# Dini - Esercizio.

Siamo interessati alle soluzioni $(x,y)$ dell'eq$^{ne}$

$$y = xy + \ln y \,. \qquad (*)$$

1) verificare che in un intorno di $P(1,1)$ l'eq$^{ne}$ $(*)$ individua una funzione $y=\varphi(x)$

2) Determinare l'eq$^{ne}$ della retta tangente al grafico di $\varphi$ nel pto $(1,1)$

Definiamo $f(x,y) = xy + \ln y - y \in C^1(\{y>0\})$

$f(x_0,y_0) = f(1,1) \overset{?}{=} 0$ OK.

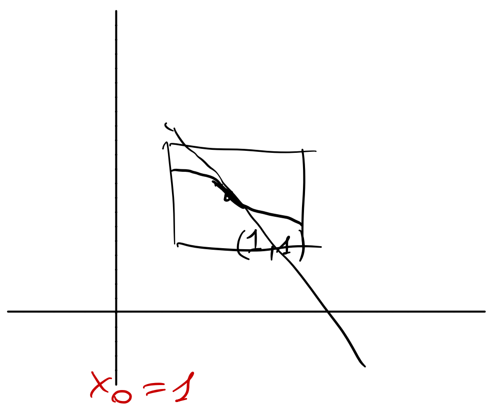
$f_y(x,y) = x + \dfrac{1}{y} - 1$

$f_y(1,1) = 1 \neq 0.$

Dini $\Rightarrow$ $\exists\ I = (1-\delta, 1+\delta)$ $\exists\ J = (1-\sigma, 1+\sigma)$ t.c.

$\forall x \in I$ $\exists!\ y = \varphi(x) \in J$ t.c. $f(x,\varphi(x)) = 0$

$$\varphi'(1) = -\frac{f_x(1,1)}{f_y(1,1)} = -1$$




$f_x(x,y) = y \Rightarrow f_x(1,1) = 1$

$$y = \underset{\underset{1}{\shortparallel}}{\varphi(x_0)} + \underbrace{\varphi'(x_0)}_{-1}(x - x_0)$$

$$y = 1 - (x-1) = 2 - x$$

# TEOREMA DELLA FUNZIONE IMPLICITA

$f(x,y): A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ $A$ aperto, $f \in C^1(A)$

Sia $E = \{(x,y) \in A : f(x,y) = 0\}$. Sia $(x_0,y_0)$ t.c.

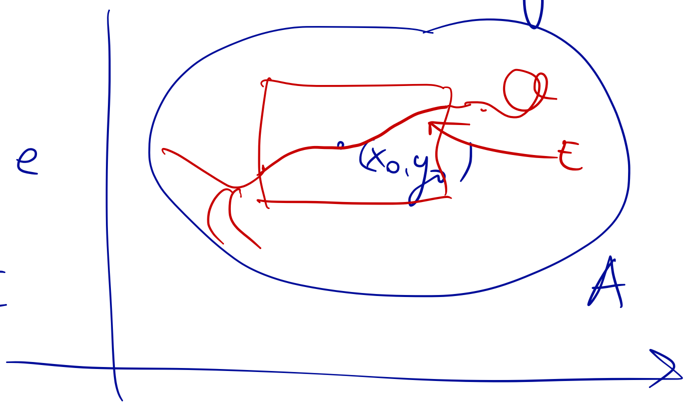
1) $(x_0,y_0) \in E$

2) $f_y(x_0,y_0) \neq 0$.

Allora $\exists\, I$ intorno di $x_0$, $\exists\, J$ intorno di $y_0$ t.c. l'insieme

$E \cap (I \times J)$ è il grafico di una funzione $y = \varphi(x)$

con $\varphi: I \to J$.




Inoltre $\varphi$ è di classe $C^1(I)$, e

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))} \quad \forall x \in I$$

In particolare

$$\varphi(x_0) = y_0 \;, \qquad \varphi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$$

Mostrare che in un intorno di $(+1,-1)$ i punti dell'insieme

$$E = \{(x,y) : \ln x + (y+1)x^2 = \operatorname{sen}(\pi y)\}$$

costituiscono il grafico di una $y = \varphi(x)$ oppure $x = \varphi(y)$.
e scrivere il polinomio di Taylor del 2° ordine di $\varphi$ con punto iniziale $x_0 = +1$ oppure $y_0 = -1$. Disegnare l'insieme E in un intorno di $(1,-1)$.

