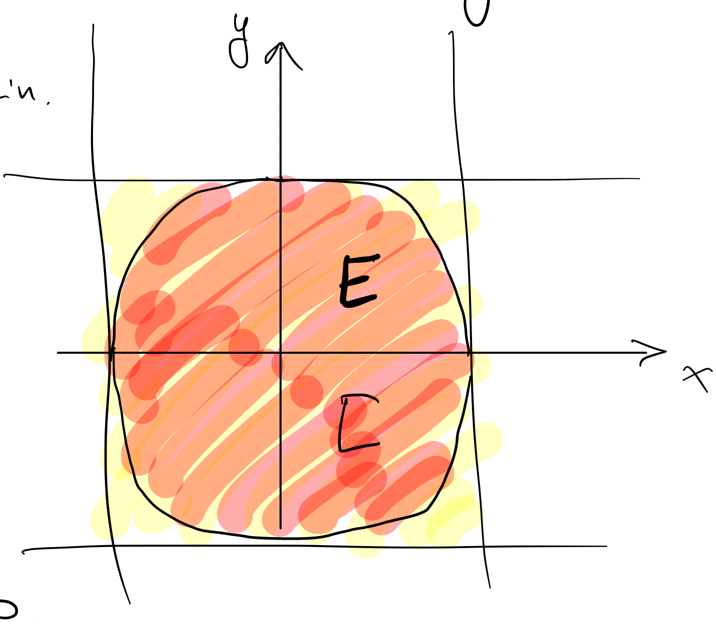
Esercizio. Mostrare che l'insieme $E = \{(x,y) : x^4 + y^4 \le 1\}$ è chiuso e limitato. Calcolare max. e min. assoluti di $f(x,y) = x - 8y$ su E.

Dim E chiuso perché della forma $\{f(x,y) \le \alpha\}$ con f continua.

E limitato
$$x^4 \le x^4 + y^4 \le 1 \Rightarrow |x| \le 1$$
$$y^4 \le \quad\quad \le 1 \quad\quad |y| \le 1$$



Vale Weierstrass $\exists$ max. e min. assoluto.

dove possono essere?

1) nei pti critici interni di f

$f_x(x,y) = 1$

$f_y(x,y) = -8$

pti critici non ce ne sono.

2) su $\partial E = \{(x,y) : x^4 + y^4 = 1\}$

$g(x,y) = x^4 + y^4 - 1$ Vincolo: $g(x,y) = 0$.

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

$\nabla g(x,y) = (4x^3, 4y^3)$ sempre $\neq 0$ su ∂E.

$$\begin{cases} 1 = 4\lambda x^3 \\ -8 = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases}$$

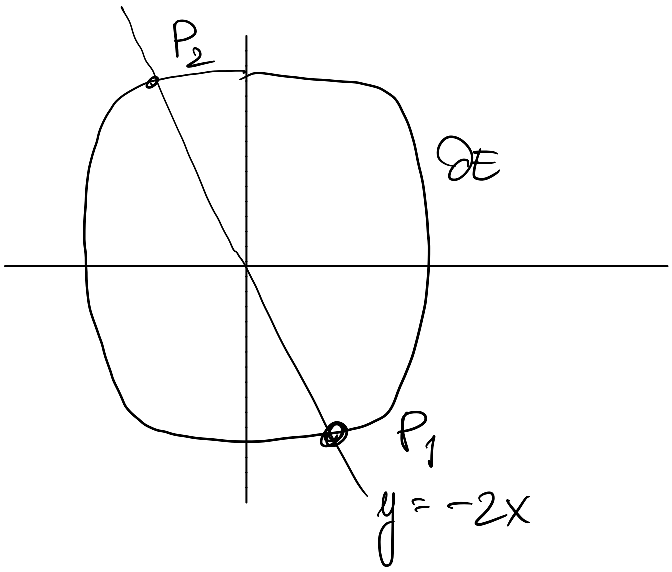
$$\begin{cases} 1 = 4\lambda x^3 \\ -8 = 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 = 1 \end{cases} \qquad 4\lambda = \frac{1}{x^3} = -\frac{8}{y^3}$$

$$x^3 = -\frac{y^3}{8} \implies y = -2x$$

$$x^4 + 16x^4 = 1$$

$$x^4 = \frac{1}{17} \qquad x = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{17}} \qquad y = \mp\frac{2}{\sqrt[4]{17}}$$

$$P_1 \left(\frac{1}{\sqrt[4]{17}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{17}}\right) \qquad P_2 = -P_1.$$



