Equazioni non lineari "autonome" (non dipendenti esplicitamente dalla x).

$$F(y, y', y'') = 0$$

Es. $(1+y^2)y'' = y(y')^2$

Idea $y' = u(y)$ — y diventa la variabile indipendente

$$y'(x) = u(y(x))$$

$$y''(x) = \frac{du}{dy}(y(x))\, y'(x) = \dot{u}(y)\, u(y)$$

L'equazione diventa

$$F(y, u(y), \dot{u}(y)u(y)) = 0.$$

E' un'eq^{ne} del primo ordine nella $u(y)$

Se si riesce a risolvere, si trova $u(y)$. Poi si risolve l'eq^{ne}

$y'(x) = u(y(x))$, che è a variabili separabile

Esempio Pb. di Cauchy

Esempio Pb. di Cauchy

$$(P) \begin{cases} (1+y^2)\, y'' = y\,(y')^2 \\ y(4) = 0 \\ y'(4) = 1 \end{cases} \Longrightarrow \quad u(0) = 1$$

$$y' = u(y) \quad \Longrightarrow \quad y'' = u(y)\, \dot{u}(y)$$

L'eq^{ne} diventa

$$(\tilde{P}) \begin{cases} (1+y^2)\, \cancel{u(y)}\, \dot{u}(y) = y\,(u(y))^{\cancel{2}} \\ u(0) = 1 \end{cases}$$ con la cond.^{ne} iniziale

posso semplificare perchè localmente $u(y) \neq 0$

$$(1+y^2)\, \dot{u}(y) = y\, \underline{u(y)}$$

oss. che $u \equiv 0$ non è soluz. di $(\tilde{P})$

$$\frac{\dot{u}}{u} = \frac{y}{1+y^2}$$

$$\int \frac{\dot{u}(y)}{u(y)}\, dy = \int \frac{y}{1+y^2} = \frac{1}{2} \ln(1+y^2) + c$$

$$\parallel \qquad u(y) = u$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln |u| = \ln u$$

$$\Longrightarrow \ln u = \frac{1}{2} \ln(1+y^2) + c$$

$u(0) = 1 \Longrightarrow c = 0$.

$$y' = u(y) = \sqrt{1+y^2}$$

$$(P') \begin{cases} y' = \sqrt{1+y^2} \\ y(4) = 0 \end{cases}$$ variabili separabili

$$(P')\quad \begin{cases} y' = \sqrt{1+y^2} \\ y(4)=0 \end{cases}$$ variabili separabili

$$\int \frac{y'}{\sqrt{1+y^2}}\,dx = \int 1\,dx = x + c_1$$

$$\parallel$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \operatorname{settsh} y = \ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right)$$

Reminder:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c.$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{settsh} x \overset{+c}{=} \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{settch} x \overset{+c}{=} \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + c.$$

