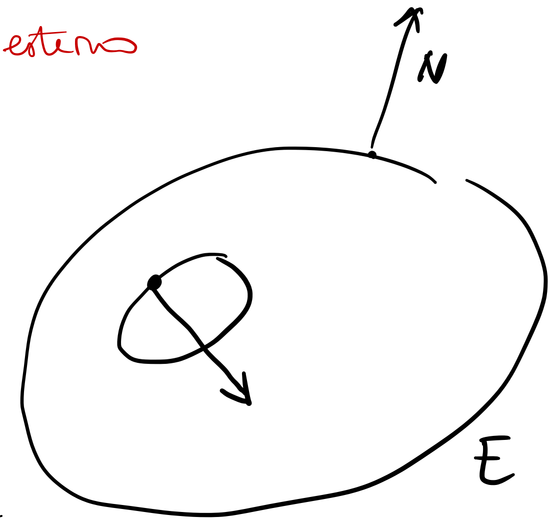
Teorema della divergenza

Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ dominio regolare. Sia $\underline{F} : E \to \mathbb{R}^2$ campo vettoriale di classe $C^1(E;\mathbb{R}^2)$. Allora si ha

$$\int_{\partial E} \underline{F}\cdot\underline{N}\, ds = \iint_E \mathrm{div}(F)\, dx\,dy$$

$\underline{N}$ = versore normale esterno

flusso di $\underline{F}$ uscente da ∂E.



dove $\mathrm{div}\,\underline{F} = (F_1)_x + (F_2)_y$

Se $\gamma(t)$ è una parametrizzazione della frontiera $\partial^+ E$ $\quad \underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t)) \quad t\in[a,b]$

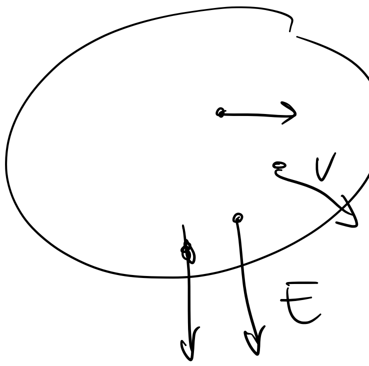
$$\underline{N}(t) = \left(\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} , \frac{-x'(t)}{\sqrt{}} \right)$$

$$\int_{\partial E} \underline{F}\cdot\underline{N}\, ds = \int_a^b \Big(F_1(\underline{\gamma}(t))\, y'(t) - F_2(\gamma(t))\, x'(t)\Big)\, dt =$$

$$= \int_{\partial^+ E} (-F_2, F_1)\cdot \underline{T}\, ds \overset{\text{Stokes}}{=} \iint_E \mathrm{rot}(-F_2, F_1)\, dx\,dy =$$

$$= \iint_E \left[(F_1)_x + (F_2)_y\right] dx\,dy = \iint_E \mathrm{div}(\underline{F})\, dx\,dy.$$

Esempio: flusso di un fluido uscente da una regione E

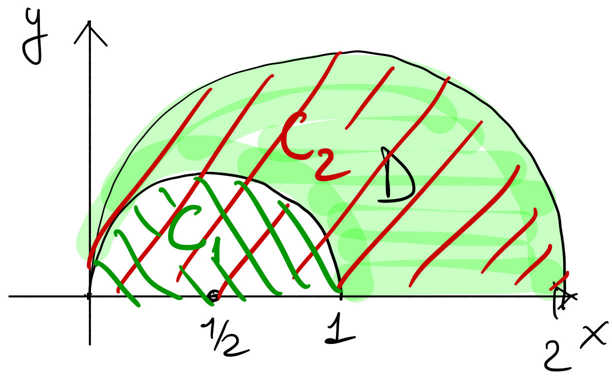


Esercizio. Flusso di $\underline{F}(x,y) = (x^2-y,\ xy)$ uscente da ∂D

dove

$$D = \{(x,y):\ x \le x^2+y^2 \le 2x,\quad y \geq 0\}.$$

Esercizio: fare il calcolo diretto (per casa)



$$\text{div}\, F = (x^2-y)_x + (xy)_y =$$

$$= 2x + x = 3x$$

$$\int_{\partial D} \underline{F} \cdot \underline{N}\, ds = \iint_D \text{div}\, F\, dx\,dy = 3 \iint_D x\, dx\,dy.$$

Passiamo a coord. polari $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$

$x \leq x^2+y^2$ diventa $\rho \geq \cos\theta$

$x^2+y^2 \leq 2x$ " $\rho \leq 2\cos\theta$.