$$f(x,y) = x - 8y.$$

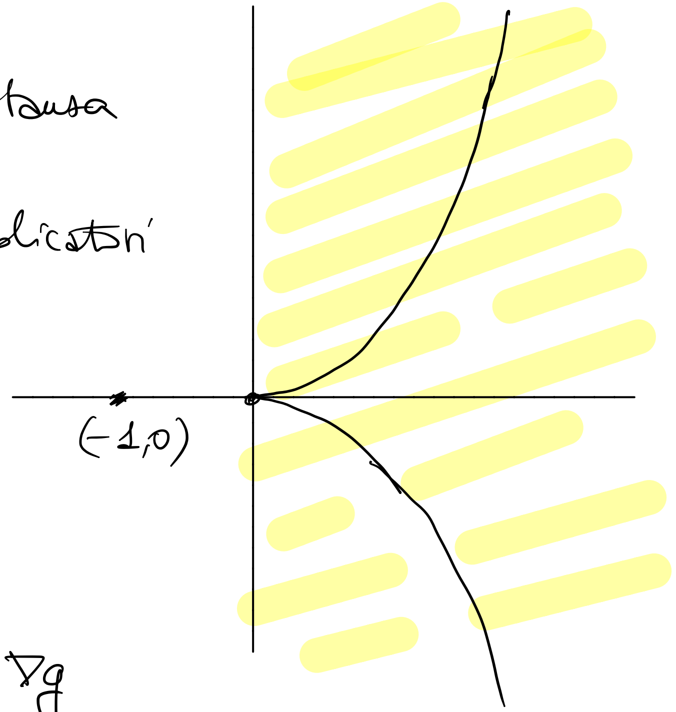
$$f(P_1) = \frac{1}{\sqrt[4]{17}} + \frac{16}{\sqrt[4]{17}} = 17^{3/4} \quad \text{max assoluto}$$

$$f(P_2) = -17^{3/4} \qquad \text{min. assoluto.}$$

ESERCIZIO: Tra i punti della curva $\underbrace{x^3-y^2}_{g(x,y)}=0$, determinare quello/i di distanza minima dal punto $(-1,0)$.

OSS La curva è tutta contenuta nel semipiano $\{x \geq 0\}$.
$(0,0)$ appartiene alla curva.

$\Longrightarrow (0,0)$ è il pto di minima distanza



Provo a ritrovarlo con i moltiplicatori di Lagrange

$$f(x,y) = d((x,y),(-1,0))^2 =$$

$$= (x+1)^2 + y^2 .$$

$$\begin{cases} 2(x+1) = 3\lambda x^2 \\ 2y = -2\lambda y \\ x^3 = y^2 \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \nabla f = \lambda \nabla g$$

$$y = 0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} x = 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} 2 = 0 \quad \text{impossibile}$$

$$\lambda = -1 \overset{(1)}{\Longrightarrow} 2x + 2 = -3x^2 \Longrightarrow 3x^2 + 2x + 2 = 0$$

nessuna sol^{ne} reale.

Perché non ha funzionato? perché $(0,0)$ è pto degenere del vincolo. $\nabla g(0,0) = 0$

$$\nabla g(x,y) = (3x^2, -2y)$$

Il teorema dei moltiplicatori di Lagrange vale anche nel caso di un vincolo in tre variabili

TEOREMA Sia $A \subset \mathbb{R}^3$ aperto, siano $f, g \in C^1(A)$

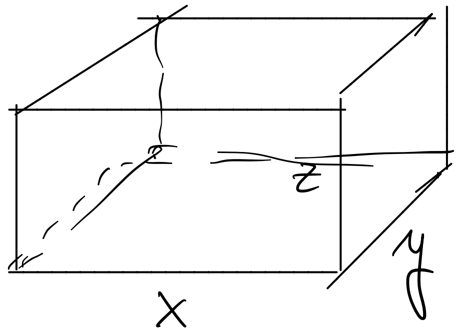
Sia $E = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\}$, sia $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in E$ p.to regolare del vincolo (cioè $\nabla g(x_0,y_0,z_0) \neq \underline{0}$). Allora, se P_0 è un pto di min./max. relativo di f vincolato ad E, deve esistere $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0)$.

