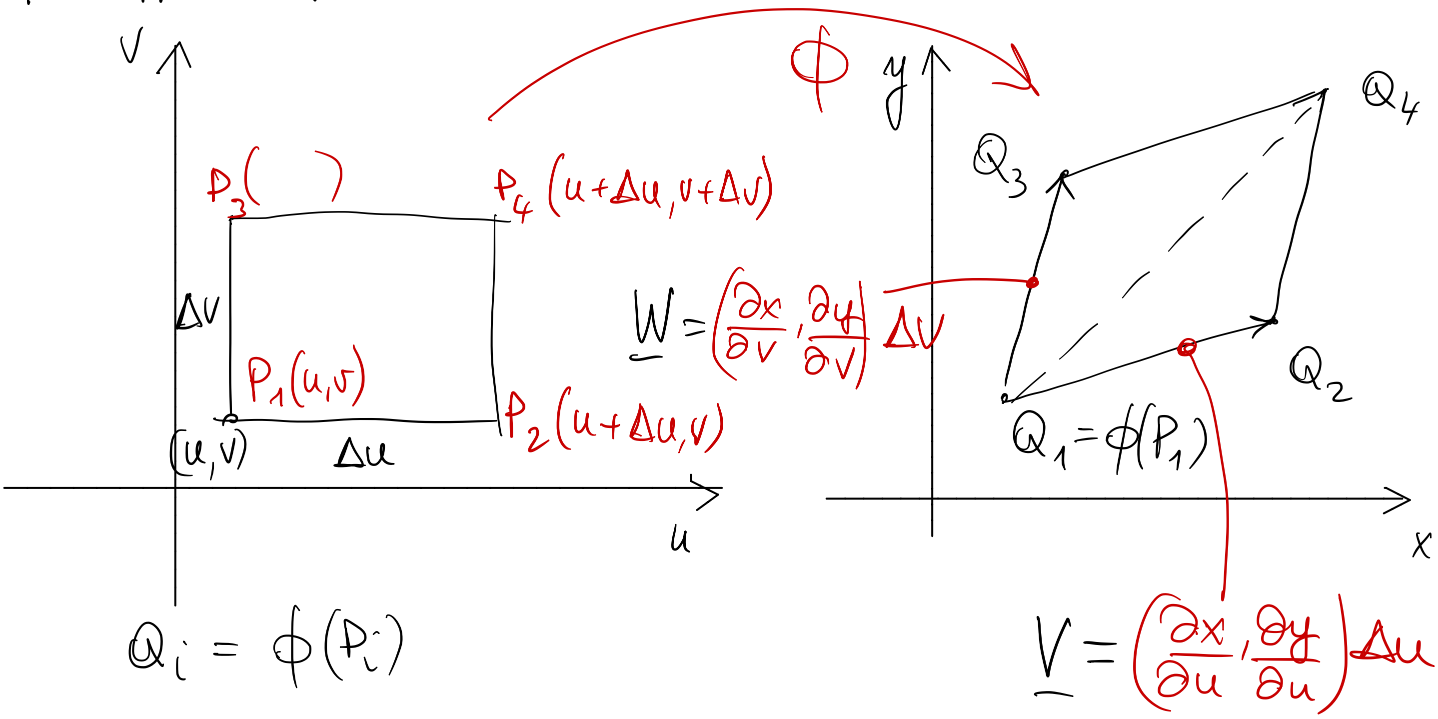
Cambiamento di coordinate negli integrali

$\phi : T \longrightarrow D$ $\qquad$ T, D domini regolari di $\mathbb{R}^2$

ϕ diffeomorfismo di classe C^1.



