FORMULE DI RIDUZIONE PER INTEGRALI TRIPLI

Sia E dominio normale
- rispetto alla z
- rispetto al piano xy.

$E = \{ (x,y,z) :$ $(x,y) \in D$ dominio normale del piano x,y

$\alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y) \}$ con $\alpha, \beta : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continue

Sia $f(x,y,z) : E \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora

la funzione $g(x,y) = \displaystyle\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ è continua in D

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dx\,dy$$

(integrazione "per fili")

Se D è $\{(x,y) : \quad a \le x \le b, \ \gamma(x) \le y \le \delta(x)\}$

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \left[\int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} dy \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} dz \ f(x,y,z) \right] \right] =$$

$$= \int_a^b dx \left(\iint_{E_x} f(x,y,z)\,dy\,dz \right)$$ integrazione per "fettine"

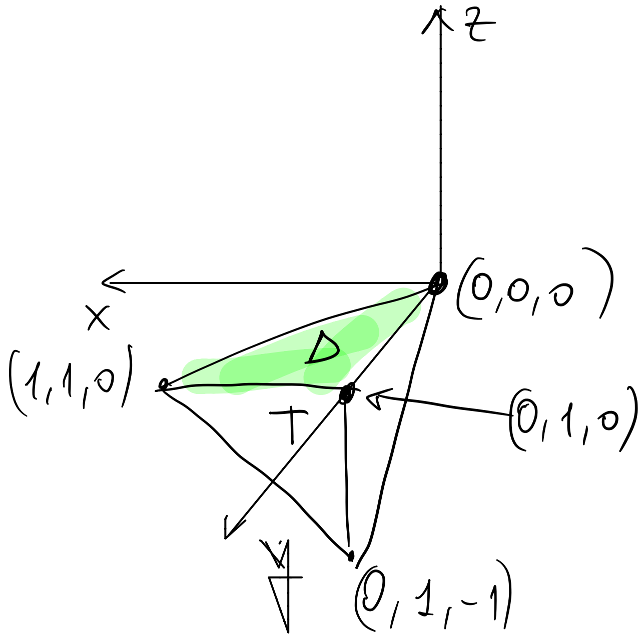
$E_x = \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : \gamma(x) \le y \le \delta(x), \ \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y) \}$.

$= \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : \ (x,y,z) \in E \}$

Esempio: $\iiint_T zy \, dxdydz$, dove T è il tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,1,-1)$.

$\left(\iiint_T \log(z+y+3) \, dxdydz \right)$

↳ conti più impegnativi: farlo.

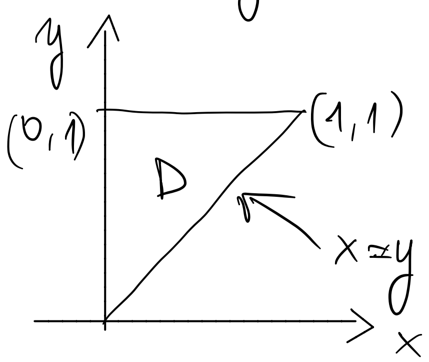


$z = ax+by \implies \boxed{z = x-y}$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ b=-1 \end{cases}$$

$T = \{(x,y,z) : (x,y) \in D, \quad x-y \leq z \leq 0\} = (*)$

D è il triangolo del piano x,y di vertici $(0,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$



$D = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq y\}$

$(*) = \{(x,y,z) : \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \leq y, \quad x-y \leq z \leq 0\}.$

$$\iiint_T zy\, dx\,dy\,dz = \int_0^1 dy \left[\int_0^y dx \left[\int_{x-y}^0 dz\; y\, z \right] \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dy\; y \left[\int_0^y dx \left\{ z^2 \Big|_{z=x-y}^{z=0} \right\} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^1 dy\; y \left[\int_0^y dx\; (x-y)^2 \right] =$$

$$= -\frac{1}{6} \int_0^1 dy\; y \left((x-y)^3 \Big|_{x=0}^{x=y} \right) =$$

$$= -\frac{1}{6} \int_0^1 dy\; y\; y^3 = -\frac{1}{6} \int_0^1 dy\; y^4 = -\frac{1}{30}$$

OSS Se E è unione di un numero finito di domini normali $E_1 \dots E_n$ a due a due privi di pti interni in comune.

Definiamo

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \sum_{k=1}^{n} \iiint_{E_k} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Proprietà dell'integrale triplo (e doppio!).

