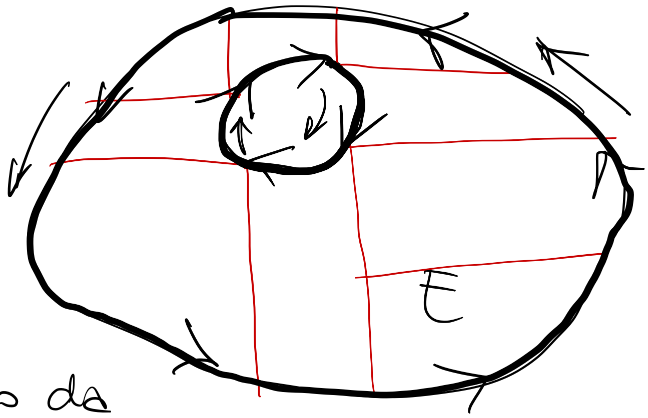
Formule di Gauss-Green in dim. 2

E dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ $\iff$ E unione di un numero finito di domini normali regolari, a due a due senza pti interni in comune.



OSS ∂E è unione di un numero finito di curve regolari.

Stabiliamo di orientare ∂E in modo da lasciare sempre E sulla finistra.

TEOREMA (formule di Gauss-Green).

E dominio regolare di $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) : E \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(E)$ (fino al bordo!). Allora si ha:

1) $$\int_{\partial^+ E} f\, dy = \iint_E \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\,dy$$

$\partial^+ E$ → frontiera di E orientata in verso positivo

2) $$\int_{\partial^+ E} f\, dx = -\iint_E \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\,dy$$

dove $\partial^+ E$ è la frontiera di E percorsa nel verso "positivo".

Dim. della 1ª formula di Gauss-Green

$$\int_{\partial^+ E} f \, dy = \iint_E \frac{\partial f}{\partial x} \, dx\,dy$$

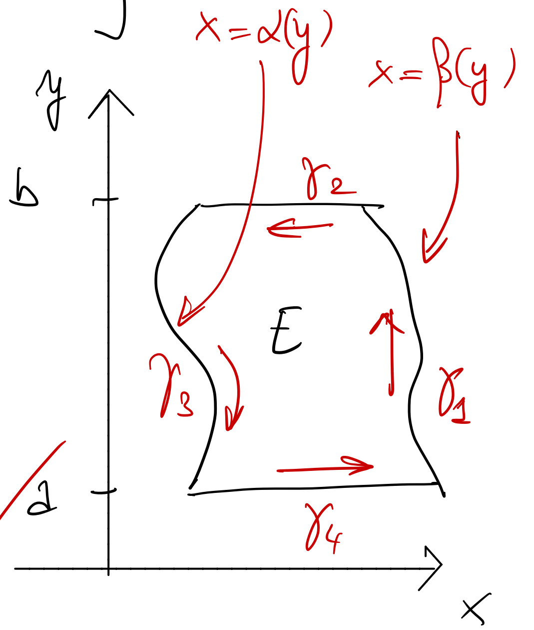
1) Per un dominio normale rispetto alla y:

$$E = \{(x,y) : \ a \le y \le b, \ \alpha(y) \le x \le \beta(y)\}$$

$$\iint_E \frac{\partial f}{\partial x} \, dx\,dy = \int_a^b dy \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} dx \ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right] =$$

teor. fond. calc. int.

$$= \int_a^b dy \left[f(\beta(y),y) - f(\alpha(y),y) \right]$$



$$\int_{\partial^+ E} f \, dy = \int_{\gamma_1} f \, dy + \cancel{\int_{\gamma_2} f \, dy} + \int_{\gamma_3} \cdots + \cancel{\int_{\gamma_4} \cdots}$$

si cancellano (sono curve orizzont.)

$$\gamma_1 \quad \begin{cases} y = t \\ x = \beta(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b]$$

$$\int_{\gamma_1} f \, dy = \int_a^b f(\beta(t),t) \, \underbrace{y'(t)}_{=1} \, dt = \int_a^b f(\beta(t),t) \, dt$$

$$\int_{\partial^+ E} f\,dy = \int_{\gamma_1} f\,dy + \cancel{\int_{\gamma_2} f\,dy} + \int_{\gamma_3} \cdots + \cancel{\int_{\gamma_4} \cdots}$$

γ_1 $\quad \begin{cases} y = t \\ x = \beta(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b]$

$$\int_{\gamma_1} f\,dy = \int_a^b f(\beta(t),t)\,\underbrace{y'(t)}_{=1}\,dt = \int_a^b f(\beta(t),t)\,dt$$