In altre parole, (x_0, y_0, z_0, λ) è soluzione del sistema

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0,z_0) = \lambda g_x(x_0,y_0,z_0) \\ f_y(\qquad) = \lambda g_y(\qquad) \\ f_z(\qquad) = \lambda g_z(\qquad) \\ g(x_0,y_0,z_0) = 0 \end{cases}$$

__Dim.__ identica al caso 2-d.

Esercizio Trovare le dimensioni di una scatola a forma di parallelepipedo senza coperchio che ha volume max. sapendo che l'area della superficie della scatola è 12.



funzione da massimizzare $f(x,y,z) = xyz$

Vincolo:

$$xy + 2xz + 2yz = 12$$

$$g(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz - 12 = 0.$$

Il sistema diventa:

$$\begin{cases} yz = \lambda (y + 2z) & \cdot x \\ xz = \lambda (x + 2z) & \cdot y \\ xy = \lambda (2x + 2y) & \cdot z \\ xy + 2xz + 2yz = 12 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} xyz &= \lambda (xy + 2xz) \\ xyz &= \lambda (xy + 2yz) \\ xyz &= \lambda (2xz + 2yz) \end{aligned} \Longrightarrow$$

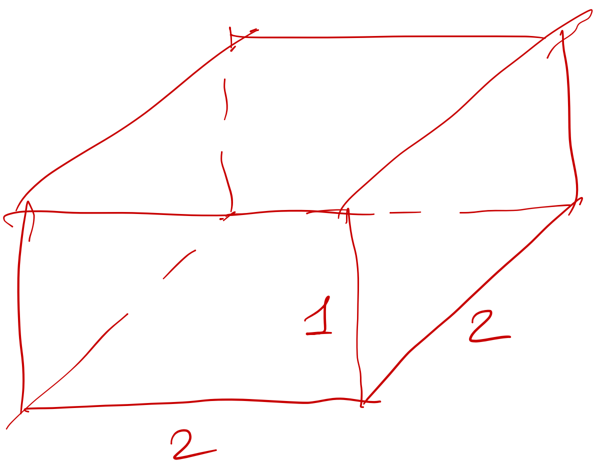
$$\Longrightarrow \lambda (xy + 2xz) = \lambda (xy + 2yz) = \lambda (2xz + 2yz)$$

$\lambda \neq 0$ perché altrimenti uno tra x, y, z dovrebbe essere zero.

$$\cancel{\lambda}(xy+2xz) = \cancel{\lambda}(xy+2yz) = \cancel{\lambda}(2xz+2yz)$$

$$xz = yz$$
$$xy = 2xz$$
$$\Downarrow$$
$$(x-y)\cancel{z} = 0$$
$$(y-2z)\cancel{x} = 0 \implies x = y = 2z$$

$$xy + 2xz + 2yz = 12$$
$$4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12$$
$$z^2 = 1 \qquad z = 1$$
$$x = y = 2.$$

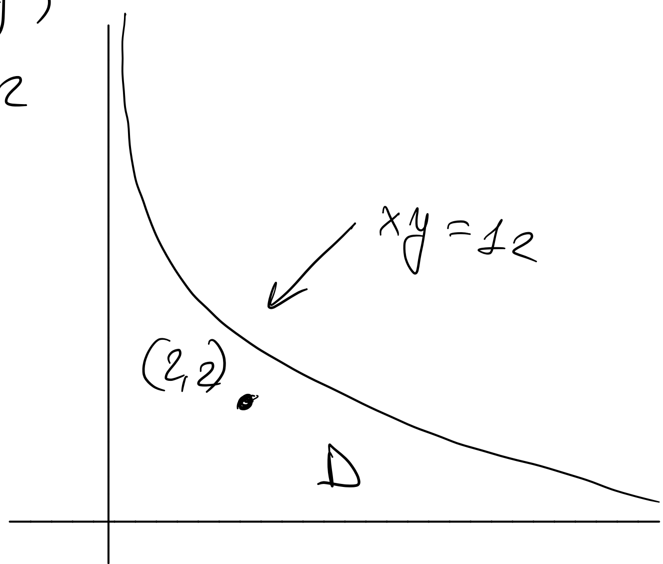


Se avessi risolto senza massimizzazione vincolata, avrei dovuto scegliere $x>0$, $y>0$ t.c $xy<12$.

$$xy + 2xz + 2yz = 12 \implies z = \frac{12-xy}{2(x+y)}$$

devo massimizzare $V = \dfrac{xy(12-xy)}{2(x+y)}$ nella regione

$$D = \{(x,y):\ x>0,\ y>0,\ xy<12$$



Caso di due vincoli in 3 variabili.

$$(S)\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Esempio: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4 \\ x-y=0 \end{cases}$

Questo sistema descrive una circonferenza.

