Avviso

Lunedi 11 aprile: scambio di orario con il corso di Fisica.

Analisi II	14:00 → 15:30	
Fisica	15:45 → 17:15	

CURVE REGOLARI

DEF Una curva regolare è una funzione

$$\underline{\gamma} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$$
$$t \longmapsto \underline{\gamma}(t) = (x_1(t), x_2(t) \dots x_N(t))$$

t.c.

1) $\underline{\gamma} \in C^1([a,b]; \mathbb{R}^N)$ (cioè le componenti $x_1(t), \dots x_N(t)$ sono C^1).

a volte basterà $\underline{\gamma} \in C^0([a,b]; \mathbb{R}^N) \cap C^1((a,b); \mathbb{R}^N)$

2) $\underline{\gamma}'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \dots, x_N'(t)) \neq \underline{0} \quad \forall t \in (a,b)$.

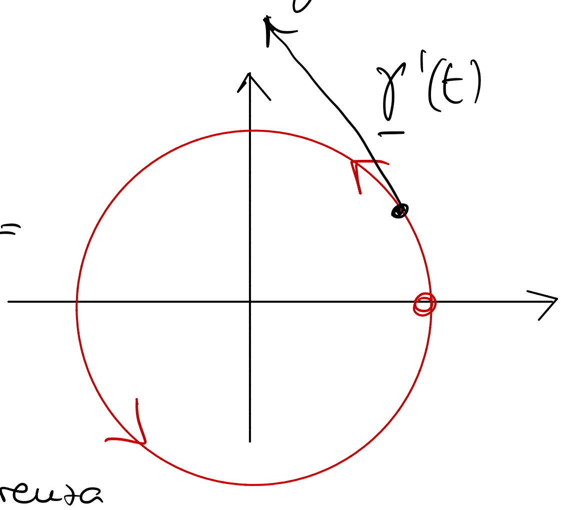
le singole componenti possono annullarsi, ma non tutte insieme

cioè $(x_1'(t))^2 + \dots + (x_N'(t))^2 \neq 0$

Esempi: $\underline{\gamma}(t) = (R\cos t, R \operatorname{sen} t)$ $\quad R > 0$ fissato

$t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t \\ y(t) = R \operatorname{sen} t \end{cases}$$ Eq^{ni} parametriche di γ



$x'(t)^2 + y'(t)^2 = R^2\operatorname{sen}^2 t + R^2 \cos^2 t =$

$= R^2 > 0$.

$\underline{\gamma}'(t)$ è la "velocità" di percorrenza della curva.

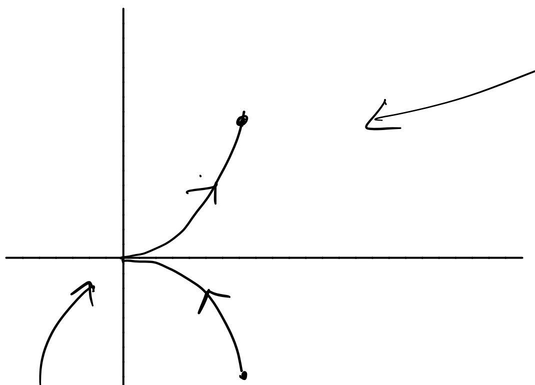
Definiamo il versore tangente alla curva $\underline{\gamma}$ nel pto $\underline{\gamma}(t)$

come il versore $\quad \underline{T} = \dfrac{\underline{\gamma}'(t)}{\|\underline{\gamma}'(t)\|} = \left(\dfrac{x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}} , \dfrac{y'(t)}{\sqrt{\dots}} \right)$

Perché richiediamo $\underline{\gamma}'(t) \neq \underline{0}$?

Esempio: $\quad \underline{\gamma}(t) = (t^2, t^3) \qquad t \in [-1, 1]$.