---

$$f(x,y) = \ln x + (y+1)x^2 - \operatorname{sen}(\pi y)$$

$$f(1,-1) = 0 + 0 - 0 = 0 \qquad \text{OK!}$$

$$f_x(x,y) = \frac{1}{x} + 2x(y+1) \qquad f_x(1,-1) = 1 \neq 0$$

$$f_y(x,y) = x^2 - \pi \cos(\pi y) \qquad f_y(1,-1) = 1 + \pi \neq 0$$

$\Rightarrow$ Posso scrivere E in un intorno rettangolare di $(1,-1)$ sia come grafico di $y = \varphi(x)$ oppure $x = \varphi(y)$

Scegliamo la prima.
Precisamente, $\exists$ I intorno di 1, $\exists$ J intorno di $-1$, ed $\exists!$ $\varphi : I \to J$ t.c

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \qquad \forall x \in I.$$

$$\varphi(1) = -1.$$

$$\varphi'(1) = -\frac{f_x(1,-1)}{f_y(1,-1)} = -\frac{1}{1+\pi}$$

Sviluppo di Taylor del 1° ordine con pto iniz. $x_0 = 1$.

$$\varphi(x) = -1 - \frac{1}{1+\pi}(x-1) + o(x-1) \qquad \text{per } x \to 1.$$

Dobbiamo calcolare $\varphi''(x_0) = \varphi''(1)$

Sappiamo che

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))} \qquad \forall x \in I.$$

Derivo $\Rightarrow$

$$\varphi''(x) = -\frac{[f_{xx}(\ )+f_{xy}\varphi'(x)]f_y - f_x[f_{xy}+f_{yy}\varphi']}{(f_y(x,\varphi(x)))^2} =$$

$$= -\frac{f_y f_{xx} + f_{xy} f_y \varphi' - f_x f_{xy} - f_{yy} f_x \varphi'}{f_y^2} \qquad \varphi' = -\frac{f_x(\ )}{f_y(\ )}$$

$$= -\frac{f_{xx} f_y^2 - f_{xy} f_x f_y - f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{f_y^3} =$$

$$= -\frac{f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{f_y^3}$$

tutte le derivate di $f$ sono calcolate in $(x,\varphi(x))$

In particolare posso calcolare $\varphi'(1)$.

$f_x(x,y) = \frac{1}{x} + 2x(y+1)$ $\qquad f_x(+1,-1) = 1$

$f_y(x,y) = x^2 - \pi\cos(\pi y)$ $\qquad f_y(1,-1) = 1+\pi$

$f_{xx}(x,y) = -\frac{1}{x^2} + 2(y+1)$ $\Rightarrow$ $f_{xx}(1,-1) = -1$

$f_{xy}(x,y) = 2x$ $\qquad f_{xy}(1,-1) = 2$

$f_{yy}(x,y) = \pi^2 \operatorname{sen}(\pi y)$ $\qquad f_{yy}(1,-1) = 0$

$$\varphi''(1) = - \frac{\overset{-1}{\overset{\shortparallel}{f_{xx}}}\, f_y^2 - 2\, \overset{2}{\overset{\shortparallel}{f_{xy}}}\, \overset{1}{\overset{\shortparallel}{f_x}}\, \overset{1+\pi}{\overset{\shortparallel}{f_y}} + \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f_{yy}}}\, f_x^2}{f_y^3}$$

dove le derivate sono calcolate in $(1,-1)$

$$= - \frac{(-1)(1+\pi) - 4}{(1+\pi)^2} = \frac{\pi + 5}{(1+\pi^2)}$$

$$\varphi(x) = 1 - \frac{1}{1+\pi}(x-1) + \frac{1}{2}\,\frac{\pi+5}{(\pi+1)^2}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$$

