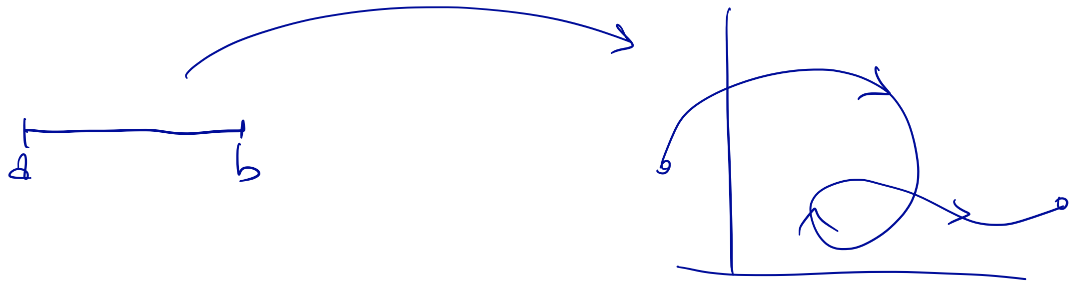
SUPERFICI REGOLARI

Def di curva regolare : $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

$x(t), y(t)$ di classe $C^1([a,b])$, $\underline{\gamma}'(t) \neq 0$ $\quad x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$ $\forall t \in [a,b]$.



Superficie regolare

$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\qquad D$ dominio regolare di $\mathbb{R}^2$

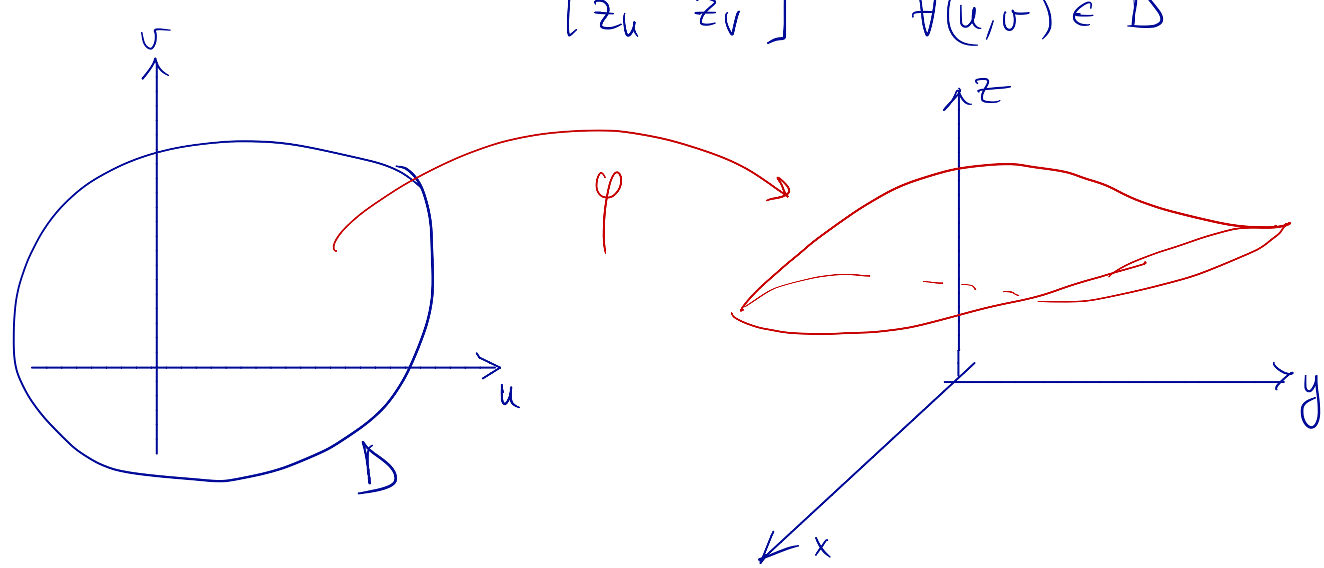
$(u,v) \longmapsto \underline{\varphi}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