Domanda: posso scrivere (almeno localmente) le soluzioni di questo sistema come sostegno di una curva? Per esempio, posso esplicitare y e z in funzione di x?

Sia $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ una soluzione di (S).

Considero il vincolo $F(x,y,z)=0$. Se P_0 verifica $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0 \Rightarrow$ localmente posso esplicitare $F(x,y,z)=0$ nella forma $z=\varphi(x,y)$

$\Rightarrow$ la seconda equazione diventa

$$\eta(x,y):=G(x,y,\varphi(x,y))=0 \qquad (*)$$

Se fosse $\eta_y(x_0,y_0)\neq 0$, potrei (localmente) esplicitare $(*)$ nella forma $y=g(x)$ $\quad z=\varphi(x,g(x))$

Questo l'ho fatto sotto le ipotesi

1) $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

$$\eta_y(x_0,y_0)\neq 0 \iff G_y(x_0,y_0,z_0)+G_z(x_0,y_0,z_0)\varphi_y(x_0,y_0)\neq 0$$

$$\varphi_y(x_0,y_0) = -\frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$$

$$\iff G_yF_z - G_zF_y \neq 0. \quad 2)$$

N.B In realtà l'unica condizione è la 2) perché se fosse $F_z = 0$, dalla 2) dovrebbe essere $F_y \neq 0$, e potrei ricominciare scambiando y e z, con la stessa conclusione

In definitiva, per poter esplicitare localmente il sistema

$$(S) \quad \begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0, \end{cases}$$

mi basta che P_0 verifichi $F(P_0) = G(P_0) = 0$

$$G_y(P_0)\, F_z(P_0) - G_z(P_0)\, F_y(P_0) \neq 0.$$

$$\overset{\shortparallel}{-} \det \frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0) \neq 0$$

$$\overset{\shortparallel}{-} \det \begin{pmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{pmatrix}(P_0)$$

$\Rightarrow$ TEOREMA Siano F, G di classe $C^1(A)$ A aperto di $\mathbb{R}^3$. Sia $P_0 \in A$ t.c. $F(P_0) = G(P_0) = 0$ e t.c.

$\det \dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0) \neq 0$. Allora $\exists$ intorno cubico di P_0

in cui il sistema $\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$ si esplicita nella forma

$$\begin{cases} y = g(x) \\ z = h(x) \end{cases} \quad + \text{ Formule per le derivate di } g \text{ e } h$$

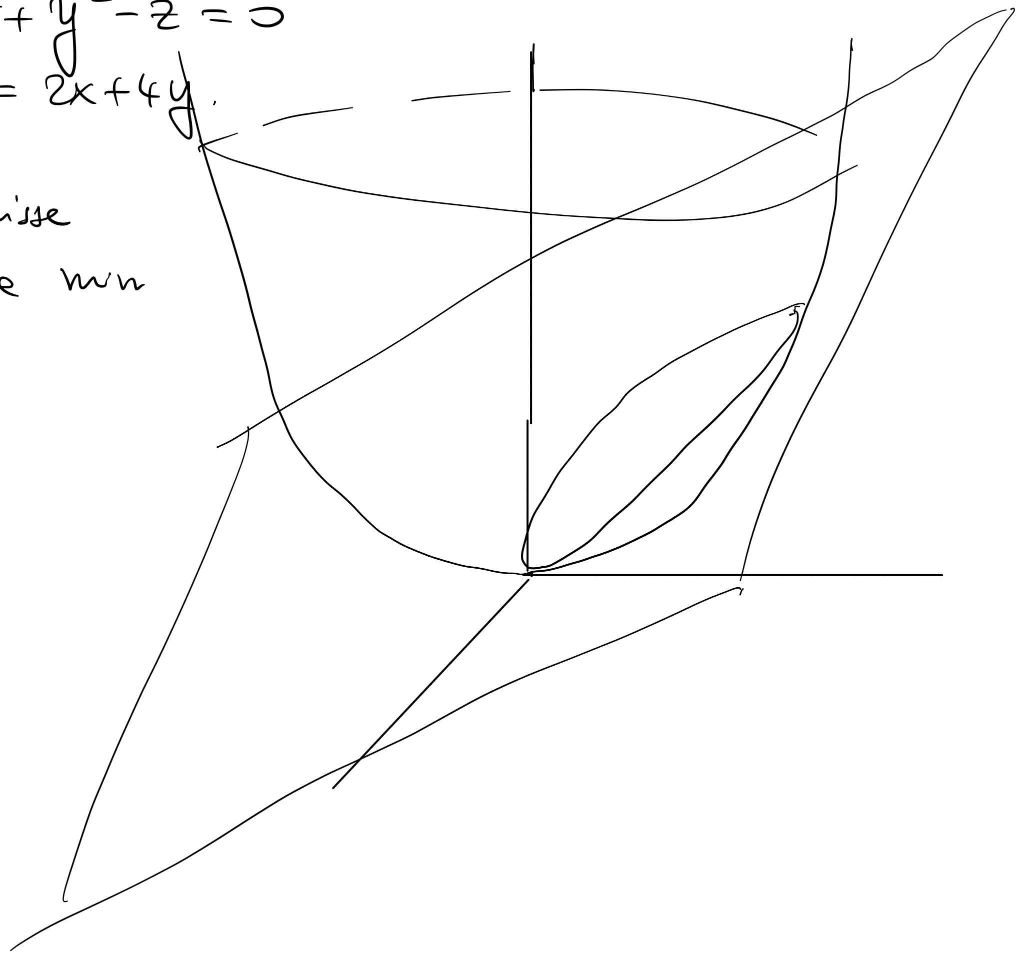
Usando questo teorema, si arriva ad un risultato sui massimi e minimi vincolati di una $f(x,y,z)$ soggetta di vincoli