$E \subset \mathbb{R}^3$ unione di un numero finito di domini normali, a due a due privi di p.ti interni in comune, f, g: continue in E. Allora

1) $$\iiint_E (\alpha f + \beta g)\, dx\,dy\,dz = \alpha \iiint_E f \, dx\,dy\,dz + \beta \iiint_E g \, dx\,dy\,dz$$

$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (linearità)

2) se $f(x,y,z) \leq g(x,y,z) \quad \forall (x,y,z) \in E \implies$

$$\implies \iiint_E f \, dx\,dy\,dz \leq \iiint_E g \, dx\,dy\,dz.$$ (monotonia)

3) Se $f(x,y,z) \equiv c$, allora

$$\iiint_E c \, dx\,dy\,dz = c \operatorname{vol}(E).$$

4) $$\left| \iiint_E f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz \right| \leq \iiint_E |f(x,y,z)|\, dx\,dy\,dz$$

(dis. triangolare)

5) $$\min_E f \operatorname{vol}(E) \leq \iiint_E f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz \leq \max_E f \operatorname{vol}(E)$$

cioè

$$\min_E f \leq \overbrace{\frac{1}{\operatorname{vol} E} \iiint_E f(x,y,z)\, dx\,dy\,dz}^{\text{valore medio di } f \text{ su } E} \leq \max_E f$$

6) f continua in E dominio connesso per archi, allora esiste almeno un punto $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in E$ t.c.

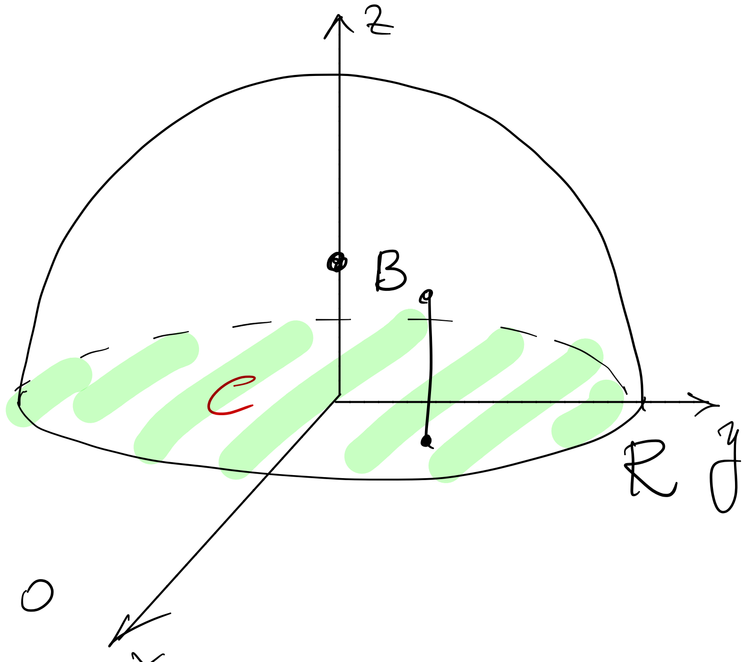
$$f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(E)} \iiint_E f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

7) Se $E = E_1 \cup E_2$, con E_1, E_2 unione di domini normali (come sopra) e t.c. E_1 ed E_2 non hanno pti interni in comune, allora

$$\iiint_E f \, dx\, dy\, dz = \iiint_{E_1} f \, dx\, dy\, dz + \iiint_{E_2} f \, dx\, dy\, dz.$$

Baricentro di una semipalla (per semplicità densità uniforme)

$$B_R^+ = \{(x,y,z): \ x^2+y^2+z^2 \le R^2, \quad z \ge 0\}$$



$$B = (x_B, y_B, z_B)$$

$$x_B = \frac{1}{\mathrm{vol}(B_R^+)} \iiint_{B_R^+} x \, dx\,dy\,dz = 0$$

$$y_B = \frac{1}{\mathrm{vol}(B_R^+)} \iiint_{B_R^+} y \, dx\,dy\,dz = 0$$

$$z_B = \frac{1}{\mathrm{vol}(B_R^+)} \iiint_{B_R^+} z \, dx\,dy\,dz = \frac{3}{2\pi R^3} \iint_C dx\,dy \left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz \; z \right) =$$

$$= \frac{3}{4\pi R^3} \iint_C dx\,dy \quad z^2 \Big|_{z=0}^{z=\sqrt{\cdots}} =$$

$$\boxed{C = \{(x,y): \ x^2+y^2 \le R^2\}}$$

$$= \frac{3}{4\pi R^3} \iint_C dx\,dy \, (R^2-x^2-y^2) = [\text{passo a coord. polari}]$$

$$= \frac{3}{4\pi R^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{=2\pi} \int_0^R d\rho \, (R^2-\rho^2) \frac{\rho 2}{2} = \frac{3}{2R^3} \, \frac{1}{2} \, \frac{(R^2-\rho^2)^2}{2} \Big|_{\rho=R}^{\rho=0} =$$

$$= \frac{3}{8 \cancel{R^3}} R^{\cancel{4}} = \frac{3}{8} R.$$

Formule di cambiamento di variabili negli integrali tripli

Siano T, D due domini regolari di $\mathbb{R}^3$

Parentesi: D si dice dominio normale regolare di $\mathbb{R}^3$ se è della forma

$$D = \{(x,y,z) : (x,y) \in T \text{ dominio normale regolare di } \mathbb{R}^2, \text{ e } \alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y)\} \text{ dove}$$