$x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ di classe $C^1(D)$

$\underline{\varphi}$ iniettiva in $\mathring{D} = \{$ punti interni a $D\}$

+ condizione di regolarità:

$$J_\varphi(u,v) = \left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\right] = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}$$ deve avere rango 2 $\forall (u,v) \in \mathring{D}$

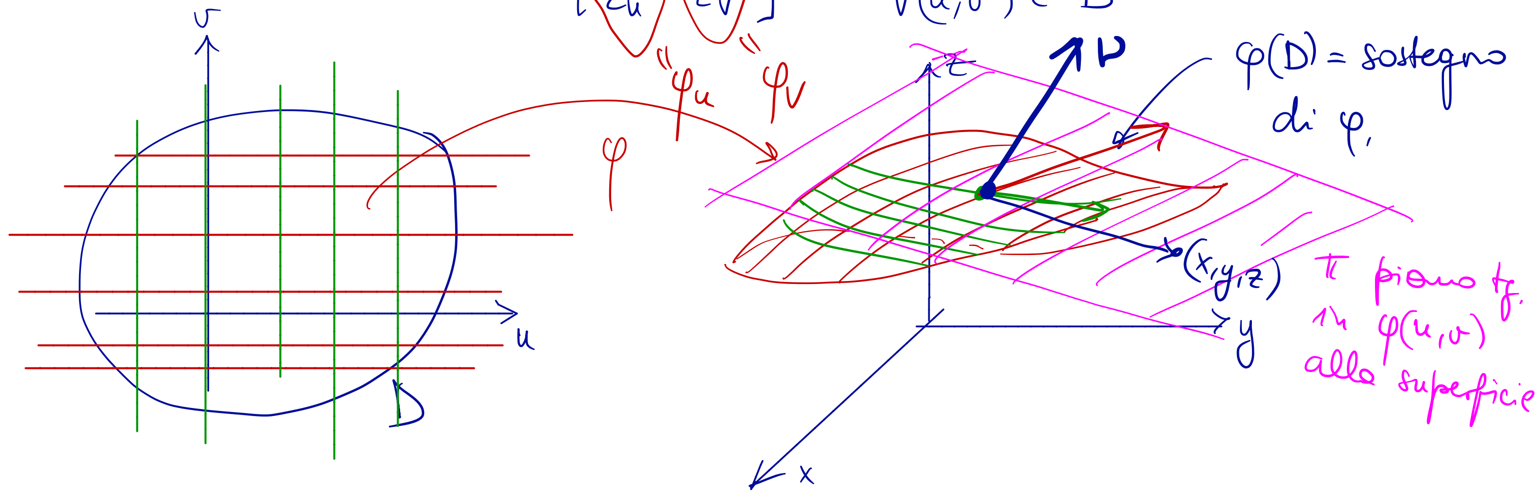


+ condizione di regolarità:

$$J_\varphi(u,v) = \left[\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v)}\right] = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} \quad \text{deve avere rango 2} \quad \forall (u,v) \in \mathring{D}$$

$$\begin{pmatrix} x_u \\ y_u \\ z_u \end{pmatrix} = \varphi_u \qquad \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \\ z_v \end{pmatrix} = \varphi_v$$

cioè almeno uno dei minori di ordine 2 estratti dalla matrice ha $\det \neq 0$.



La condizione di regolarità ci assicurerà l'esistenza di versore normale e piano tangente a ogni punto del sostegno di φ

Le curve "coordinate" $\gamma(u) = \varphi(u, v_0)$ sono effettivamente curve di classe C^1, e sono regolari in quanto $\gamma'(u) = \varphi_u(u, v_0) \neq 0$ per la cond.ne di regolarità

Analogamente per le curve $\gamma(v) = \varphi(u_0, v)$

Inoltre, $\forall (u,v) \in \mathring{D}$ $\quad \varphi_u(u,v)$ e $\varphi_v(u,v)$ non sono paralleli

I vettori $\varphi_u(u,v)$, $\varphi_v(u,v)$ individuano un piano, che è il piano tangente

