ESERCIZIO Sia $F(x,y) = e^{2y^3+y} - x - x^3 - 1$.

Dimostrare che l'equazione $F(x,y)=0$ definisce implicitamente, su tutta una semiretta della forma $(-\alpha, +\infty)$, con $\alpha>0$, una funzione $y=\varphi(x)$ di classe C^∞ t.c. $F(x,\varphi(x))=0$. Trovare lo sviluppo di Taylor del secondo ordine di $\varphi(x)$ con pto iniziale $x_0=0$, e calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2}$.

$F(x,y) \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$

$F_y(x,y) = (6y^2+1)\, e^{2y^3+y} > 0$

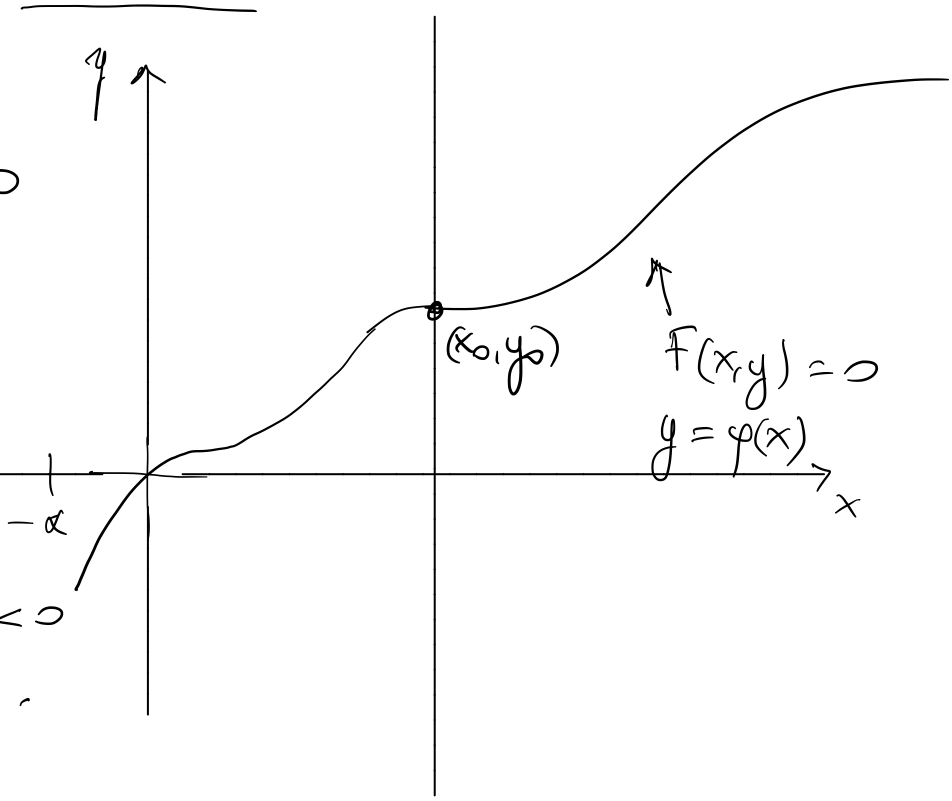
$\lim_{y\to+\infty} F(x,y) = +\infty$

$\lim_{y\to-\infty} F(x,y) = -x-x^3-1$

se x è t.c. $-x-x^3-1<0$

allora $\exists!\ y=\varphi(x)$ t.c.

$F(x,\varphi(x)) = 0$.



OSS $\exists\ \alpha>0$ t.c. $\forall x \in (-\alpha,+\infty)$ $-x-x^3-1<0$

$\Rightarrow \forall x\in(-\alpha,+\infty)\ \exists!\ y=\varphi(x)$ t.c. $F(x,\varphi(x))=0$.