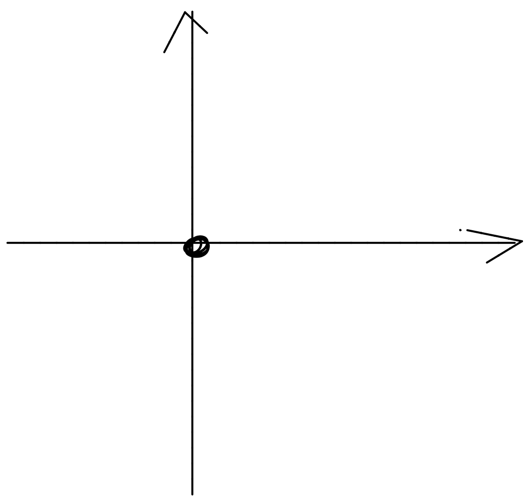
$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases} \Rightarrow t = y(t)^{1/3} \Rightarrow x = y^{2/3}$$

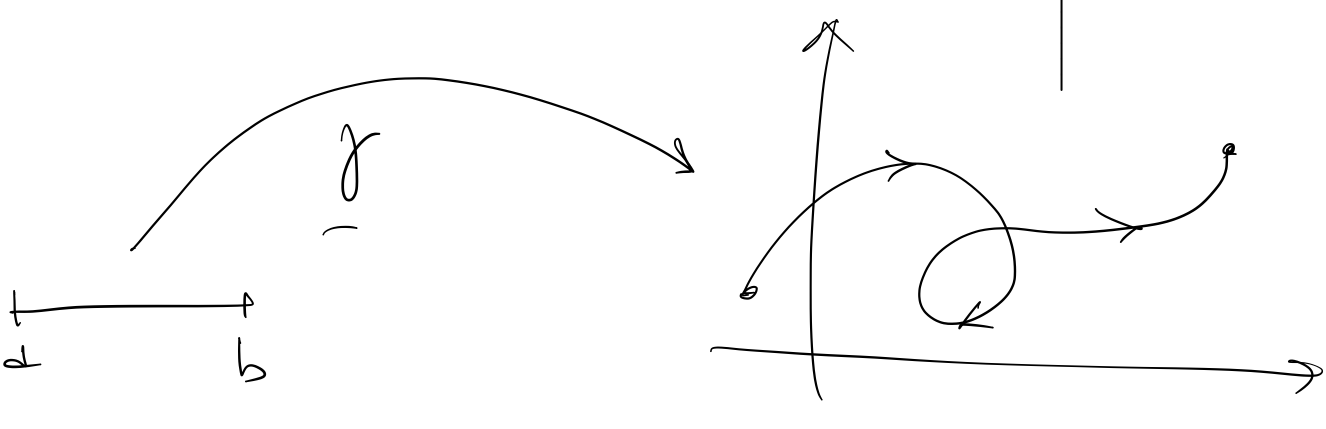


$$\begin{cases} x'(t) = 2t \\ y'(t) = 3t^2 \end{cases}$$ si annullano entrambe per $t=0$

vogliamo evitare queste situazioni.

Altro caso patologico $\begin{cases} x(t) \equiv 0 \\ y(t) \equiv 0 \end{cases}$





L'immagine $\gamma([a,b])$ si dice sostegno della curva.

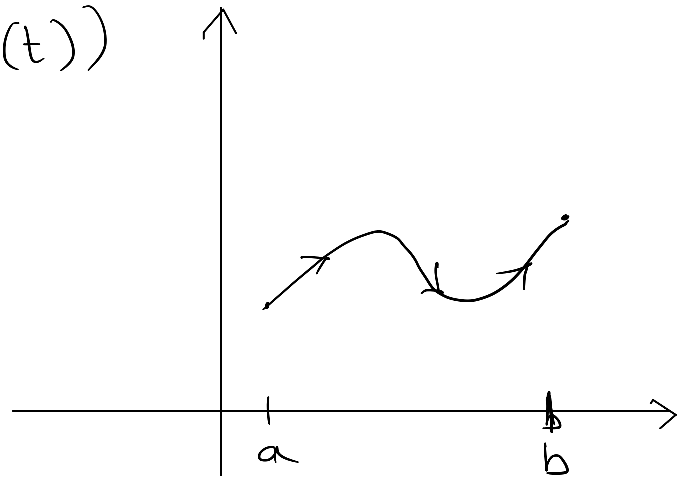
$$\gamma([a,b]) = \{ \underline{\gamma}(t) \in \mathbb{R}^n : t \in [a,b] \}.$$

ESEMPIO: curve grafico

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ di classe C^1.