Vediamo come.

$$J_\varphi(u,v) = \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix}$$ ha rango 2, quindi, se poniamo

$$A(u,v) = \det \begin{bmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} = y_u z_v - y_v z_u$$

$$B(u,v) = -\det \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{bmatrix} = z_u x_v - z_v x_u$$

$$C(u,v) = \det \begin{bmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{bmatrix} = x_u y_v - x_v y_u$$

deve essere $A(u,v)$, $B(u,v)$, $C(u,v)$ non contemporaneamente nulli;

cioè $A^2+B^2+C^2 \neq 0 \quad \forall (u,v) \in \mathring{D}$.

$$\underbrace{\underline{\varphi_u} \wedge \underline{\varphi_v}}_{\neq 0}$$ ortogonale a $\underline{\varphi_u}$ e a φ_v.

definiamo il versore normale $\underline{\nu}(u,v) = \dfrac{\varphi_u \wedge \varphi_v}{\|\varphi_u \wedge \varphi_v\|}(u,v)$.

$$\underline{\varphi_u} \wedge \underline{\varphi_v} = \big(A(u,v), B(u,v), C(u,v)\big) \neq 0.$$

$$\underline{V} = (V_1, V_2, V_3) \qquad \underline{W} = (W_1, W_2, W_3) \implies \underline{V} \wedge \underline{W} = (V_2W_3 - V_3W_2,\ V_3W_1 - V_1W_3,\ V_1W_2 - V_2W_1)$$

$$\begin{pmatrix} V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{pmatrix}$$

$$\nu = \frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ versore normale

$$\underline{\nu} = \frac{(A, B, C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$ versore normale

Piano tangente alla superficie $\Sigma = \varphi(D)$ nel pto

$(x_0, y_0, z_0) = \varphi(u_0, v_0)$

Sono i punti (x, y, z) di $\mathbb{R}^3$ t.c.

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \perp \underline{\nu}$$

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \perp (A, B, C)$$

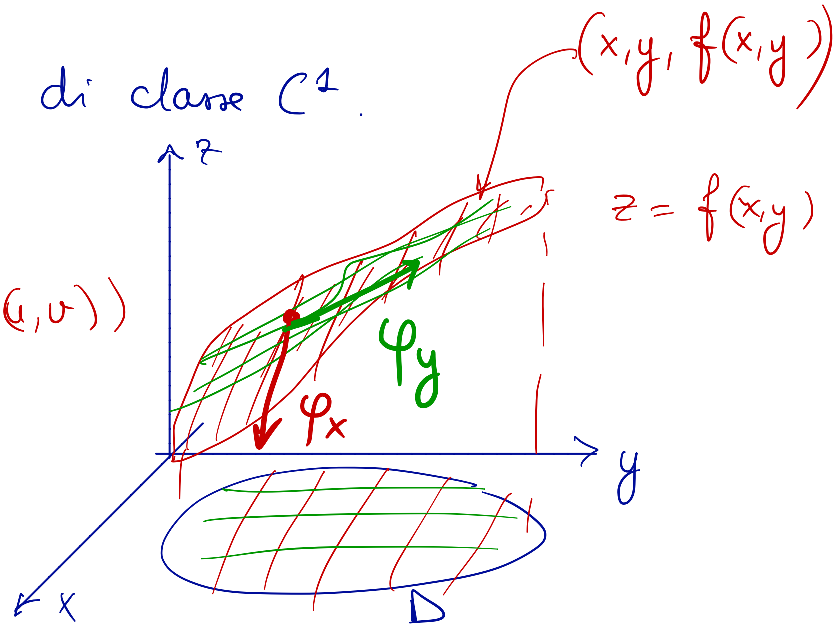
$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot (A, B, C) = 0$$

$$\boxed{(x - x_0) A + (y - y_0) B + (z - z_0) C = 0.}$$ eq^ne del piano tg.

ESEMPI.

1) Superfici grafico

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1.