$$\sqrt{1+x^2} = t - x \implies t = \sqrt{1+x^2} + x$$

$$\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) = x + c_1$$

$$y(4)=0 \implies c_1 = -4$$

$$\ln\left(y+\sqrt{1+y^2}\right) = x - 4$$

$$y + \sqrt{1+y^2} = e^{x-4}$$

$$\sqrt{1+y^2} = e^{x-4} - y$$

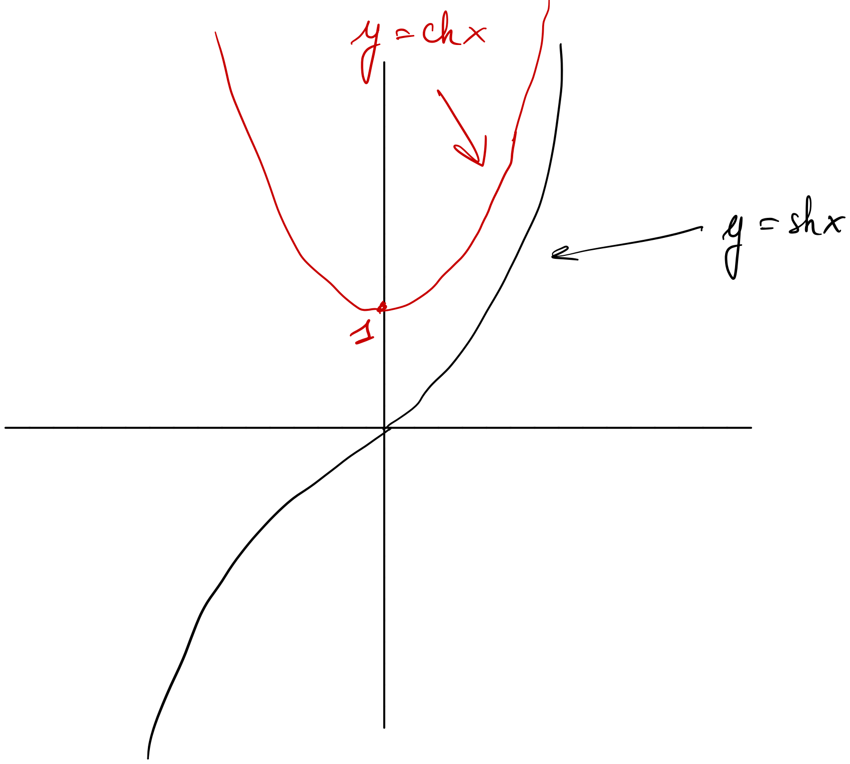
$$1+y^2 = \left(e^{x-4}-y\right)^2$$

$$y = \operatorname{sh}(x-4) = \frac{e^{x-4} - e^{-(x-4)}}{2}$$

Digressione

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$



$$\operatorname{sh}^2 x + 1 = \operatorname{ch}^2 x$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{ch} x = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}$$

$\operatorname{sh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile.

La sua inversa si chiama settsh settore-seno iperbolico.

settsh y è l'unico $x \in \mathbb{R}$ t.c. $\operatorname{sh} x = y$.

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \qquad \text{molt. per } 2e^x$$

$$e^{2x} - 2y e^x - 1 = 0 \qquad e^x = t$$

$$t^2 - 2yt - 1 = 0$$

$$t = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \implies e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

$+$

$$x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) = \operatorname{settsh} y.$$

$$D \operatorname{settsh} y = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}$$ calcolo diretto

$$D \operatorname{settsh} y = \frac{1}{D \operatorname{sh} x \big|_{x = \operatorname{settsh} y}} =$$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{settsh} y)} = \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}}$$