$Q_i = \phi(P_i)$

Se $\Delta u, \Delta v$ piccoli $\Rightarrow$ calcolate in (u,v)

$$Q_2 \simeq Q_1 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right)\Delta u$$

$$Q_3 \simeq Q_1 + \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right)\Delta v$$

$$Q_4 \simeq Q_1 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right)\Delta u + \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right)\Delta v$$

Al rettangolo di area $\Delta u \Delta v$ corrisponde, dopo la trasformaz., un parallelogramma costruito sui vettori

$$\underline{V} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}\right)\Delta u, \qquad \underline{W} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}\right)\Delta v$$

L'area del parallelogramma è dato da

$$|\underline{V} \wedge \underline{W}| = \left|\det\begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ W_1 & W_2 \end{pmatrix}\right|$$

L'area del parallelogramma è dato da

$$|\underline{V} \wedge \underline{W}| = \left| \det \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ W_1 & W_2 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u \\ \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \end{bmatrix} \right| =$$

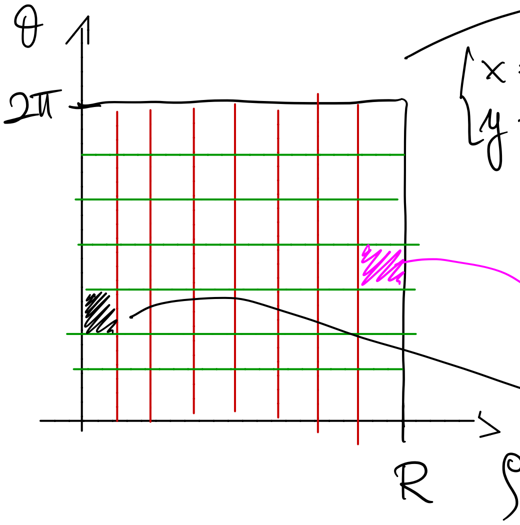
$$= \left| \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right| \Delta u \Delta v =$$

$$= \left| \det \frac{\partial (x,y)}{\partial (u,v)} \right| \Delta u \Delta v.$$

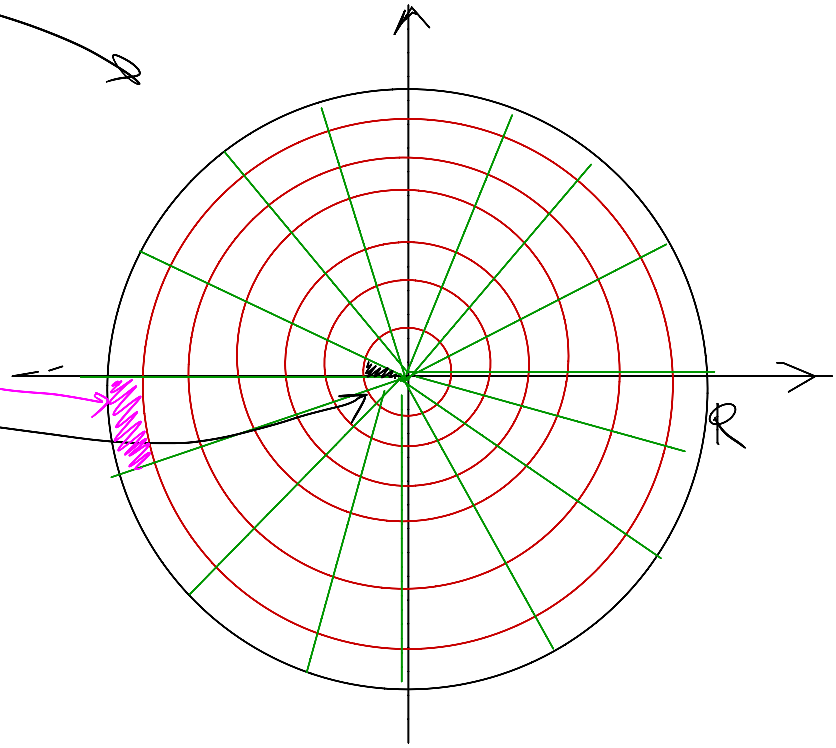
Questo giustifica la presenza del det. Jacobiano nel cambiamento di variabile

<u>Esempio</u> : passaggio a coordinate polari

Esempio: passaggio a coordinate polari



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$



$$\left| \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)} \right| = \rho$$

OSS Perché in dim 1 non c'era il valore assoluto?