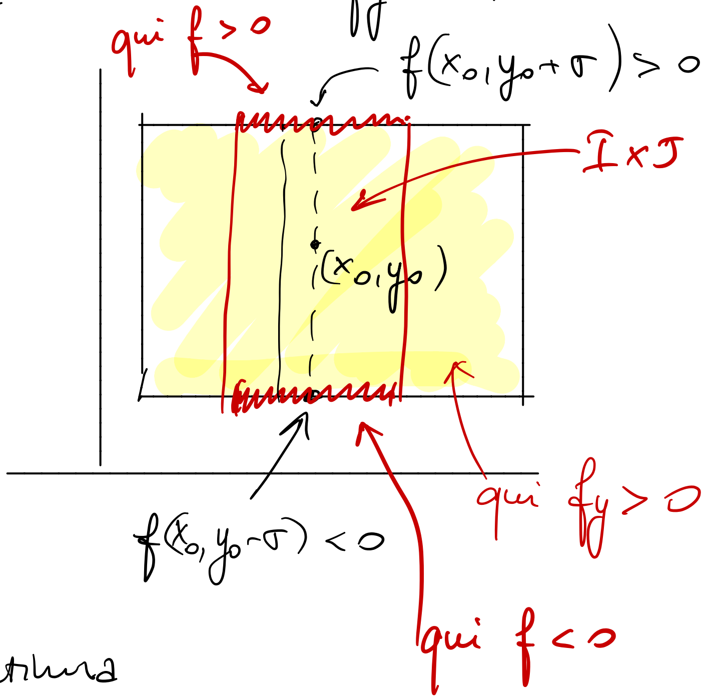
$x \to 1.$

# Dim. (parziale) del teorema di Dini

1ª) esistenza di $\varphi$.

$f(x_0,y_0)=0$ , $f_y(x_0,y_0)\neq 0$ supponiamo $f_y(x_0,y_0)>0$.

$\Rightarrow \exists$ intorno rettangolare $\tilde{I}\times J$ in cui $f_y>0$.




Sempre per la continuità di $f$,
$\exists$ $I$ intorno di $x_0$ in cui
$f(x,y_0-\sigma)<0$ , $f(x,y_0+\sigma)>0$

Ora, fisso $x\in I$.

$f(x,y_0-\sigma)<0$ , $f(x,y_0+\sigma)>0$

$f(x,\cdot)$ $\nearrow$ strettamente ed è continua

$\Rightarrow \exists!$ $y=:\varphi(x)$ t.c. $f(x,\varphi(x))=0$.

2ª) $\varphi$ continua
3ª) $\varphi$ è derivabile

$\Big\}$ non le faccio.

4°) Formula per la derivata.

$$f(x,\varphi(x))=0 \qquad \forall x\in I$$

Derivo rispetto a $x$

$$f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\,\varphi'(x)=0 \Rightarrow \varphi'(x)=-\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$$

$5^a$ parte) Se poi $f$ è di classe $C^2(A)$, allora anche $\varphi \in C^2(I)$, e si ha

$$\varphi''(x) = - \frac{f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{f_y^3}$$

tutte calcolate in $(x, \varphi(x))$

$6^a$ parte) Se poi $f$ è di classe $C^k$, allora anche $\varphi \in C^k(I)$ ed esiste una formula.

Teorema Sia $f \in C^1(A)$, $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto.

$(x_0, y_0) \in E = \{(x,y) : f(x,y) = 0\}$.

se $\nabla f(x_0, y_0) \neq (0,0)$, allora "localmente" (ossia, in un opportuno intorno $I \times J$)

l'insieme $E$ è il sostegno di una curva regolare.

**OSS**. Il teorema di Dini fornisce una c.s. per l'esplicitaz. non necessaria

$$f(x,y) = y - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \varphi(x) = x^2$$

$$f(x,y) = (y - x^2)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad y = x^2.$$

ma

$\nabla f(x,y) = \left(-4x(y-x^2), 2(y-x^2)\right)$ si annulla su tutti i pti

Non vale il teorema di Dini, ma si riesce a esplicitare

$$y = x^2.$$

**OSS** Tutto questo si applica alle linee di livello, ossia agli insiemi della forma

$$\{(x,y) : f(x,y) = c\}.$$

$$g(x,y) = f(x,y) - c$$

Sia $f: A \subset \mathbb{R}^2$ aperto $\to \mathbb{R}$ di classe $C^1$.

$E_c = \{(x,y) : f(x,y) = c\}$

Sia $(x_0,y_0) \in E_c$.

$(x_0,y_0)$ si dice pto regolare di $E_c$ se $\nabla f(x_0,y_0) \neq \underline{0}$

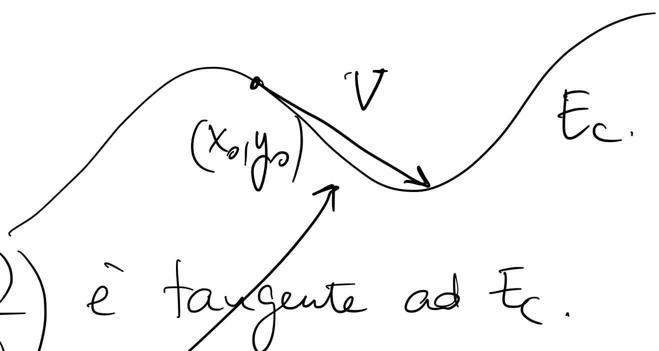
" pto singolare " " $= \underline{0}$

Se $(x_0,y_0)$ è un p.to regolare di $E_c$, allora localmente $E_c$ è sostegno di una curva regolare, grafico di una funzione $y = \varphi(x)$ oppure $x = \psi(y)$