Analogamente

$\text{ch} : [0,+\infty) \longrightarrow [1,+\infty)$ è invertibile

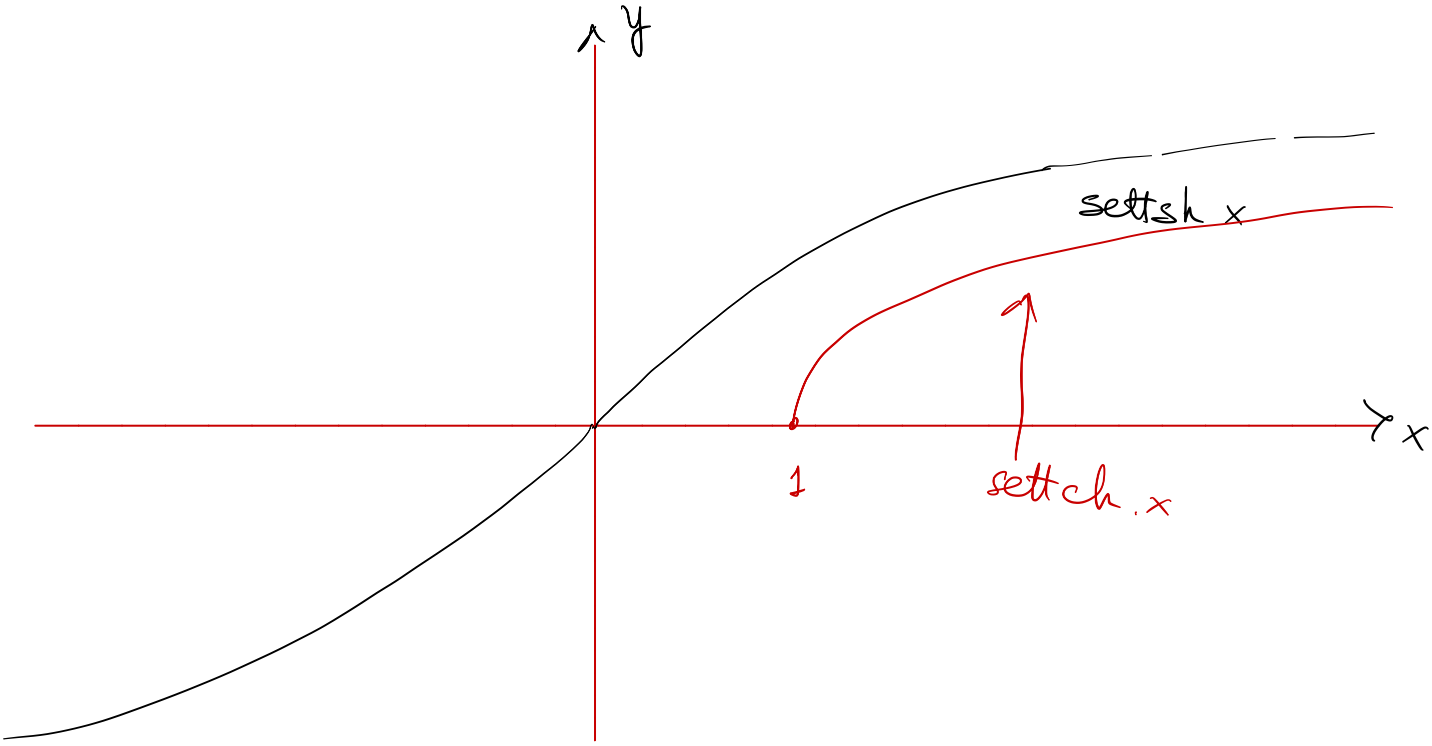
La sua inversa

$\text{settch} : [1,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$

$y \longmapsto \text{settch}\, y =$ l'unico $x \in [0,+\infty)$ t.c. $\text{ch}\, x = y$

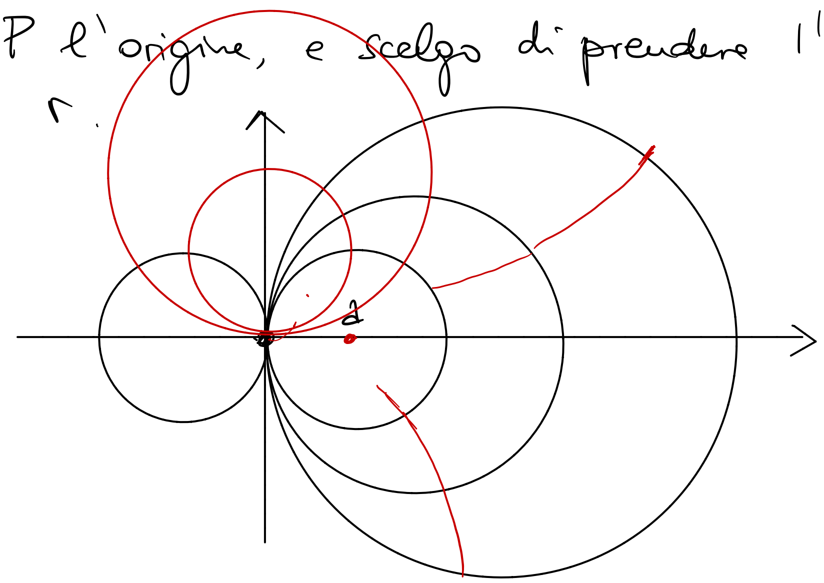
$$\text{settch}\, y = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \quad \forall y \geq 1.$$

$$D\, \text{settch}\, y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \qquad \forall y > 1$$