γ_3^- $\quad \begin{cases} x = \alpha(t) \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [a,b]$

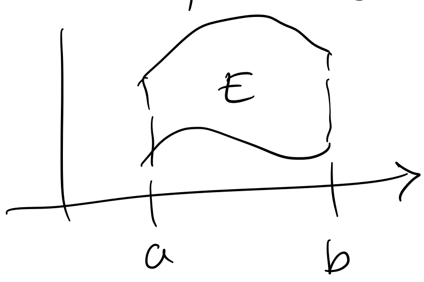
$$\int_{\gamma_3} f\,dy = -\int_a^b f(\alpha(t),t)\,dt$$

$$\int_{\partial^+ E} f\,dy = \int_a^b f(\beta(t),t)\,dt - \int_a^b f(\alpha(t),t)\,dt =$$

$$= \iint_E \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy.$$

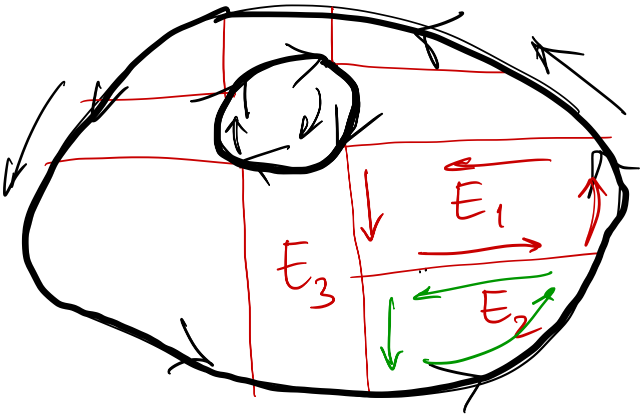
2) Per un dominio normale rispetto alla x:

$$E = \{(x,y): \quad a \leq x \leq b \,, \quad \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$$



(Dim. un po' più complicata, per il momento la omettiamo)

3) Dominio regolare generale



E è unione dei domini normali regolari $E_1, E_2, \dots E_n$.

Gauss-Green per i dom. normali

$$\iint_E \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{E_i} \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial E_i^+} f\,dy =$$

OSS I tratti in comune tra ∂E_i e ∂E_j vengono percorsi due volte in versi opposti $\Rightarrow$ non danno contributo

$$= \int_{\partial E^+} f\,dy.$$

OSS Le formule di Gauss-Green possono essere usate per calcolare aree mediante integrali curvilinei.

E = dominio regolare di $\mathbb{R}^2$.

$$\text{area } E = \iint_E 1 \, dx\,dy$$

Ricordo Stokes $$\iint_E (B_x - A_y)\, dx\,dy = \int_{\partial^+ E} A\, dx + B\, dy$$

Cerco $A(x,y)$, $B(x,y)$ t.c. $B_x - A_y \equiv 1$.

1) $A \equiv 0$, $B(x,y) = x$.

$$\text{area}(E) = \int_{\partial^+ E} x \, dy$$

2) $B \equiv 0$, $A(x,y) = -y$

$$\text{area}(E) = -\int_{\partial^+ E} y \, dx$$

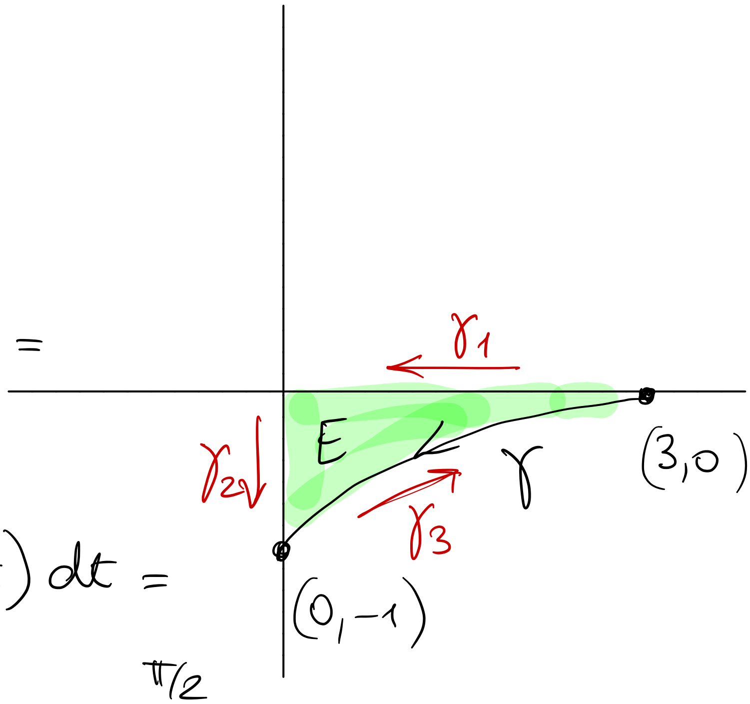
3) $A(x,y) = -\frac{y}{2}$, $B(x,y) = \frac{x}{2}$

$$\text{area}(E) = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ E} (x\,dy - y\,dx)$$

etc...