$\alpha(x,y), \beta(x,y) : T \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe C^1 e t.c. $\alpha(x,y) < \beta(x,y)$ $\forall (x,y)$ interno a T.

(oppure a variabili scambiate).

D si dice dominio regolare di $\mathbb{R}^3$ se è unione di un numero finito di domini normali regolari a due a due privi di pti interni in comune.

Formule di cambiamento di variabili negli integrali tripli

Siano T, D due domini regolari di $\mathbb{R}^3$, e sia

$$\Phi : T \longrightarrow D$$
$$(u,v,w) \longmapsto (x,y,z) = \Phi(u,v,w)$$

$$x = x(u,v,w)$$
$$y = y(\quad)$$
$$z = z(\quad)$$

t.c.

1) Φ biettiva

2) Φ è di classe C^1

3) $\det \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det \begin{bmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{bmatrix} \neq 0$

$\forall (u,v,w) \in T$.

cioè: Φ è un diffeomorfismo C^1.

OSS se Φ è un diff. C^1 tra T e D, Φ^{-1} è un " " tra D e T.

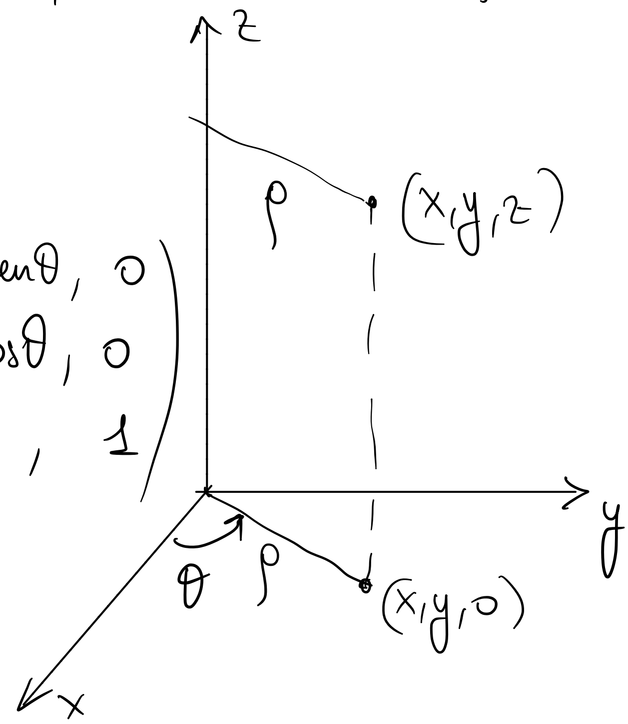
Allora, $\forall$ funzione $f(x,y,z)$ continua in D, si ha

$$\iiint_{D = \Phi(T)} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T f(\Phi(u,v,w)) \left| \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw$$

Esempio importante: coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

(u,v,w) qui si chiamano (ρ,θ,z)



$$\det\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,z)} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta, & -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta, & 0 \\ \mathrm{sen}\,\theta, & \rho\cos\theta, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

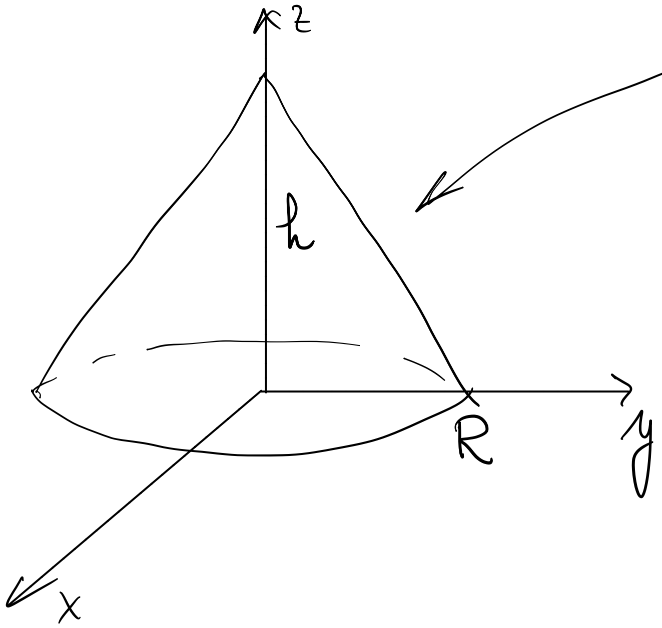
$= \rho$

Attenzione: in realtà questa trasformazione non verifica esattamente le ipotesi del teorema (così come in dim. 2)
Ci sono pb. di iniettività per $\rho = 0$
oppure per $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$.