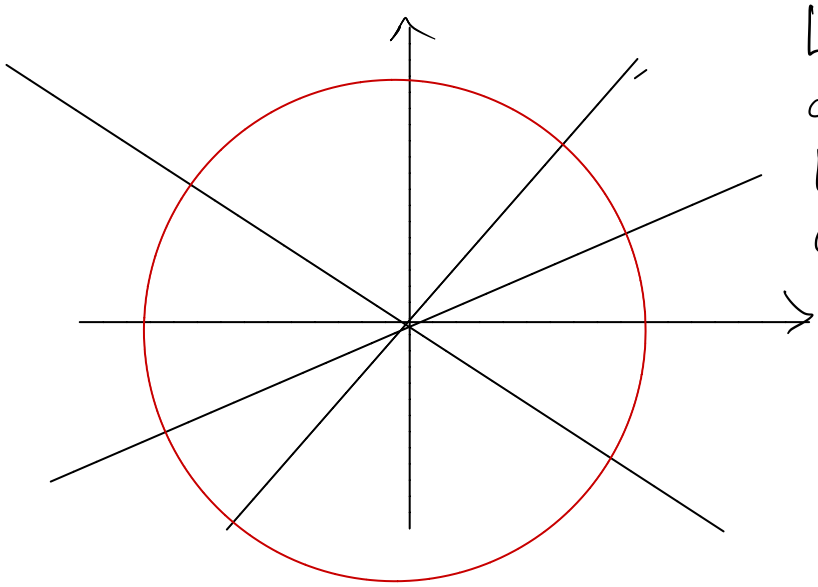


Problema. Dato un punto P e una retta r passante per P, considerare le circonferenze che passano per P e con centro su r.
Determinare le traiettorie ortogonali a tali circonferenze.

Sia P l'origine, e scelgo di prendere l'asse x coincidente con r.



Esempio
Le traiettorie ortogonali alle rette passanti per l'origine sono le circonf. con centro nell'origine



Torniamo al nostro problema.

Eq^{ne} generica della circonf. $(x-a)^2+y^2=a^2$

$$\boxed{x^2+y^2-2ax=0}$$

$$x^2+y(x)^2-2ax\equiv 0$$

derivo in x

$$\Longrightarrow \qquad 2x+2y(x)\,y'(x)-2a=0$$

$$x^2 + y(x)^2 - 2ax \equiv 0 \implies a = \frac{x^2+y^2}{2x}$$

derivo in x

$\implies$

$$2x + 2y(x)\, y'(x) - 2a = 0$$

$$y y' = a - x$$

$$y y' = \frac{x^2+y^2}{2x} - x$$

Eq^{ne} differenziale della famiglia di circonferenze

Per trovare le traiettorie ortogonali, devo sostituire y' con $-\frac{1}{y'}$

$$-\frac{y}{y'} = \frac{y^2-x^2}{2x}$$

eq^{ne} delle traiettorie ort.

$$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{x^2-y^2}$$

$$y' = \frac{2xy}{x^2-y^2} =$$

$$y' = \frac{2\,y/x}{1-(y/x)^2}$$

eq^{ne} omogenea

$$\frac{y(x)}{x} = v(x)$$

$$y(x) = x\,v(x)$$

$$y'(x) = x\,v'(x) + v(x)$$

$\Downarrow$

$$xv' + v = \frac{2v}{1-v^2}$$

$$\Downarrow \quad v' = \frac{1}{x}\left(\frac{2v}{1-v^2} - v\right) = \frac{1}{x}\, v\, \frac{1+v^2}{1-v^2}$$

$$v' = \frac{1}{x}\left(\frac{2v}{1-v^2} - v\right) = \frac{1}{x}\, v\, \frac{1+v^2}{1-v^2}$$

$$\frac{v'(1-v^2)}{v\,(1+v^2)} = \frac{1}{x}$$

$(x>0)$

$$\int \frac{dv\,(1-v^2)\,v}{v^2(1+v^2)} = \int \frac{dx}{x} = \ln x + c$$

$\parallel$

$v^2 = t$

$2v\,dv = dt$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dt\,(1-t)}{t(1+t)} = \frac{1}{2}\ln t - \ln(1+t)$$