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

g di classe C^1

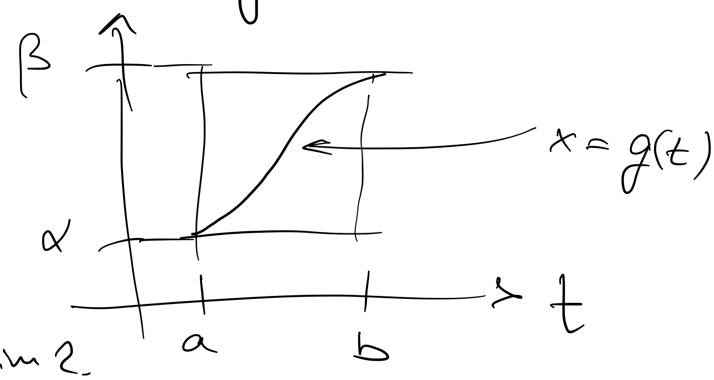
biettiva

ϕ "=" g $\qquad x = g(t)$ $\qquad g'(t) \neq 0$

$g : [a,b] \to [\alpha, \beta]$

x

1° caso $\quad g'(t) > 0$

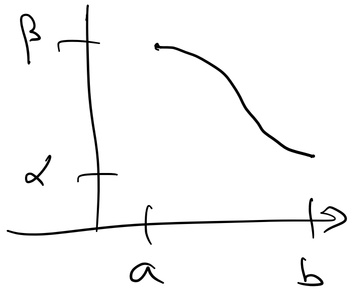


$g(a) = \alpha$

$g(b) = \beta$

In accordo con la formula in dim 2.

2° caso $\quad g'(t) < 0$



La formula diventa

$$\int_a^b f(g(t))\,g'(t)\,dt = \int_{g(a) = \beta}^{g(b) = \alpha} f(x)\,dx = -\int_{[\alpha,\beta]} f(x)\,dx$$

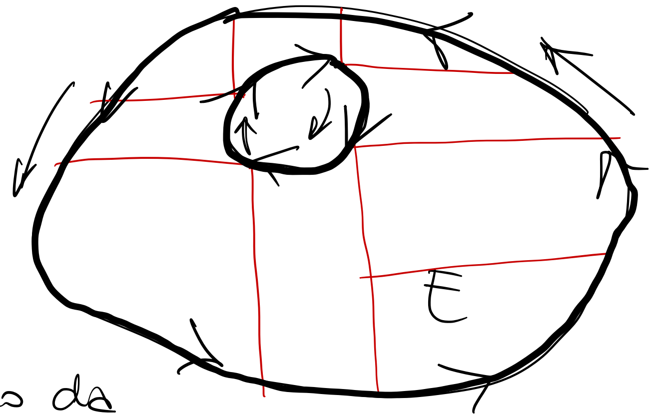
!!

$$\Rightarrow \int_{[a,b]} f(g(t))\,|g'(t)|\,dt = \int_{[\alpha,\beta]} f(x)\,dx$$

Quindi il valore assoluto c'era!!

Formule di Gauss-Green in dim. 2

E dominio regolare di $\mathbb{R}^2$ $\iff$ E unione di un numero finito di domini <u>normali</u> regolari, a due a due senza pti interni in comune.



OSS ∂E è unione di un numero finito di curve regolari.

Stabiliamo di orientare ∂E in modo da lasciare sempre E sulla sinistra.

TEOREMA (formule di Gauss-Green).

E dominio regolare di $\mathbb{R}^2$, $f(x,y): E \longrightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^1(E)$ (fino al bordo!). Allora si ha:

1) $$\int_{\partial^+ E} f \, dy = \iint_E \frac{\partial f}{\partial x} \, dx\, dy$$

$\partial^+ E$ → frontiera di E orientata in verso positivo

2) $$\int_{\partial^+ E} f \, dx = - \iint_E \frac{\partial f}{\partial y} \, dx\, dy$$

dove $\partial^+ E$ è la frontiera di E percorsa nel verso "positivo".