Sia $(x_0,y_0)$ un pto regolare di $E_c$. e supponiamo $f_y(x_0,y_0) \neq 0$

$\overset{\text{Dini}}{\Longrightarrow}$ localmente $[(x,y) \in E_c \Longleftrightarrow y = \varphi(x)]$

$$\varphi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$$



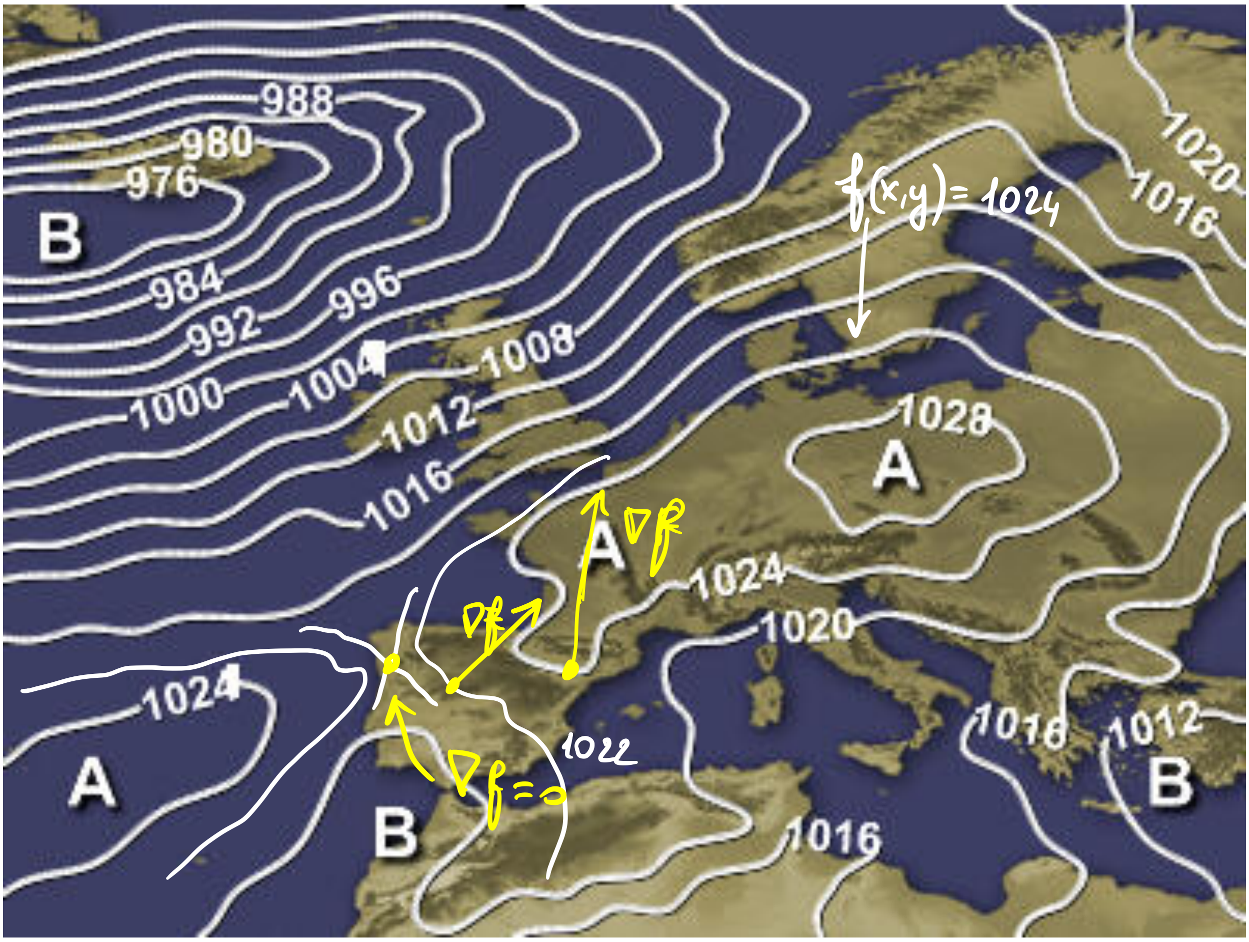

Il vettore $\left(1, -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}\right)$ è tangente ad $E_c$.

anche il vettore $V = (f_y(x_0,y_0), -f_x(x_0,y_0))$ lo è.