ESEMPIO Sia γ la curva $\begin{cases} x(t) = 3\cos^2 t \\ y(t) = -\operatorname{sen}^3 t \end{cases}$ $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Calcolare l'area della regione E delimitata da γ e dagli assi coordinati.



$$\text{Area } E = \int_{\partial^+ E} x\, dy =$$

$$= \cancel{\int_{\gamma_1} x\, dy} + \cancel{\int_{\gamma_2} \overset{=0}{x}\, dy} - \int_{\gamma} x\, dy =$$

$$= -\int_0^{\pi/2} 3\cos^2 t \left(-3\operatorname{sen}^2 t \cos t\right) dt =$$

$$= 9\int_0^{\pi/2} \cos^3 t \operatorname{sen}^2 t\, dt = 9\int_0^{\pi/2} \cos t \left(\operatorname{sen}^2 t - \operatorname{sen}^4 t\right) dt =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen} t = u \\ \cos t\, dt = du \end{array}} = 9\int_0^1 (u^2 - u^4)\, du = 9\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) = 3 - \frac{9}{5} = \frac{6}{5}$$

Provare a ricalcolarlo usando

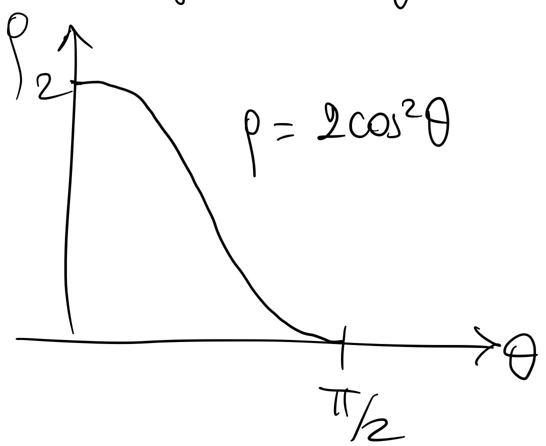
$$\text{area } E = -\int_{\partial^+ E} y\, dx$$

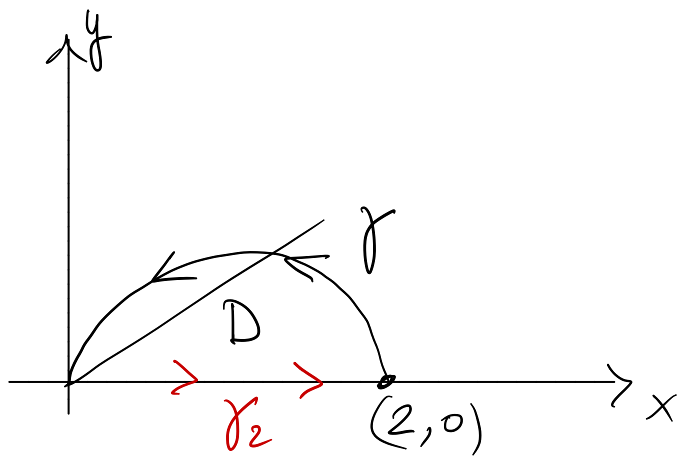
ESERCIZIO: Disegnare la curva γ di equazione polare

$$\rho = 2\cos^2\theta \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

e calcolare $\iint_D x\, dx\, dy$, dove D è il dominio delimitato da γ e dall'asse x.

Prima, disegnamo il grafico di $\rho(\theta)$ (N.B. non è la curva!)





Calcolo diretto

$$\iint_D x\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\cos^2\theta} d\rho\; \rho^2 \cos\theta =$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} d\theta\, \cos\theta\, \cos^6\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} d\theta\, \cos^7\theta = \frac{8}{3}\int_0^{\pi/2} (1-\operatorname{sen}^2\theta)^3 \cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^1 (1-t^2)^3\, dt = \dots$$

2) Calcolo con Stokes

$$\iint_D x \, dx\, dy = \int_{\partial^+ D} \frac{x^2}{2} dy = \frac{1}{2}\int_{\gamma} x^2 dy + \cancel{\frac{1}{2}\int_{\gamma_2} x^2 dy} =$$