Ad essa si può associare la curva grafico in $\mathbb{R}^2$.

$$\underline{\gamma}(t) : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (t, f(t))$$



$$\underline{\gamma}'(t) = (1, f'(t))$$

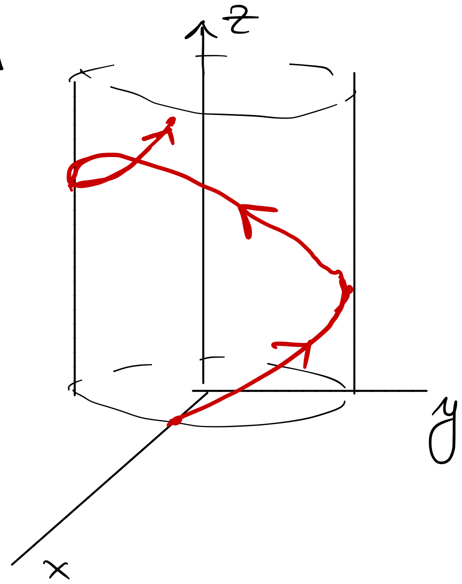
$\neq 0$

Elica cilindrica

$R, a > 0$.

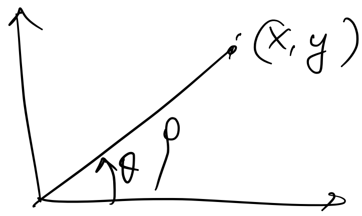
$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = at \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi]$$

$$\left.\begin{aligned} x'(t) &= -R\sin t \\ y'(t) &= R\cos t \\ z'(t) &= a \end{aligned}\right\} \neq \underline{0}$$



Altra tipologia interessante: in coord. polari

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

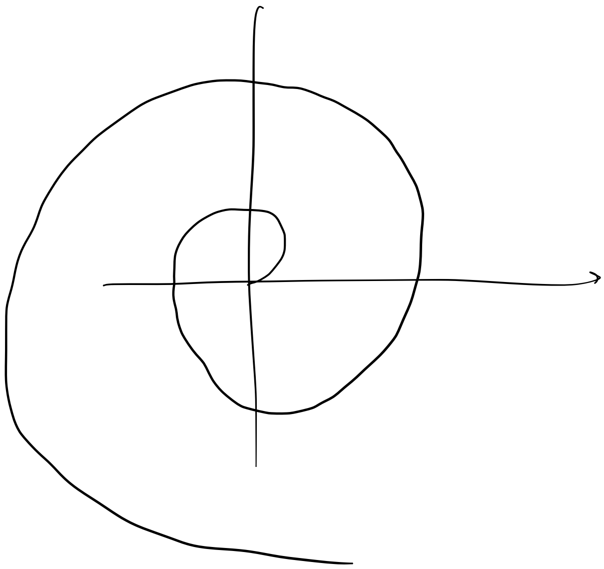


Se prendo $\rho = \rho(\theta)$, $\theta \in [a, b]$

diventa una curva

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) = \rho(\theta)\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

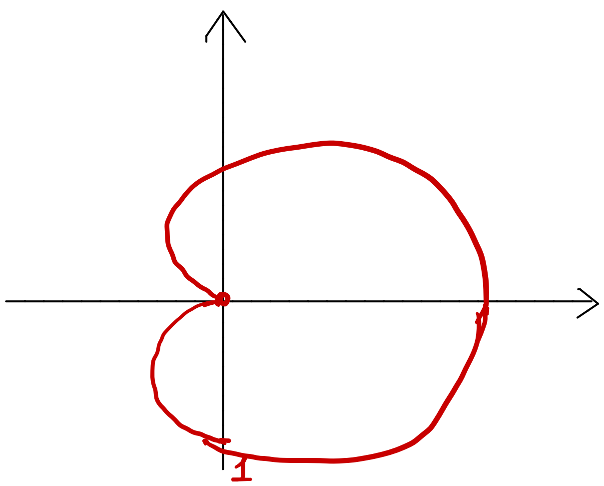
$\rho(\theta) = a\theta \longrightarrow$ spirale archimedea



$\rho(\theta) = e^{a\theta}$ spirale logaritmica.