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

Trovare max. e min. assoluti di $f(x,y,z) = x+3y-z$ sotto i vincoli

$$\begin{cases} x^2+y^2-z=0 \\ z=2x+4y. \end{cases}$$

Il vincolo è un'ellisse
Per Weierstrass, max e min assoluti esistono.



Trovare max. e min. assoluti di $f(x,y,z) = x+3y-z$ sotto i vincoli

$$\begin{cases} x^2+y^2-z=0 \\ z = 2x+4y. \end{cases}$$

1° modo. $x^2+y^2 = 2x+4y$

$$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4) = 5$$

$(x-1)^2+(y-2)^2 = 5$ circonferenza di centro $(1,2)$ e raggio $\sqrt{5}$.

$\Rightarrow$ Parametrizzo

$$\begin{cases} x = 1+\sqrt{5}\cos t \\ y = 2+\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,t \\ z = 10+2\sqrt{5}\cos t+4\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,t. \end{cases} \qquad t\in\mathbb{R}.$$

Devo mini- massimizzare

$$\varphi(t) = f(1+\sqrt{5}\cos t,\ 2+\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,t,\ 10+2\sqrt{5}\cos t+4\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,t) =$$

$$= 1+\sqrt{5}\cos t+6+3\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,t-10-2\sqrt{5}\cos t-4\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,t =$$

$$= -3-\sqrt{5}\cos t-\sqrt{5}\,\mathrm{sen}\,t.$$

$\Rightarrow$ si conclude facilmente.

2° modo - molt. di Lagrange

Si usano 2 molt. di Lagrange λ, μ

$$\begin{cases} f_x = \lambda F_x + \mu G_x \\ f_y = \lambda F_y + \mu G_y \\ f_z = \lambda F_z + \mu G_z \\ F = 0 \\ G = 0. \end{cases}$$

$f(x,y,z) = x + 3y - z$

$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$

$G(x,y,z) = 2x + 4y - z$

$$\begin{cases} 1 = \lambda 2x + \mu 2 \\ 3 = \lambda 2y + \mu 4 \\ -1 = -\lambda - \mu \\ x^2 + y^2 = z \\ 2x + 4y = z \end{cases}$$

$-1 = -\lambda - \mu \implies \mu = 1 - \lambda$

$1 = 2\lambda x + 2 - 2\lambda$

$3 = 2\lambda y + 4 - 4\lambda$

$2\lambda (x-1) = -1$

$2\lambda (y-2) = -1 \implies$

$$\implies 2\lambda = -\frac{1}{x-1} = -\frac{1}{y-2} \implies x - 1 = y - 2.$$

$y = x + 1.$

$$\begin{cases} x^2 + (x+1)^2 = z \\ 2x + 4(x+1) = z \end{cases}$$

$x^2 + (x+1)^2 = 2x + 4x + 4$

$2x^2 - 4x - 3 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+6}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2} \implies y = \qquad z =$$

In realtà in questo metodo dovrei controllare che i punti del vincolo siano regolari, cioè

$$\frac{\partial (F, G)}{\partial (x, y, z)} = \begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$$ abbia rango 2,

cioè almeno uno dei minori di ordine 2 che si ottengono cancellando una colonna abbia determinante $\neq 0$.