In questo caso

$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

dove

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = f(u,v) \end{cases}$$

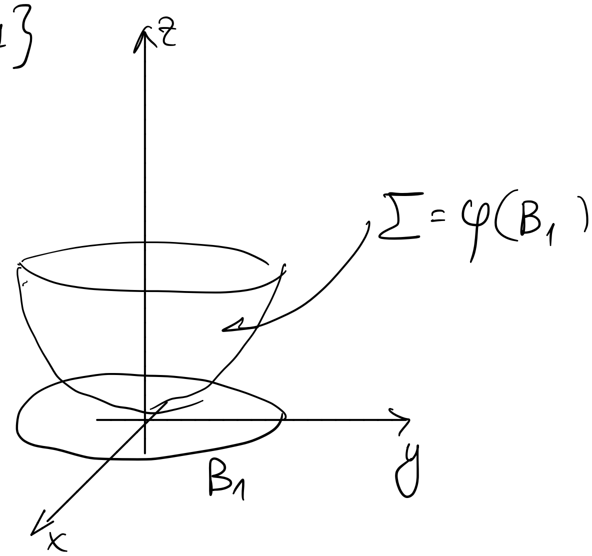
$$J_\varphi(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x(u,v) & f_y(u,v) \end{bmatrix}$$

oss. il rango è 2 perchè

$C(u,v) = 1$.

$z = x^2 + y^2 \qquad (x,y) \in B_1 = \{x^2+y^2 \leq 1\}$

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \qquad (x,y) \in B_1 .$$



Per una sup. grafico

$$\begin{cases} x(u,v) = u \\ y(u,v) = v \\ z(u,v) = f(u,v) \end{cases}$$

$$J_\varphi(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x(u,v) & f_y(u,v) \end{bmatrix}$$

$A(u,v) = -f_x(u,v)$; $B(u,v) = -f_y(u,v)$; $C(u,v) = 1$.

$$\nu = \frac{\left(-f_x(x_0,y_0), -f_y(x_0,y_0), 1\right)}{\sqrt{1 + f_x(x_0,y_0)^2 + f_y(x_0,y_0)^2}}$$

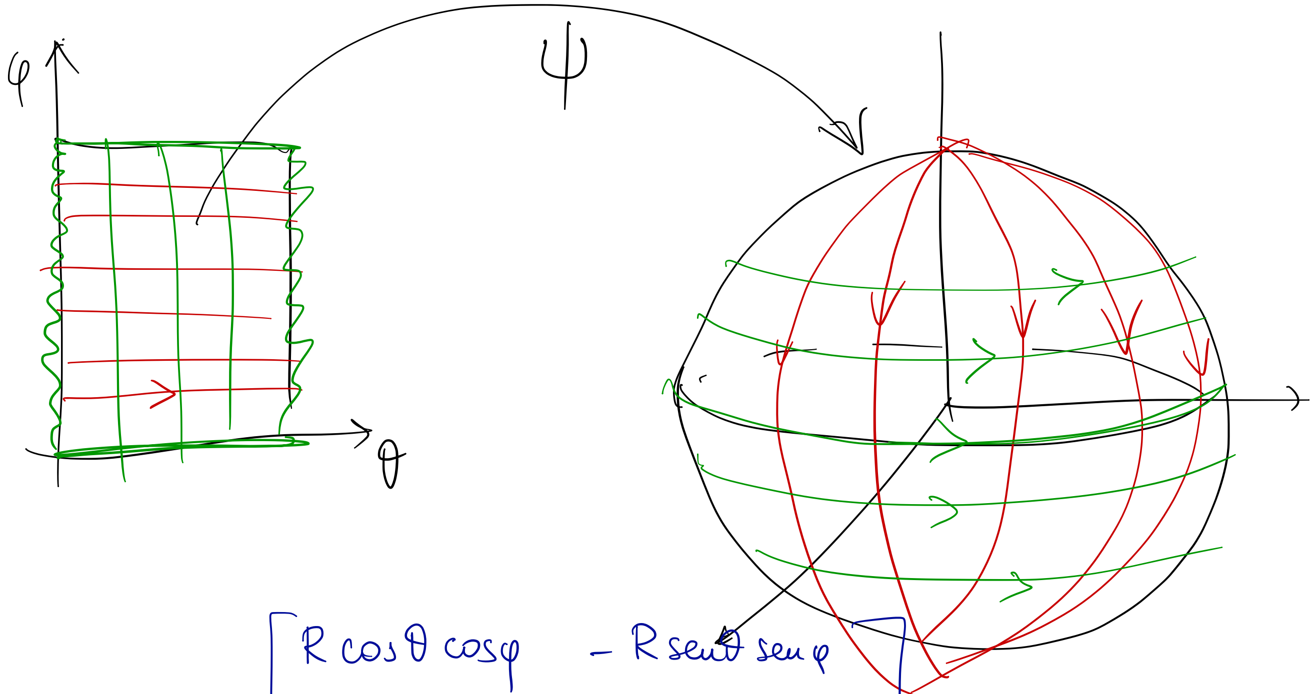
Piano tg al grafico nel pto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