$\rho(\theta) = 1 + \cos\theta \qquad \theta \in [-\pi, \pi]$.

cardioide



$$x'(\theta) = \rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\operatorname{sen}\theta$$
$$y'(\theta) = \rho'(\theta)\operatorname{sen}\theta + \rho(\theta)\cos\theta$$

$$(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = \rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2$$

si annulla solo se

$\rho'(\theta) = \rho(\theta) = 0$.

$\rho(\theta) = 1 + \cos\theta \Rightarrow$ per $\theta = \pm\pi$ si annullano entrambe

$\rho'(\theta) = -\operatorname{sen}\theta$

Esercizio. Verificare che la curva

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen}^3 t \\ y = 2t \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi] \text{ è una curva regolare}$$

Calcolare il versore tangente e la retta tangente a γ per $t = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{cases} x'(t) = 3 \operatorname{sen}^2 t \cos t \\ y'(t) = 2 \operatorname{sen} t + 2t \cos t \end{cases}$$

La 1ª componente si annulla per $t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$

La 2ª " " se $t = 0$ (è uno degli estremi, però)

ma negli altri no.

$$x'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{9}{8} \qquad \underline{T}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\frac{9}{8}}{\sqrt{\frac{81}{64} + \left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right)^2}}, \frac{\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}}{\sqrt{- - -}} \right)$$

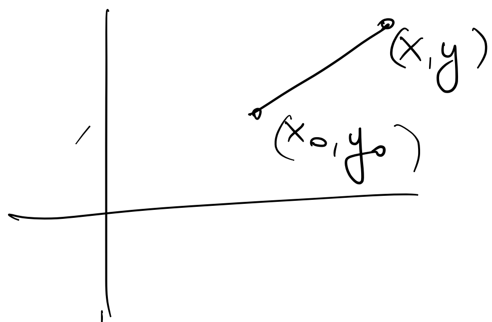
$$y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$x_0 = x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

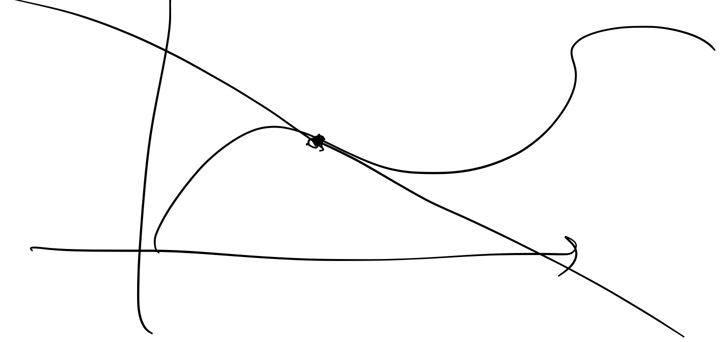
$$y_0 = y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

$\leftarrow$ Retta tangente = retta passante per questo punto e parallela a $\underline{T}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{9}{8}\right)} = \frac{y - y_0}{\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}}$$



$$\frac{8}{9}\left(x - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{y - \frac{\pi\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}}$$



TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE

Sia A aperto di $\mathbb{R}^2$

$f(x,y) : A \longrightarrow \mathbb{R}$ regolare, per esempio di classe C^1.

Consideriamo l'eq^{ne} $f(x,y)=0$.