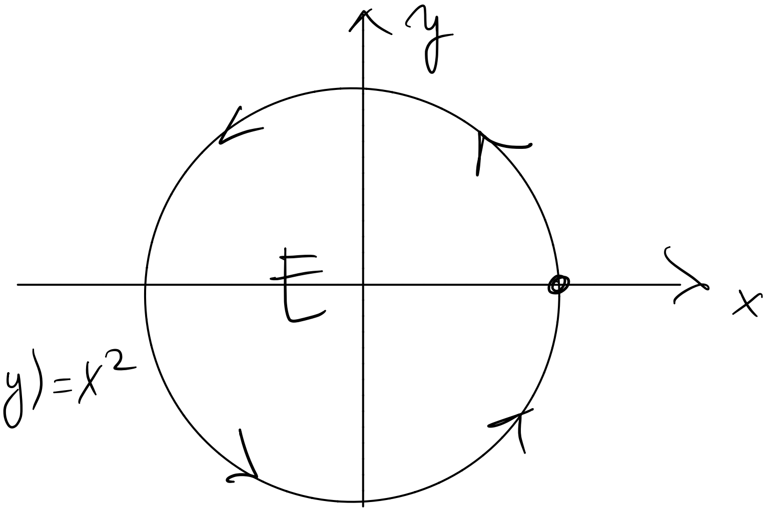
Esempio Sia E il cerchio unitario

$$E = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Voglio calcolare $\iint_E x^2 \, dx\,dy$

$$\iint_E x^2 \, dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \; \rho^3 \cos^2\theta = \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^3 d\rho\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4}$$



OSS se prendo

$f(x,y) = \frac{x^3}{3}$, si ha $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2$

Dalla 1ª formula di G-G.

$$\Rightarrow \iint_E x^2 \, dx\,dy = \int_{\partial^+ E} \frac{x^3}{3} \, dy$$

$$\partial^+ E \quad \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\int_{\partial^+ E} \frac{x^3}{3} \, dy = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos^3 t \cdot \cos t \; dt =$$

$$= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \cos^4 t \, dt = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \left(1 + \cos^2(2t) + \cancel{2\cos 2t}\right) dt = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1 + \cancel{\cos(4t)}}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{4}$$

COROLLARIO (Teorema di Stokes in dim. 2)

Sia $\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ una forma differenziale di classe $C^1(E)$. Allora

$$\int_{\partial^+ E} \omega = \underbrace{\int_{\partial^+ E} A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy}_{\text{lavoro del campo } \underline{F}(x,y) = (A(x,y),\, B(x,y))} =$$

$$= \iint_E \left[\frac{\partial B}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial A}{\partial y}(x,y)\right] dx\,dy =$$

$$= \iint_E (B_x - A_y)\,dx\,dy = \iint_E \operatorname{rot} \underline{F}\,dx\,dy.$$

In particolare, se $\underline{F}$ è un campo irrotazionale (cioè $\operatorname{rot} F = 0$) definito su tutto E, allora

$$\Rightarrow \int_{\partial^+ E} \underline{F} \cdot \underline{T}\,ds = \int_{\partial^+ E} \omega = 0.$$

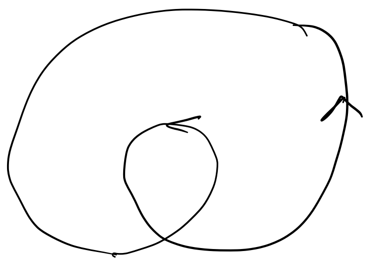
TEOREMA (Già visto, ma mai dimostrato)

Sia A un aperto semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2$, e sia $\underline{F}$ un campo vettoriale di classe $C^1(A;\mathbb{R}^2)$ irrotazionale.