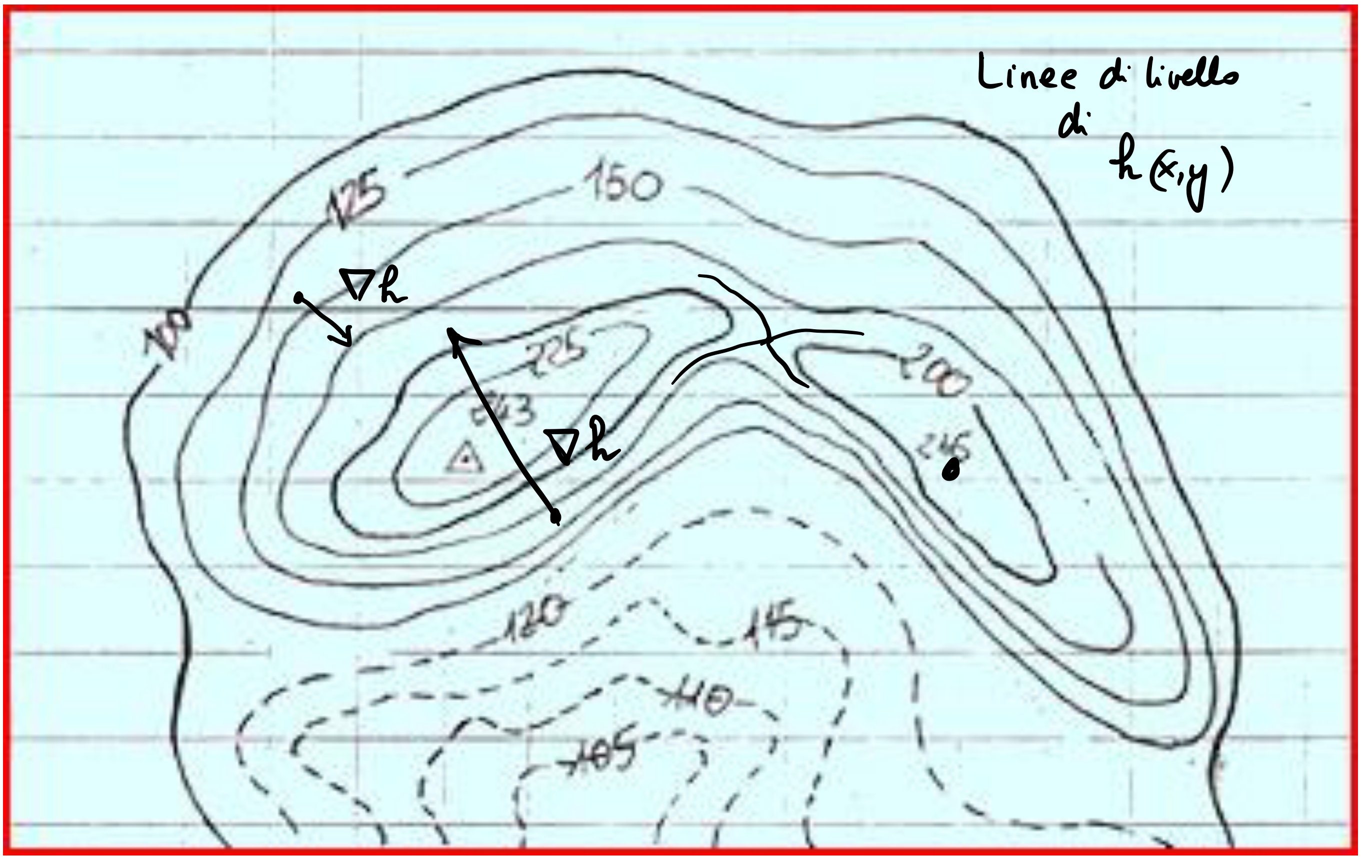
osserviamo che $\nabla f(x_0,y_0) \perp V$.

$$(\nabla f(x_0,y_0) \cdot \underline{V}) = f_x(x_0,y_0) f_y(x_0,y_0) - f_y(x_0,y_0) f_x(x_0,y_0) = 0$$

$\Rightarrow$ il $\nabla f$ è ortogonale alle linee di livello in tutti i pti regolari



988
980
976
B
984
992
996
1000
1004
1008
1012
1016
$f(x,y) = 1024$
1020
1016
1028
A
A
$\nabla f$
1024
1020
$\nabla f$
1024
A
1022
$\nabla f = 0$
B
1016
1012
B
1016



Linee di livello
di
h(x,y)
125
150
100
∇h
225
243
∇h
200
245
120
115
110
105