Mi interessa sapere come è fatto l'insieme

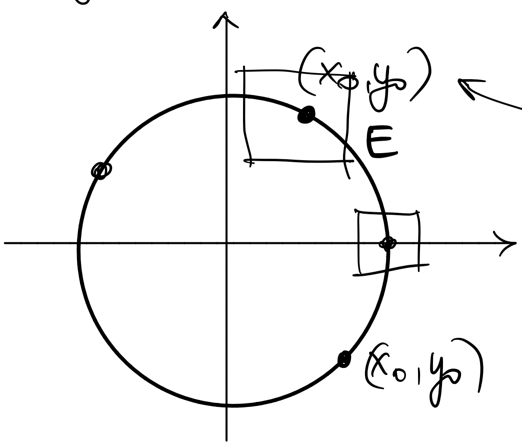
$$E = \{(x,y) \in A : f(x,y) = 0\}.$$

Esempio 1 $\quad f(x,y) = x^2+y^2-1$

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ è una circonferenza quindi è il sostegno di una curva.

Fissiamo un pto $(x_0,y_0) \in E$.

Mi chiedo se, almeno in un intorno di (x_0,y_0), l'insieme E è il grafico di una funzione $y=\varphi(x)$



Se (x_0,y_0) è questo, si

$$y = \sqrt{1-x^2}$$

$$y = -\sqrt{1-x^2}$$

Se $(x_0,y_0) = (1,0)$, questo non è vero.

In questo caso, se $(x_0,y_0) \in E$, e $y_0 \neq 0$, esiste un intorno rettangolare $I \times J$ di (x_0,y_0)

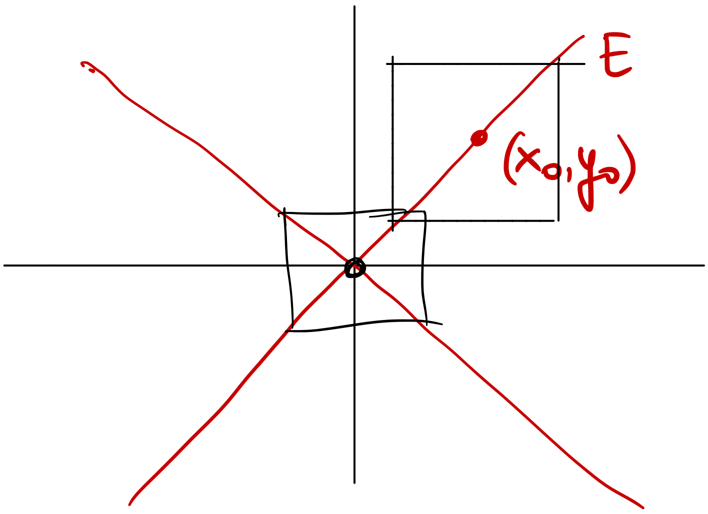
I intorno di x_0 $\quad$ J intorno di y_0.

t.c., se $(x,y) \in I \times J$ si ha

$$(x,y) \in E \iff y = \varphi(x)$$

2) $f(x,y) = x^2 - y^2$

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 - y^2 = 0\} = \{(x,y) : \; y = \pm x\}$

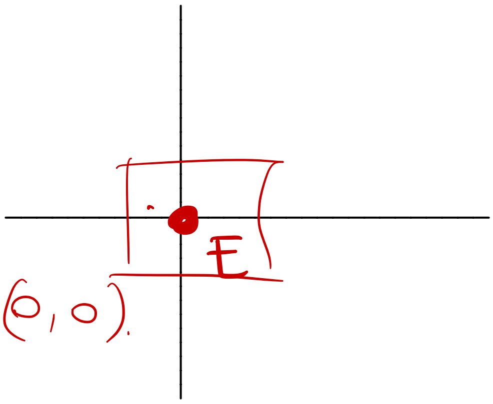


Anche in questo caso, E non è il grafico di una funzione, ma, fissato $(x_0,y_0) \in E$, posso trovare un intorno I di x_0, un intorno J di y_0, t.c. $(I \times J) \cap E$ è il grafico di una $y = \varphi(x)$

Questo è falso se prendo $(x_0,y_0) = (0,0)$. In questo caso in ogni intorno $I \times J$, E non è grafico di una $y = \varphi(x)$, né $x = \psi(y)$