In coord. polari D diventa

$$\tilde{D} = \left\{(\rho,\theta):\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\quad \cos\theta \leq \rho \leq 2\cos\theta\right\}$$

$$3\iint_D x\,dx\,dy = 3\int_0^{\pi/2} d\theta \int_{\cos\theta}^{2\cos\theta} d\rho\ \rho^2 \cos\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\theta\,\cos\theta\,\left(8\cos^3\theta - \cos^3\theta\right) = 7\int_0^{\pi/2} d\theta\ \cos^4\theta =$$

$$= \text{facile} \ldots$$

In alternativa.

$$3\iint_D x\,dx\,dy = 3\left[\iint_{C_2} x\,dx\,dy - \iint_{C_1} x\,dx\,dy\right]$$

dove C_2 è il semicerchio di centro $(1,0)$ e raggio 2 $(y \geq 0)$

C_1 " " " " $(1/2, 0)$ e " 1

$$\iint_{C_2} x\,dx\,dy = \text{area}(C_2)\underbrace{\left[\frac{1}{\text{area}(C_2)}\iint_{C_2} x\,dx\,dy\right]}_{\text{ascissa del baricentro di } C_2 \,=\, 1} = \text{area}(C_2) =$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

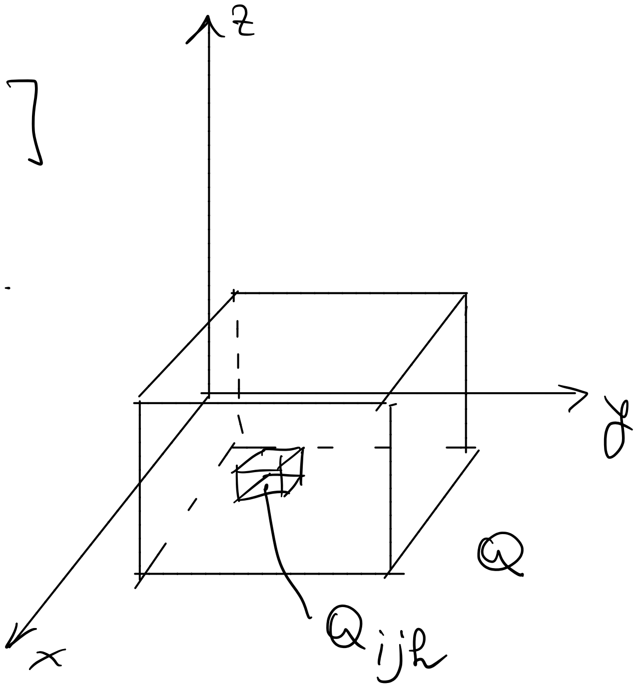
$$\iint_{C_1} x\,dx\,dy = \text{area}(C_1)\cdot\underbrace{\left[\frac{1}{\text{area}(C_1)}\iint_{C_1} x\,dx\,dy\right]}_{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{16}$$

$$3 \iint_D x \, dx \, dy = 3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{16} \right) = \frac{21}{16} \pi .$$

INTEGRALI TRIPLI

Integrali su parallelepipedi:



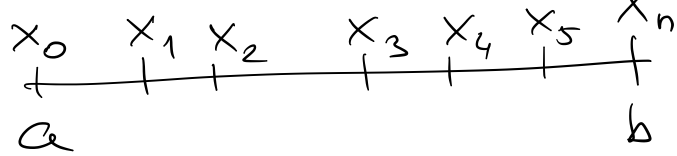
$$Q = [a,b] \times [c,d] \times [r,s]$$

$f(x,y,z): Q \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata.

Sia P_1 una partizione di $[a,b]$

$P_1 = \{x_0, \dots x_n\}$

con $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$.



P_2 partizione di $[c,d]$

$y_0 = c < y_1 < \dots < y_m = d$

P_3 partiz. di (r,s)

$z_0 = r < z_1 < \dots < z_k = s$

$$P = P_1 \times P_2 \times P_3$$

Questo corrisponde a partizionare Q in $m \times n \times k$ parallelepipedi

$$Q_{ijh} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{h-1}, z_h]$$

$$i = 1 \dots n, \quad j = 1 \dots m, \quad h = 1 \dots k$$

$\forall Q_{ijh}$ calcolo $M_{ijh} = \sup\limits_{(x,y,z) \in Q_{ijh}} f(x,y,z)$, $m_{ijh} = \inf\limits_{Q_{ijh}} f$

$$\mathrm{vol}(Q_{ijh}) = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_h - z_{h-1})$$

$$S(P) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \sum_{h=1}^{k} M_{ijh} \operatorname{vol}(Q_{ijh})$$ somma superiore

$$s(P) = \sum_{i} \sum_{j} \sum_{h} m_{ijh} \operatorname{vol}(Q_{ijh})$$ somma inferiore

$$\sup_P s(P) \leq \inf_P S(P)$$

Se questi due numeri sono uguali, dirò che f è integrabile secondo Riemann in Q, e porrò