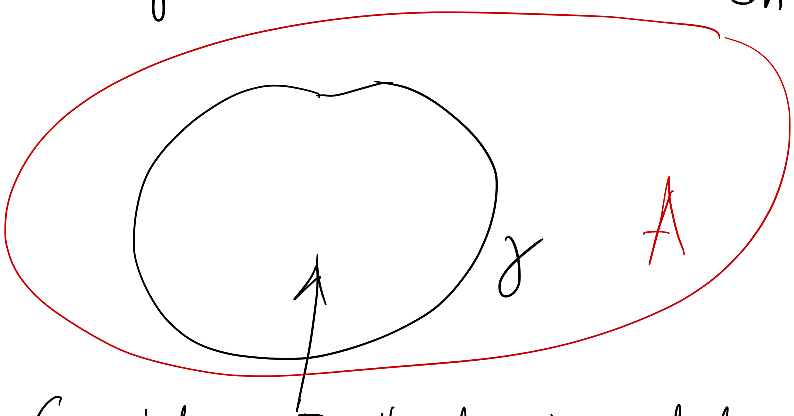
Allora $\underline{F}$ è conservativo.

Equivalentemente, se ω è una f.d. di classe $C^1(A;\mathbb{R}^2)$ chiusa, allora è esatta.

DIM. Basta provare che il lavoro di $\underline{F}$ lungo una qualsiasi curva chiusa vale zero.
In realtà basta provarlo per tutte le curve chiuse e semplici (curve di Jordan), in quanto ogni curva chiusa si può "scomporre" in curve di Jordan.



Sia γ una tale curva di Jordan



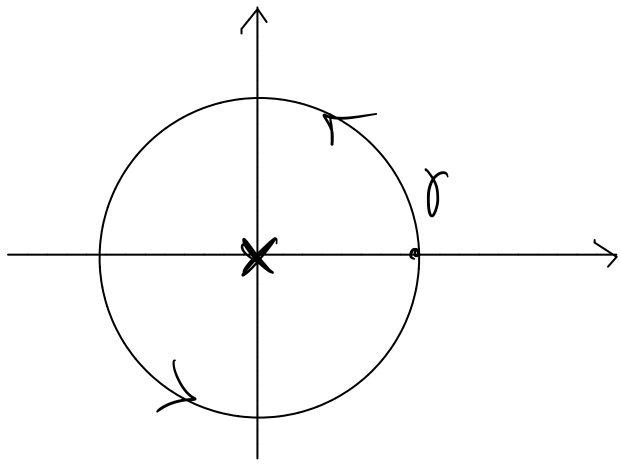
Considero E il dominio delimitato da γ. Poiché A è semplicemente connesso, $E \subset A$

$$\int_\gamma \underline{F}\cdot\underline{T}\,ds = \pm\int_{\partial^+ E} \underline{F}\cdot\underline{T}\,ds = \qquad \text{[per Stokes]}$$

$$= \pm \iint_E \operatorname{rot} F\,dxdy = 0.$$

<u>OSS</u>. Se A non è semplicemente connesso, ci sono curve di Jordan contenute in A ma tali che il dominio E delimitato da γ non sia tutto in A

<u>Es.</u> $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\gamma =$ circonf. unitaria



COROLLARIO (anche questo già visto).