3) $f(x,y) = x^2+y^2$

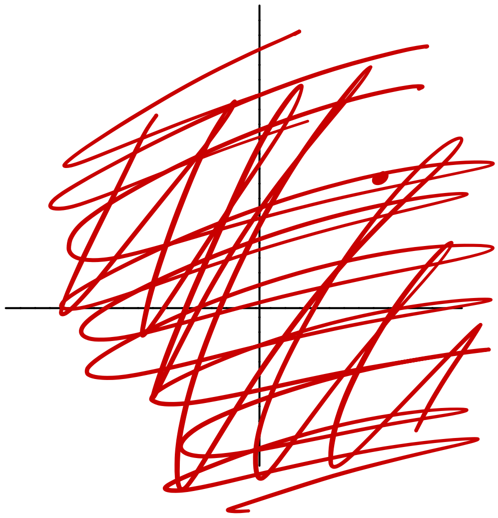
$$E = \{(x,y) : x^2+y^2=0\} = \{(0,0)\}.$$



In questo caso, devo prendere $(x_0,y_0)=(0,0)$.
In nessun intorno $I \times J$ di $(0,0)$
E è il grafico di una $y=\varphi(x)$

4) $f(x,y) \equiv 0$

$$E = \{(x,y) : f(x,y)=0\} = \mathbb{R}^2$$



Anche in questo caso, comunque si fissi $(x_0,y_0) \in E$, lì intorno E non è il grafico di una funzione

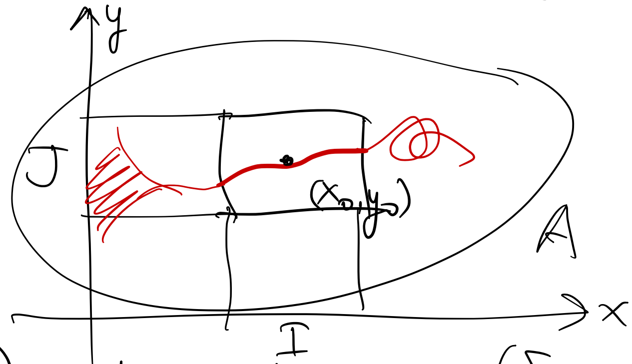
TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE (Ulisse Dini)

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $f(x,y): A \to \mathbb{R}$ di classe C^1.

Sia $(x_0,y_0) \in A$ t.c.

1) $f(x_0,y_0) = 0$

2) $f_y(x_0,y_0) \neq 0$.



Allora $\exists\ I = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ intorno di x_0 $(\delta,\sigma>0)$

$\exists\ J = (y_0-\sigma, y_0+\sigma)$ " " y_0 t.c.

t.c $I \times J \subset A$, e tale che $\forall x \in I$ $\exists!\ \varphi(x) \in J$ verificante

$f(x,\varphi(x)) = 0$. In altre parole, ~~se~~ $(x,y) \in I \times J$, si ha

$$f(x,y) = 0 \iff y = \varphi(x)$$

Inoltre la funzione $\varphi(x)$ così determinata è di classe C^1, e si ha

$$\varphi'(x) = -\frac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))} \qquad \forall x \in I$$