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \sup_P s(P) = \inf_P S(P).$$

Integrali su insiemi $\neq$ parallelepipedi

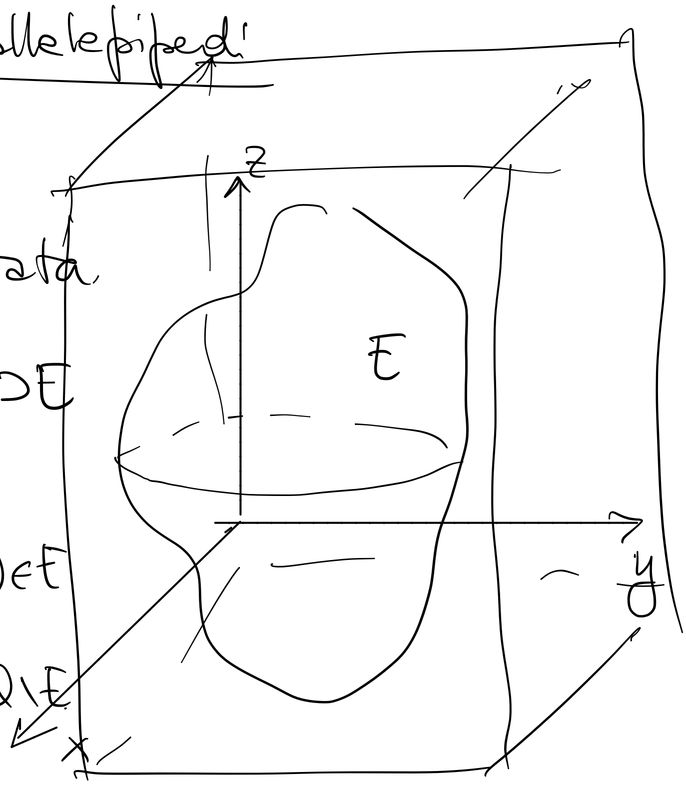
E insieme limitato di $\mathbb{R}^3$.

$f(x,y,z) : E \to \mathbb{R}$ limitata.

Si prende un parallelepipedo $Q \supset E$

Definiamo

$$\tilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & \text{se } (x,y,z) \in E \\ 0 & \text{se } (x,y,z) \in Q \setminus E \end{cases}$$



Provo a vedere se $\tilde{f}$ è integrabile su Q.

Se lo è, poniamo

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_Q \tilde{f}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

e diremo che f è integrabile in E.

<u>OSS</u> Questa procedura non dipende dalla scelta del parallelepipedo Q.

Se la funzione $f(x,y,z) \equiv 1$ è integrabile in E, diremo che E è misurabile secondo Peano-Jordan, e

$$\text{mis}\, E = \iiint_E 1\,dx\,dy\,dz = \iiint_Q \underbrace{\chi_E(x,y,z)}_{=\begin{cases}1 & \text{se } (x,y,z)\in E\\ 0 & \notin E\end{cases}}\,dx\,dy\,dz$$

$\text{mis}\, E = \text{vol}\, E = |E|_3$

funzione caratteristica di E

<u>TEOREMA</u> E misurabile $\iff \text{mis}(\partial E) = 0$.

TEOREMA

<u>TEOREMA</u> (Caratterizzazione degli insieme di misura nulla in $\mathbb{R}^3$).

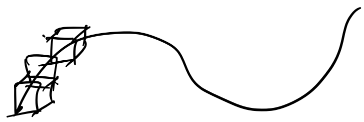
$E \subset \mathbb{R}^3$ ha misura (volume) nulla $\iff$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, Q_1 \dots Q_k$ famiglia finita di parallelepipedi

t.c. $E \subset \bigcup_{i=1}^{k} Q_i$, $\quad \sum_{i=1}^{k} \text{vol.}(Q_i) < \varepsilon$.