Applicando il teorema di Dini $\Rightarrow \varphi \in C^\infty(-\alpha,+\infty)$

OSS $\varphi(0)=0$.

$$F(x,y) = e^{2y^3+y} - x - x^3 - 1 .$$

$$x_0 = 0 \quad , \quad y_0 = 0 .$$

$$F_y(x,y) = (6y^2+1)\, e^{2y^3+y} \qquad F_y(0,0) = 1$$

$$F_x(x,y) = -1 - 3x^2 . \qquad F_x(0,0) = -1$$

$$\varphi'(0) = - \frac{F_x(0,0)}{F_y(0,0)} = 1$$

$$\varphi''(0) = - \frac{\cancel{F_{xx} F_y^2} - \cancel{2 F_{xy} F_x F_y} + F_{yy} F_x^2}{F_y^3}$$

dove tutte le derivate sono calcolate in $(0,0)$

$$F_{xx}(x,y) = -6x \qquad F_{xx}(0,0) = 0$$

$$F_{xy}(x,y) \equiv 0$$

$$F_{yy}(x,y) = \cancel{12y\, e^{2y^3+y}} + (6y^2+1)^2 e^{2y^3+y} \qquad F_{yy}(0,0) = 1$$

$y = 0$

$$\varphi''(0) = -1 .$$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)\, x + \frac{1}{2} \varphi''(0)\, x^2 + o(x^2) \qquad x \to 0$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} \quad \nexists$$

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} \frac{\varphi(x)}{x^2} = \pm\infty$$

TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE in dim 3.

$F(x,y,z) \in C^1(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^3$.

Sia $(x_0, y_0, z_0) \in A$ t.c.

1) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$;

2) $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Allora $\exists$ intorno $B_r(x_0, y_0)$ di (x_0, y_0),

$\exists$ intorno $J = (z_0 - \sigma, z_0 + \sigma)$ di z_0.

ed esiste una unica funzione $\varphi(x,y) : B_r(x_0,y_0) \to J$

t.c. nel cilindro $B_r \times J$ si ha

$$F(x,y,z) = 0 \iff z = \varphi(x,y).$$

Inoltre $\varphi(x,y) \in C^1(B_r(x_0,y_0))$, e si ha

$$\varphi_x(x,y) = - \frac{F_x(x,y,\varphi(x,y))}{F_z(x,y,\varphi(x,y))}$$

$$\varphi_y(x,y) = - \frac{F_y(x,y,\varphi(x,y))}{F_z(x,y,\varphi(x,y))}$$

<u>OSS</u> $\varphi(x_0,y_0) = z_0 \Rightarrow \varphi_x(x_0,y_0) = - \dfrac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

$$\varphi_y(\quad) = - \frac{\quad}{\quad}$$

Se poi F è di classe $C^k(A)$,
anche φ è di classe C^k,
e si hanno delle espressioni (via via più complicate all'aumentare di k) per le derivate di φ.

Esercizio Mostrare che l'eq^{ne}

$$F(x,y,z) = x^2e^z + ze^y + y^2 = 0$$

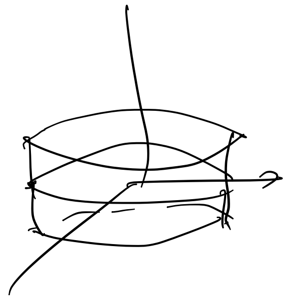
si esplicita nella forma $z = \varphi(x,y)$ in un intorno di $(0,0,0)$, e trovare $\nabla\varphi(0,0)$.

$$F(0,0,0) = 0$$

$$F_z(x,y,z) = x^2e^z + e^y \implies F_z(0,0,0) = 1 \neq 0.$$

Dini

$\implies \exists$ un cilindro $B_r(0,0) \times (-\sigma,\sigma)$ in cui $F(x,y,z) = 0$ si scrive nella forma



$$z = \varphi(x,y). \qquad \varphi(0,0) = 0.$$

$$\varphi_x(0,0) = -\frac{F_x(0,0,0)}{F_z(0,0,0)} = -\frac{0}{1} = 0$$

$$F_x(x,y,z) = 2xe^z \implies F_x(0,0,0) = 0$$

$$\varphi_y(0,0) = -\frac{F_y(0,0,0)}{F_z(0,0,0)} =$$

$$F_y(x,y,z) = 0 \qquad F_y(0,0,0) = 0.$$

$$\implies \nabla\varphi(0,0) = (0,0)$$

Massimi e minimi vincolati di una $f(x,y)$ lungo un vincolo della forma $g(x,y)=0$.