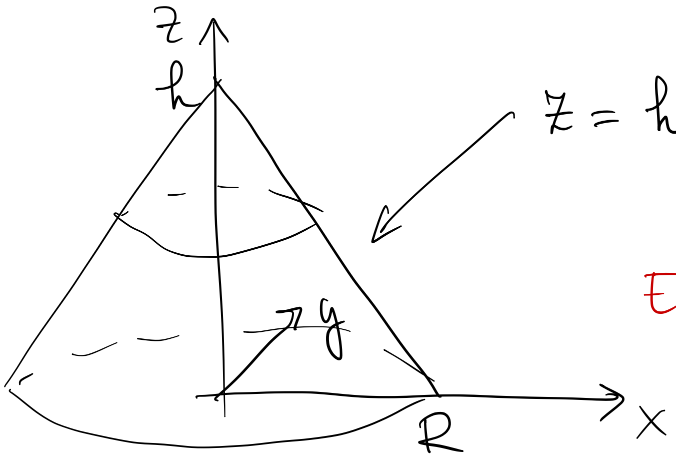
Ma sono insiemi di volume nullo $\Rightarrow$ si procede per approx $\Rightarrow$ vale la stessa formula.

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D f(\rho\cos\theta, \rho\,\mathrm{sen}\,\theta, z)\,\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$$

Esempio: Baricentro del cono circolare retto.



equazione della "falda" che ricopre il cono.



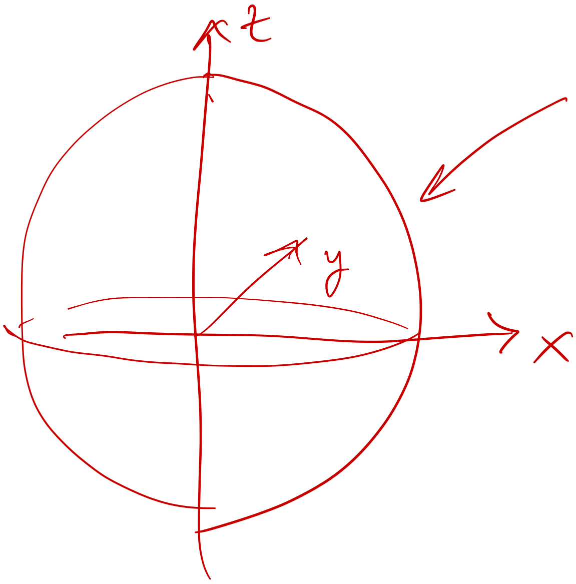
$$z = h - \frac{h}{R}x = \frac{h}{R}(R-x)$$

$$x \longrightarrow \sqrt{x^2+y^2}$$

Eq^{ne} del cono

$$z = \frac{h}{R}\left(R-\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$\Longrightarrow$ in coord. cilindriche $\quad z = \frac{h}{R}(R-\rho)$



$z^2+x^2=R^2$ (opp $x=\sqrt{R^2-z^2}$)

$z^2+x^2+y^2=R^2$ equaz sfera.

Il cono "pieno" descritto sopra si scrive, in coord. cartesiane

$$E = \left\{ (x,y,z) : \; x^2+y^2 \le R^2, \quad 0 \le z \le \frac{h}{R}\left(R - \sqrt{x^2+y^2}\right) \right\}$$

in coord. cilindriche diventa

$$\tilde{E} = \left\{ (\rho,\theta,z) : 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le R, \quad 0 \le z \le \frac{h}{R}(R-\rho) \right\}$$

$$z_B = \frac{1}{\mathrm{Vol}\, E} \iiint_E z \, dx\,dy\,dz$$

$$\mathrm{Vol}\, E = \iiint_E 1 \, dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R d\rho \int_0^{\frac{h}{R}(R-\rho)} dz \; \rho =$$

$$= 2\pi \int_0^R d\rho \; \rho \, \frac{h}{R}(R-\rho) = \frac{2\pi h}{R}\left(R \cdot \frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3} \right) =$$

$$= \frac{2\pi h R^2}{6} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$