$B_x - A_y = x$ per es. $A \equiv 0$, $B(x,y) = \frac{x^2}{2}$

$$= \cancel{\frac{1}{2}} \int_0^{\pi/2} d\theta \;\; 4\cos^6\theta \cdot \cancel{2}\left(\cos^3\theta - 2\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta\right) d\theta = (*)$$

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta = 2\cos^3\theta \\ y = \rho(\theta)\operatorname{sen}\theta = 2\cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \end{cases} \qquad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

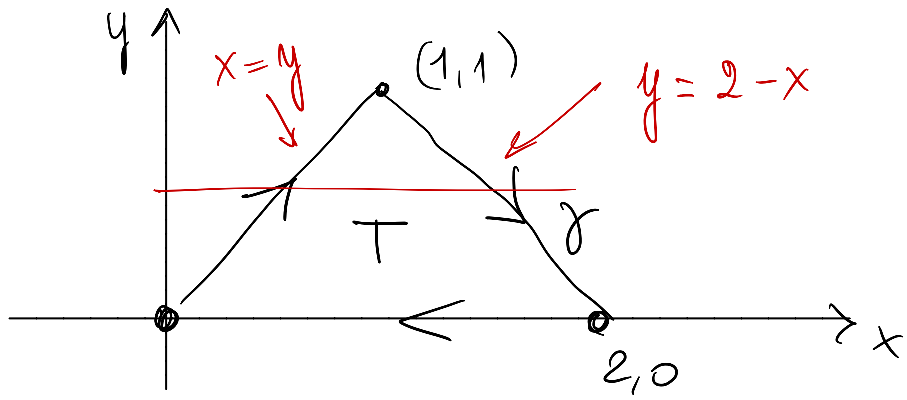
$$(*) = 4 \int_0^{\pi/2} \left[(1-\operatorname{sen}^2\theta)^4 - 2(1-\operatorname{sen}^2\theta)^3 \operatorname{sen}^2\theta\right] \cos\theta \, d\theta \qquad \operatorname{sen}\theta = t$$

$$= 4 \int_0^1 (1-t^2)^3 \left(1 - t^2 - 2t^2\right) dt$$

ESERCIZIO Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma (x^2 - xy)\,dx + (xy - y^2)\,dy$$

dove γ è la frontiera, percorsa in verso <u>orario</u>, del triangolo T di vertici $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$.



Si può fare il calcolo diretto (es. per casa)

Oppure si può usare Stokes.

verso "negativo".

$$\int_\gamma \underbrace{(x^2 - xy)}_{F_1}\,dx + \underbrace{(xy - y^2)}_{F_2}\,dy = -\iint_T \underbrace{\text{rot}\,F}_{= B_x - A_y = y + x}\,dx\,dy =$$

$$= -\iint_T (y + x)\,dx\,dy =$$

$T = \{(x,y):\ 0 \le y \le 1,\ y \le x \le 2-y\}$

$$= -\int_0^1 dy \int_y^{2-y} dx\,(y + x) =$$

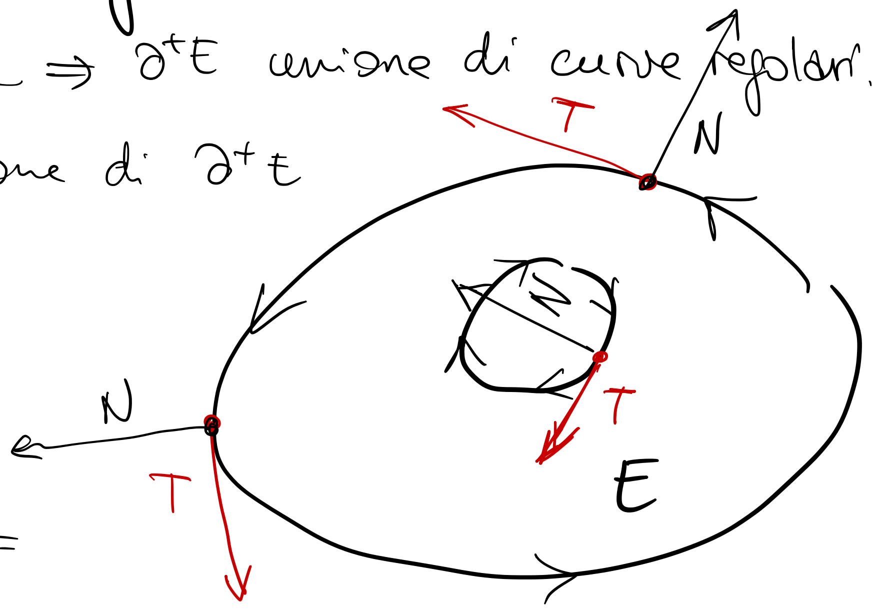
$$= -\int_0^1 dy \left[y(2 - 2y) + \frac{1}{2}\left[(2-y)^2 - y^2\right] \right] =$$

$$= -\int_0^1 dy \left(2y - 2y^2 + \frac{1}{2}\left[4 - 4y + \cancel{y^2} - \cancel{y^2}\right] \right) = \dots$$

Teorema della divergenza

E dominio regolare $\Rightarrow \partial^+ E$ unione di curve regolari.