Esempio: Calcolare massimo e minimo assoluti di: $f(x,y) = 4 - \sqrt{3}\,x - y$ sulla circonferenza $x^2+y^2=1$.

OSS $f(x,y)$ è continua, la circonf. è un insieme chiuso e limitato $\xRightarrow{\text{Weierstrass}}$ $\exists$ max. e min. assoluti

La circonferenza si parametrizza $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \end{cases}$ $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(\theta) = f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = 4 - \sqrt{3}\cos\theta - \operatorname{sen}\theta$$

$$\varphi'(\theta) = \sqrt{3}\operatorname{sen}\theta - \cos\theta = 0 \iff \operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \implies \varphi(\theta) = 4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

$$\theta = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \implies \varphi(\theta) = 4 + 2 = 6.$$

$$6 = \text{max assoluto} = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

$$2 = \text{min. assoluto} = f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Massimi e minimi vincolati di una $f(x,y)$ lungo un vincolo della forma $g(x,y)=0$.

Sia E il vincolo

$$E=\{(x,y) : g(x,y)=0\}.$$

Sia (x_0,y_0) un pto di E t.c. $\nabla g(x_0,y_0)\neq 0$.

(p.to regolare di E).

Se $g_y(x_0,y_0)\neq 0 \overset{\text{Dini}}{\Longrightarrow}$ localmente E è il sostegno di una curva regolare, anzi è il grafico di una funzione.

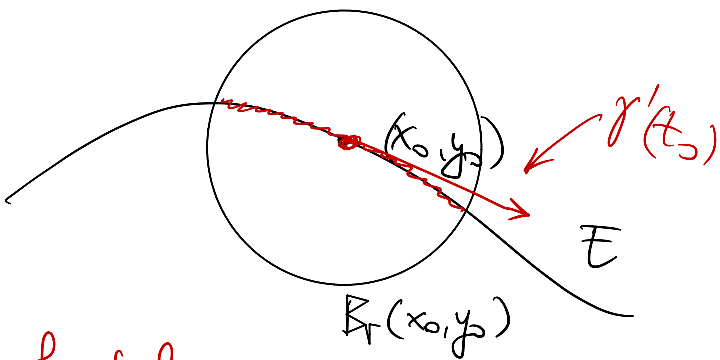
localmente (vicino ad (x_0,y))

$$g(x,y)=0 \iff y=\varphi(x)$$

DEF $(x_0,y_0)\in E$ si dice pto di min. (max) relativo per f relativamente al vincolo E se $\exists$ un intorno $B_r(x_0,y_0)$ t.c.

$$f(x_0,y_0) \overset{\geq}{\leq} f(x,y)$$

$$\forall (x,y)\in E\cap B_r(x_0,y_0)$$



Massimi e minimi relativi di f sul sostegno di una curva regolare $\underline{\gamma}$.

$$\underline{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto \underline{\gamma}(t)=(x(t),y(t))$$

Cercare max. e minimi relativi di f lungo il sostegno di γ significa trovare max. e min. rel.

$$\eta(t) = f(\underline{\gamma}(t)) = f(x(t),y(t)) \qquad t\in[a,b]$$

$$\eta(t) = f(\underline{\gamma}(t)) = f(x(t), y(t)) \qquad t \in [a,b]$$

Se t_0 è un pto di ~~max.~~ min rel. interno per $\eta(t)$, deve essere (Fermat).

$$\eta'(t_0) = 0.$$

$$0 = \eta'(t_0) = f_x(x(t_0), y(t_0))\, x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0))\, y'(t_0) =$$

$$= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \underline{\gamma}'(t_0)$$

$$(x_0, y_0) = \underline{\gamma}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$$

Questo significa

$$\nabla f(x_0, y_0) \perp \underline{\gamma}'(t_0)$$

cioè $\nabla f(x_0, y_0) \perp$ retta tg alla curva.