<u>Esempi di insiemi di misura nulla</u> in $\mathbb{R}^3$

1) un punto
2) un insieme finito di punti
3) un segmento
4) il sostegno di una curva regolare



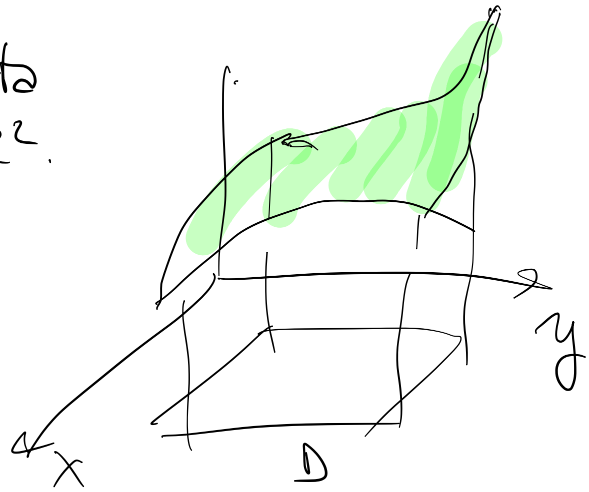
5) Una porzione limitata di piano.
6) Il grafico di una funzione di due variabili

$f(x,y) : D \longrightarrow \mathbb{R}$ limitata

(D misurabile e limitato di $\mathbb{R}^2$.)

$E = \{(x,y,z) : (x,y) \in D,\ z = f(x,y)\}$

f continua



TEOREMA E misurabile di $\mathbb{R}^3$, f continua e limitata

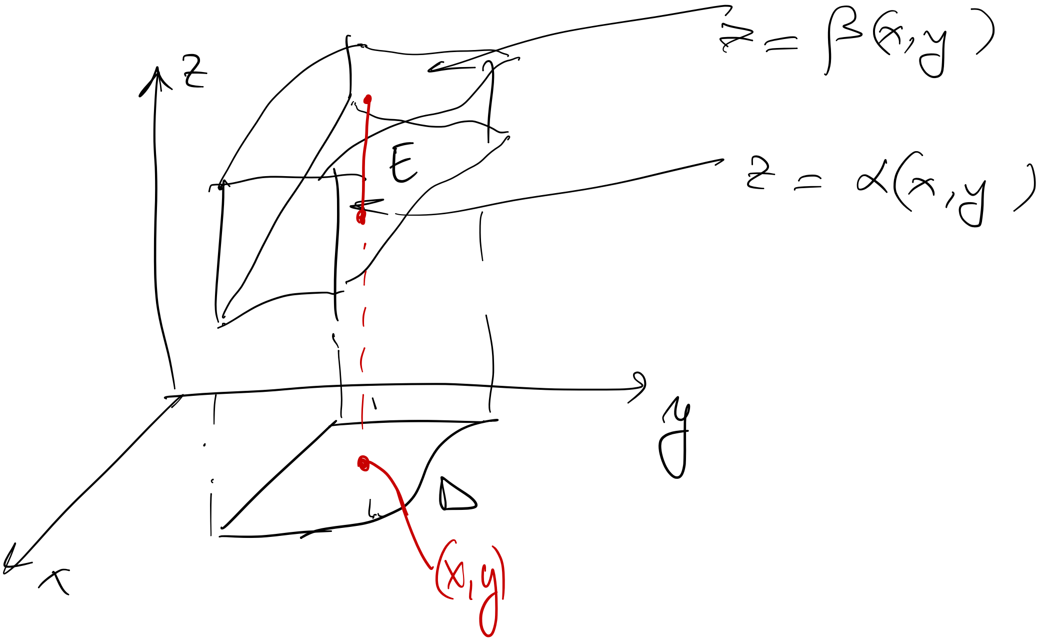
$\Rightarrow$ f integrabile su E.

E dominio normale
- rispetto alla z
- rispetto al piano xy.

$$E = \{ (x,y,z) : (x,y) \in D \text{ dominio normale del piano } x,y$$
$$\alpha(x,y) \leq z \leq \beta(x,y) \}$$

dove $\alpha, \beta : D \longrightarrow \mathbb{R}$ continue e t.c.

$$\alpha(x,y) \leq \beta(x,y) \quad \forall (x,y) \in D.$$



Si dim. che E è misurabile secondo P-J.

$$\mathrm{vol}(E) = \iint_D [\beta(x,y) - \alpha(x,y)]\, dx\,dy$$

FORMULE DI RIDUZIONE PER INTEGRALI TRIPLI

Sia E dominio normale rispetto alla z / rispetto al piano xy.

$$E = \{ (x,y,z) : (x,y) \in D \text{ dominio normale del piano } x,y \quad \alpha(x,y) \le z \le \beta(x,y) \}$$

Sia $f(x,y,z) : E \to \mathbb{R}$ continua. Allora

la funzione $g(x,y) = \int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ è continua in D

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dx\,dy$$

(integrazione "per fili")

Se D è $\{(x,y) : a \le x \le b,\ \gamma(x) \le y \le \delta(x)\}$

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \left[\int_{\gamma(x)}^{\delta(x)} dy \left[\int_{\alpha(x,y)}^{\beta(x,y)} dz \; f(x,y,z) \right] \right]$$