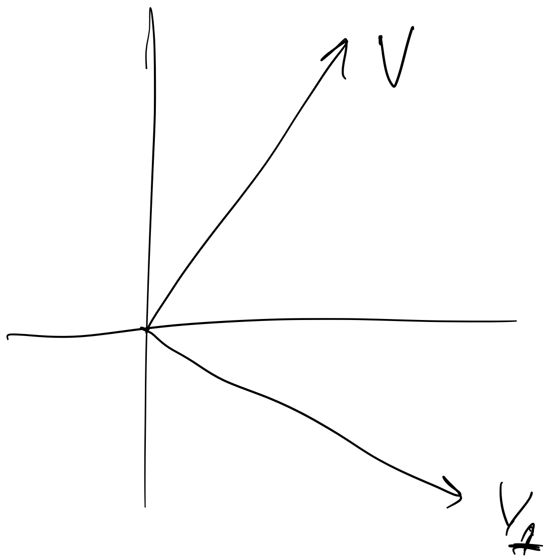
γ = parametrizzazione di $\partial^+ E$



$$\underline{T}(t) = \frac{\underline{\gamma}'(t)}{\|\underline{\gamma}'(t)\|} = \frac{(x'(t), y'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} = \left(\frac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}, \frac{y'(t)}{\sqrt{---}} \right)$$

$\underline{N}(t)$ = versore normale esterno a E = versore ottenuto ruotando $\underline{T}$ di $90°$ verso destra.

$$\underline{N}(t) = \left(\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}, -\frac{x'(t)}{\sqrt{---}} \right)$$



$$(a,b) = (a+ib)$$

$$-i(a+ib) = -ai + b = b - ai$$

Sia $\underline{F}(x,y)$ un campo vettoriale di classe $C^1(E)$

Flusso di $\underline{F}$ uscente da ∂E $= \displaystyle\int_{\partial E} \underline{F} \cdot \underline{N} \, ds =$

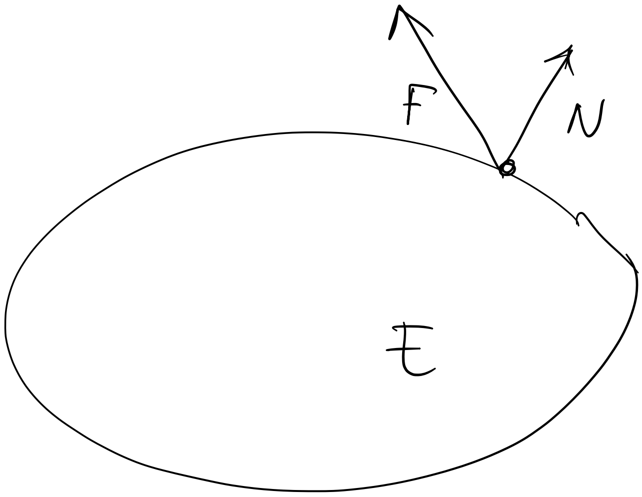
versore normale esterno

Se $\overset{+}{\partial E}$ è parametrizzata con la curva

$\underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t)) \qquad t \in [a,b].$

$$\Rightarrow \text{Flusso} = \int_{\partial E} \underline{F} \cdot \underline{N} \, ds = \int_a^b \underline{F}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \frac{(y'(t), -x'(t))}{\cancel{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}} \cancel{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}} \, dt$$

$$= \int_a^b \left[F_1(x(t), y(t))\, y'(t) - F_2(x(t), y(t))\, x'(t)\right] dt$$



OSS.

$$\text{Flusso di } F \text{ uscente da } \partial E = \int_{\partial^+ E} (-F_2, F_1) \cdot \underline{T} \, ds =$$

$$= \int_{\partial^+ E} (-F_2 \, dx + F_1 \, dy) \underset{\text{Stokes}}{=} \iint_E \underbrace{\left((F_1)_x + (F_2)_y\right)}_{\text{div } \underline{F}} dx\,dy$$

(divergenza)