TEOREMA (Fermat per estremi vincolati)

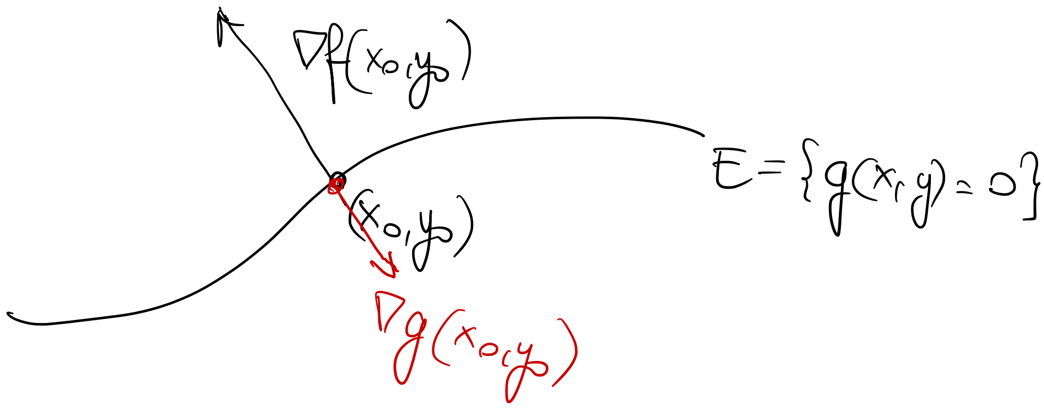
$f(x,y): A \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad$ A aperto di $\mathbb{R}^2$. $f \in C^1(A)$

$\underline{\gamma}: [a,b] \to A$ $\qquad$ curva regolare

Se (x_0,y_0) è un punto del sostegno di γ (diverso da $\gamma(a)$ e $\underline{\gamma}(b)$) in cui f assume max/min relativo vincolato alla curva γ, si deve avere

$\nabla f(x_0,y_0)$ ortogonale alla curva.

OSS importante. Se la curva $\underline{\gamma}$ è espressa implicitamente dal vincolo $g(x,y)=0$, e (x_0,y_0) è un pto regolare di tale vincolo, anche $\nabla g(x_0,y_0)$ è ortogonale al vincolo.



Ne segue che $\quad \nabla f(x_0,y_0) \,/\!/\, \nabla g(x_0,y_0)$.

$\Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. $\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$

TEOREMA DEI MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Siano $f(x,y),\ g(x,y) \in C^1(A)$, A aperto di $\mathbb{R}^2$.

Sia $(x_0,y_0) \in E = \{(x,y) \in A : g(x,y) = 0\}$ un punto regolare di E. (cioè $g(x_0,y_0) = 0$, $\nabla g(x_0,y_0) \neq \underline{0}$).

Se (x_0,y_0) è un p.to di max./min. relativo di f vincolato ad E, allora $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c. (x_0, y_0, λ) sia soluzione del sistema

$$\begin{cases} f_x(x_0,y_0) = \lambda\, g_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) = \lambda\, g_y(x_0,y_0) \\ g(x_0,y_0) = 0 \end{cases}$$

OSS In altre parole, (x_0,y_0,λ) deve essere un pto critico libero della funzione

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda\, g(x,y)$$

Esempio: Calcolare massimo e minimo assoluti di $f(x,y) = 4 - \sqrt{3}\,x - y$ sulla circonferenza $x^2+y^2=1$.

$g(x,y) = x^2+y^2-1 \implies$ OSS tutti i pti del vincolo sono regolari $\nabla g \neq 0$.