$$-(x-x_0)\, f_x(x_0,y_0) - (y-y_0)\, f_y(x_0,y_0) + z - f(x_0,y_0) = 0$$

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$ come da vecchi ricordi!

ESEMPIO: Sfera di centro $(0,0,0)$ e raggio R.

$$\Psi : \begin{cases} x(\theta,\varphi) = R \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y(\theta,\varphi) = R \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z(\theta,\varphi) = R \cos\theta \end{cases} \qquad (\theta,\varphi) \in [0,\pi] \times [0,2\pi]$$



$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\theta,\varphi)}(\theta,\varphi) = \begin{bmatrix} R\cos\theta\cos\varphi & -R\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi \\ R\cos\theta\operatorname{sen}\varphi & R\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \\ -R\operatorname{sen}\theta & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(\theta,\varphi) = R^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos\varphi$$

$$B(\theta,\varphi) = -R^2 \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\varphi$$

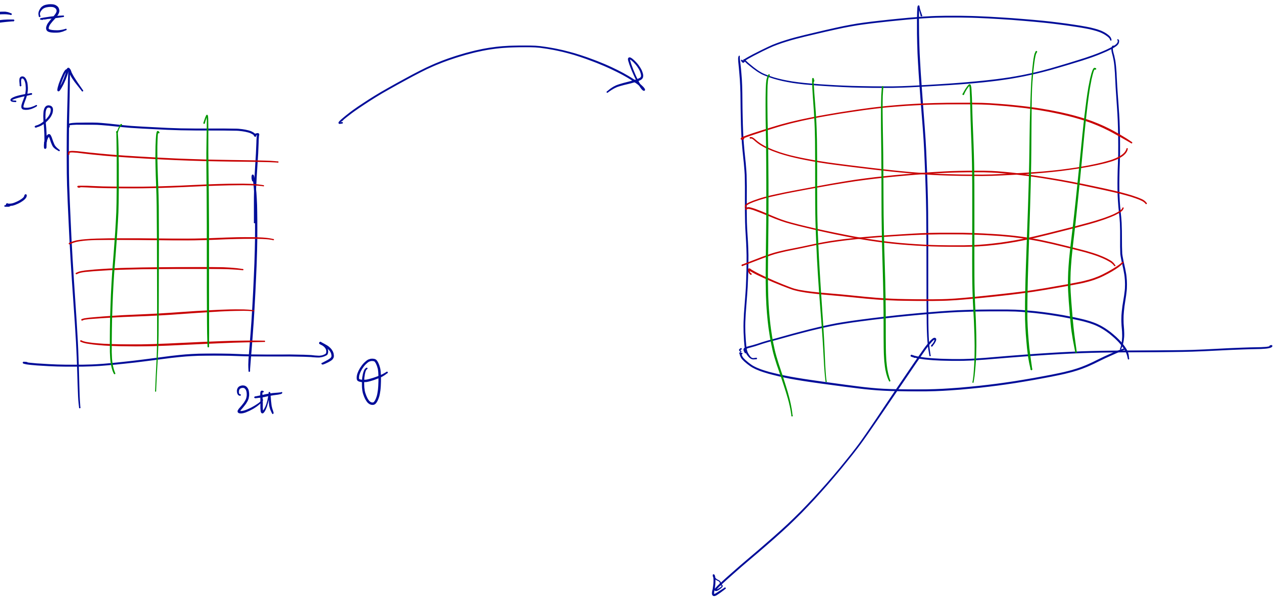
$$C(\theta,\varphi) = R^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\cos^2\varphi + R^2\operatorname{sen}\theta\cos\theta\operatorname{sen}^2\varphi = $$
$$= R^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta$$

