfera $x^2+y^2+z^2=1$ e del piano $y=2z$, percorsa in verso antiorario, vista dall'alto.

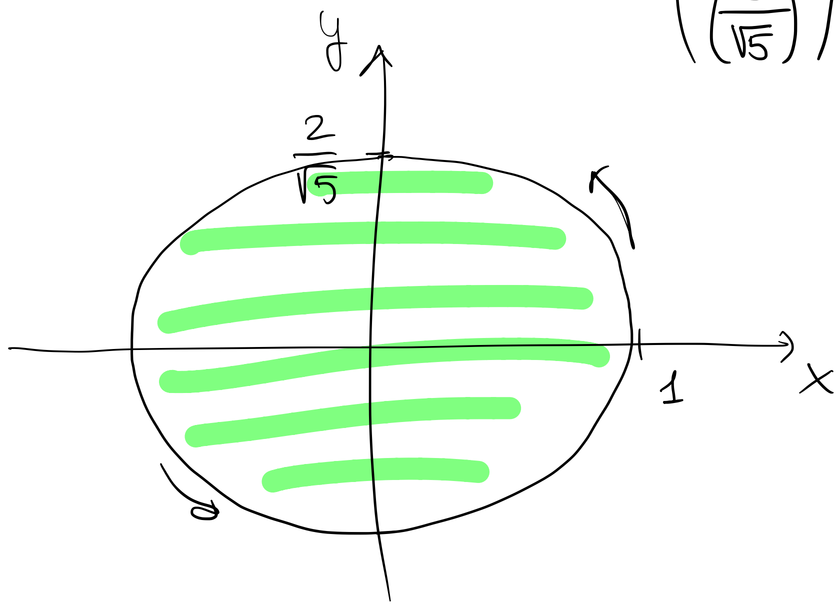


$$\underline{F}(x,y,z) = (z-2y,\ z-2x,\ x+3y+y^2).$$

1° modo: calcolo diretto

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ y=2z \end{cases} \implies x^2+y^2+\frac{y^2}{4}=1$$

$$x^2+\left(\frac{y}{\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)}\right)^2=1$$



$$\begin{cases} x=\cos\theta \\ y=\frac{2}{\sqrt5}\operatorname{sen}\theta \\ z=\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad 0\le\theta\le 2\pi.$$

verso ok!

$$\int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{T}\,ds =$$

$$=\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{sen}\theta-\frac{4}{\sqrt5}\operatorname{sen}\theta\right)(-\operatorname{sen}\theta)+\left(\cancel{\frac{1}{\sqrt5}\operatorname{sen}\theta}-2\cos\theta\right)\frac{2}{\sqrt5}\cos\theta+\right.$$

$$\left.+\left(\cos\theta+\cancel{\frac{6}{\sqrt5}\operatorname{sen}\theta}+\cancel{\frac{4}{5}\operatorname{sen}^2\theta}\right)\frac{1}{\sqrt5}\cos\theta\right]d\theta =$$

$$=\frac{3}{\sqrt5}\pi-\frac{4}{\sqrt5}\pi+\frac{\pi}{\sqrt5}=0$$

2° modo: usando Stokes.

<u>OSS</u> γ è il bordo della superficie S, dove

$$S = \{ (x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1, \; y = 2z \}$$

$$\underline{F}(x,y,z) = (z-2y, \; z-2x, \; x+3y+y^2).$$

$$\operatorname{rot} F = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z-2y & z-2x & x+3y+y^2 \end{pmatrix} =$$

$$= (3+2y-1, \; 0, \; 0) = (2y+2, \; 0, \; 0)$$

$$\iint_S \operatorname{rot} F \cdot \nu \, d\sigma$$

Parametrizzo S

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}} \rho \operatorname{sen}\theta \\ z = \frac{1}{\sqrt{5}} \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad (\rho,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi].$$

Verifico che l'orientazione sia corretta

OK.

$$\varphi_\rho = \left(\cos\theta, \; \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{sen}\theta, \; \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{sen}\theta\right)$$

$$\varphi_\theta = \left(-\rho \operatorname{sen}\theta, \; +\frac{2}{\sqrt{5}} \rho \cos\theta, \; \frac{1}{\sqrt{5}} \rho \cos\theta\right)$$

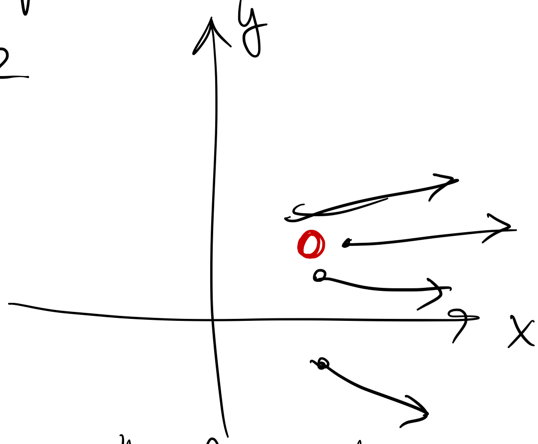
$$C = \frac{2}{\sqrt{5}} \rho \geq 0 \quad \longleftarrow \text{il verso è giusto.}$$

$$A(\rho,\theta) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_S F\cdot\nu \, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\rho \sin\theta + 2\right) \underbrace{A(\rho,\theta)}_{= 0} = 0$$

Interpretazione "fisica" del rotore e della divergenza

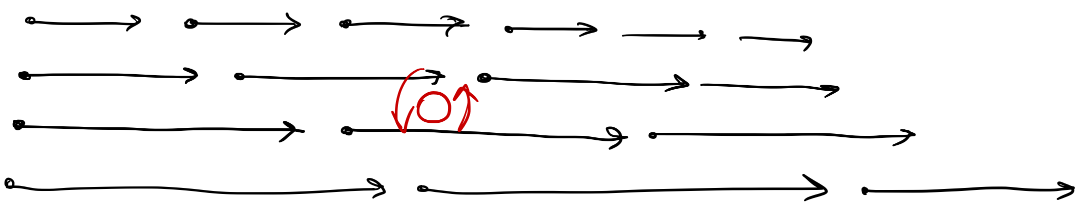
rot in dim. 2



Il rotore "misura" la rotazione (positiva o negativa) di una trottola immersa nel campo vettoriale.

Es.

F

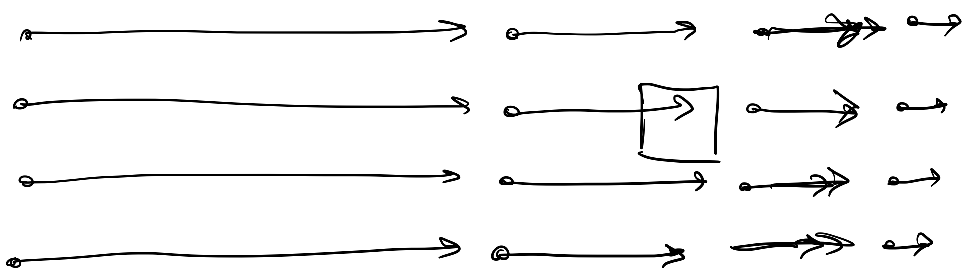


rot $F > 0$. div $F = 0$

$F = (F_1(y), 0)$ $\qquad F_1 \downarrow$

rot $F = -(F_1)_y > 0$

$F(x,y) = (F_1(x), 0)$ $\qquad F_1 \downarrow$



rot $F = 0$

div $F < 0$