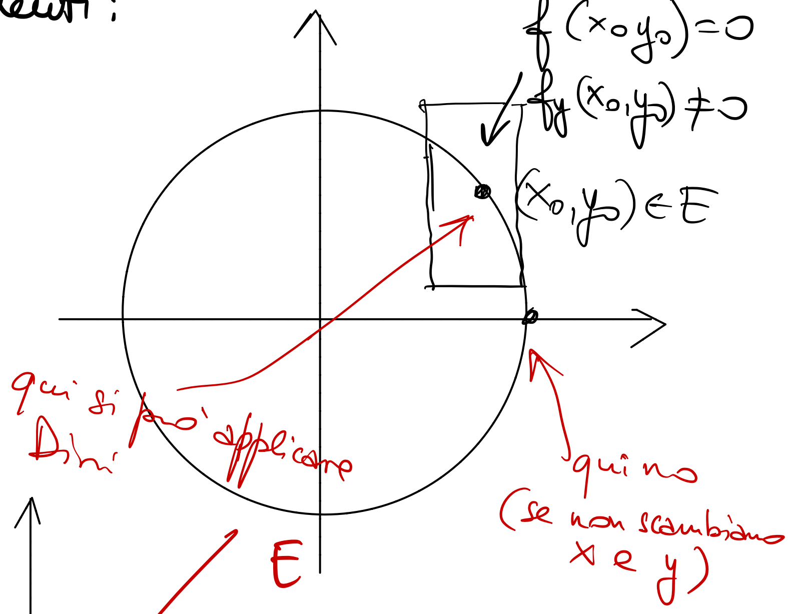
$\Downarrow$

OSS $\quad \varphi(x_0) = y_0 \implies \varphi'(x_0) = -\dfrac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$

Rivediamo gli esempi precedenti:

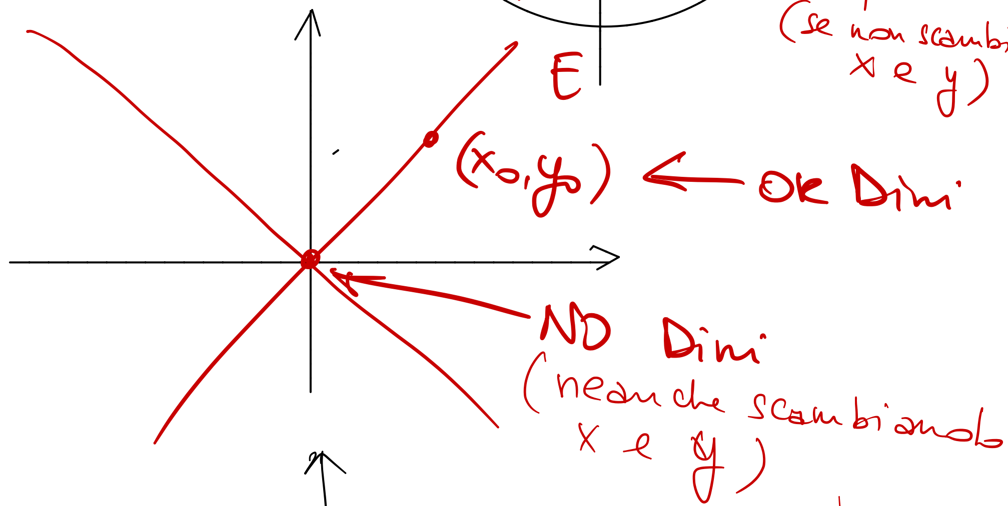
1) $f(x,y) = x^2+y^2-1$

$f_y(x,y) = 2y$



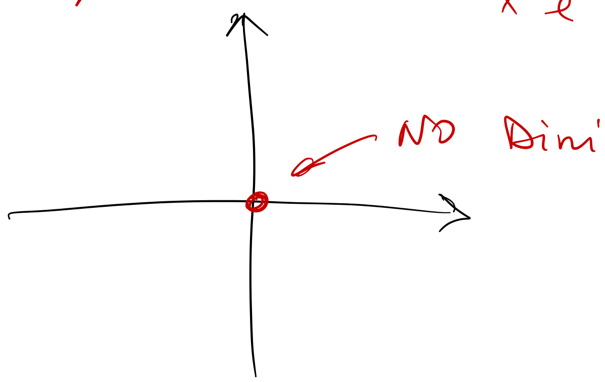
2) $f(x,y) = x^2-y^2$

$f_y(x,y) = -2y$.



3) $f(x,y)= x^2+y^2$

$f_y(x,y) = 2y$



4) $f(x,y)\equiv 0$

$f_y(x,y)\equiv 0$

non si applica mai Dini.

Dini at work

Siamo interessati alle soluzioni (x,y) dell'eq^{ne}

$$y = xy + \ln y. \quad (*)$$

1) verificare che in un intorno di $P(1,1)$ l'eq^{ne} $(*)$ individua una funzione $y = \varphi(x)$

2) Determinare l'eq^{ne} della retta tangente al grafico di φ nel pto $(1,1)$