$$A^2+B^2+C^2 = R^4 \Big[\overbrace{\operatorname{sen}^4\theta\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^4\theta\operatorname{sen}^2\varphi}^{\operatorname{sen}^4\theta} + \operatorname{sen}^2\theta\cos^2\theta \Big] =$$
$$= R^4 \left[\operatorname{sen}^2\theta\right] \qquad \sqrt{A^2+B^2+C^2} = R^2\operatorname{sen}\theta$$

Cilindro circolare retto

$$\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$(\theta, z) \in [0, 2\pi] \times [0, h]$$



$A = ?$

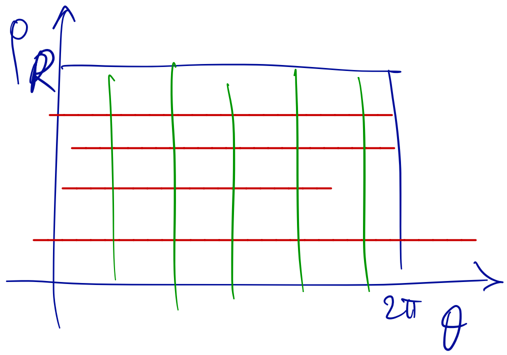
$B = ?$

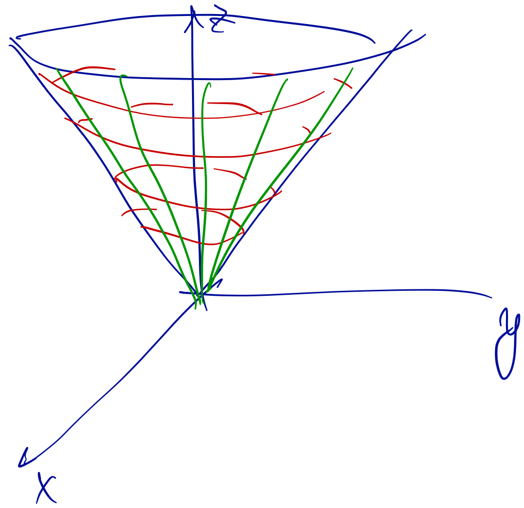
$C = ?$

Cono circolare retto.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = a\rho \end{cases}$$

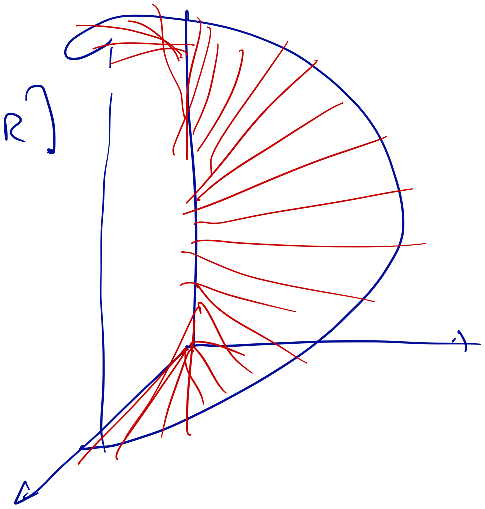
$(\theta,\rho) \in [0,2\pi] \times [0,R]$





Elicoide

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = a\theta \end{cases} \qquad (\theta,\rho) \in [0,2\pi] \times [0,R]$$



Esercizio: verificare che è una sup. regolare