Il sistema di Lagrange diventa

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \\ f_y(\ \ ) = \lambda g_y(\ \ ) \\ g(x,y)=0 \end{cases} \implies \begin{cases} -\sqrt{3} = 2\lambda x \\ -1 = 2\lambda y \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda &= -\frac{\sqrt{3}}{x} \\ 2\lambda &= -\frac{1}{y} \end{aligned}\right| \iff \frac{\sqrt{3}}{x} = \frac{1}{y} \iff x = \sqrt{3}\,y$$

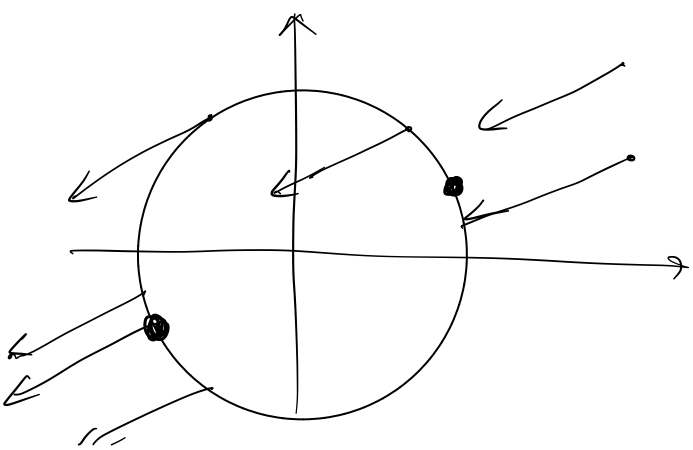
$$3y^2+y^2 = 1 \implies y^2 = \frac{1}{4} \qquad y = \pm\frac{1}{2}$$

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \qquad P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Sono gli stessi pti di prima.

P_1 è min. assoluto, $\qquad P_2$ è max. assoluto



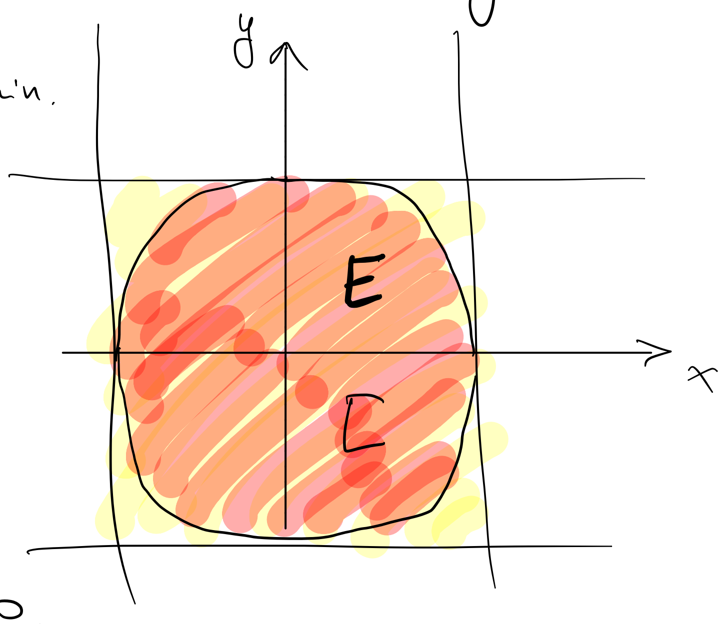
$\nabla f = (-\sqrt{3}, -1)$ costante

Esercizio. Mostrare che l'insieme $E=\{(x,y):\ x^4+y^4\le 1\}$ è chiuso e limitato. Calcolare max. e min. assoluti di $f(x,y)= x-8y$ su E.

Dim E chiuso perché della forma $\{f(x,y)\le \alpha\}$ con f continua.

E limitato $\quad x^4 \le x^4+y^4\le 1 \Rightarrow |x|\le 1$

$\quad y^4\le \qquad\quad \le 1 \qquad |y|\le 1$



Vale Weierstrass $\exists$ max. e min. assoluto.

dove possono essere?

1) nei pti critici interni di f

$f_x(x,y)=1$

$f_y(x,y)=-8$

pti critici non ce ne sono.

2) su $\partial E=\{(x,y):\ x^4+y^4=1\}$