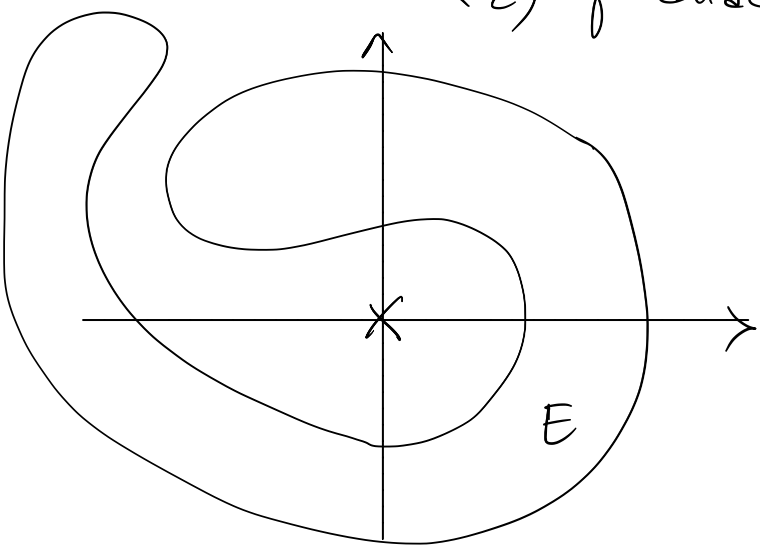
Sia A un aperto connesso con una lacuna (Es: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$).
Quindi A non è semplicemente connesso.
Sia $\underline{F}$ un campo vettoriale irrotazionale in A di classe $C^1(A;\mathbb{R}^2)$

Se esiste una curva γ_0 di Jordan contenuta in A che gira intorno alla lacuna e t.c. il lavoro di $\underline{F}$ lungo γ_0 sia nullo, allora il campo $\underline{F}$ è conservativo.

Dim (Per semplicità $A = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$)

Sia γ una qualsiasi curva di Jordan contenuta in A.

due casi:
1) γ non allaccia l'origine
2) γ allaccia l'origine

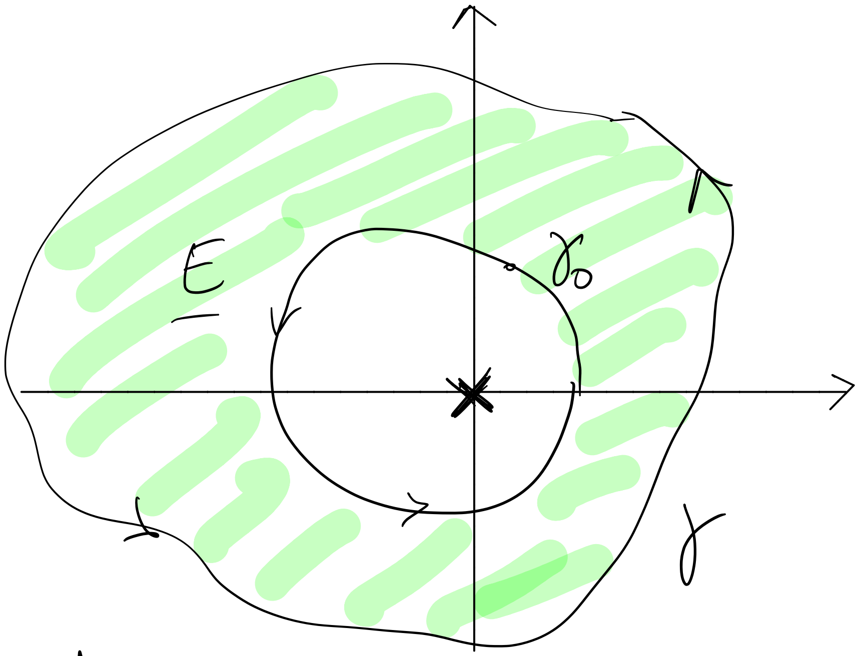


Nel caso 1), è facile
$\Rightarrow$ prendo E delimitato da γ e applico Stokes
$$\Rightarrow \int_\gamma \underline{F} \cdot \underline{T} \, ds = 0.$$

Nel caso 2)

Nel caso 2)

Sia E la corona contenuta tra le due curve
Stokes.



$$\int_{\partial^+ E} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = 0.$$

$$\Rightarrow \int_{\gamma} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = \int_{\gamma_0} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = 0$$

Se le due curve si intrecciano,

le confronto entrambe con una curva molto più grande