$\parallel$

$$\frac{1}{2}\,\frac{1-t}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}$$

$$1-t = 2A(1+t) + 2Bt$$

$-1 = 2A + 2B$ $\qquad A = \frac{1}{2}$ $\qquad B = \frac{-1-2A}{2} = \frac{-1-1}{2} = -1$

$1 = 2A$

$$\frac{1}{2}\ln v^2 - \ln(1+v^2) = \ln x + c = \ln(kx)$$

$\parallel$

$$\ln \frac{v}{1+v^2} =$$

$$\frac{v}{1+v^2} = kx \qquad\qquad x^2+y^2 = by$$

$$\frac{y/x}{1+\frac{y^2}{x^2}} = kx$$

$$\frac{1}{k} = b$$

$$\frac{xy}{x^2+y^2} = kx \implies y = k(x^2+y^2)$$

Sono le circonferenze passanti per l'origine e aventi centro sull'asse y.

Per casa:
determinare le traiettorie ortogonali alla famiglia di iperboli simmetriche rispetto all'asse x e passanti per (1,0).

Curve regolari:

Una curva è una funzione

$$\underline{\gamma} : [a,b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad (\mathbb{R}^3) \quad (\mathbb{R}^N)$$

$$t \longmapsto \underline{\gamma}(t) = (x(t), y(t))$$

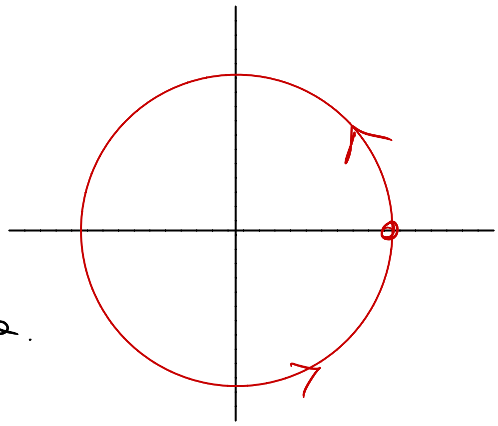
$\underline{\gamma}$ si dice regolare se $\underline{\gamma}$ è di classe $C^1([a,b])$ (spesso basterà $C^0([a,b]) \cap C^1((a,b))$)

+ un'altra condiz. (di regolarità).

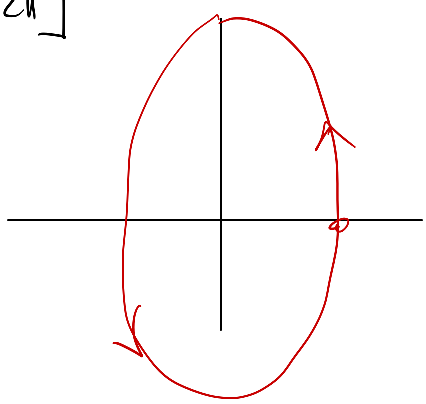
Esempi

$\gamma(t) = (R\cos t, R\,\mathrm{sen}\, t)$ $\quad t \in [0, 2\pi]$.

circonferenza.

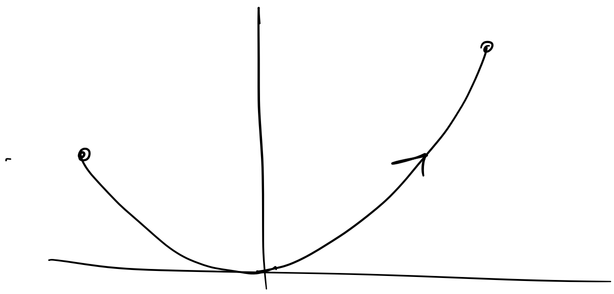


$\gamma(t) = (2\cos t, 3\,\mathrm{sen}\, t)$ $\quad t \in [0, 2\pi]$



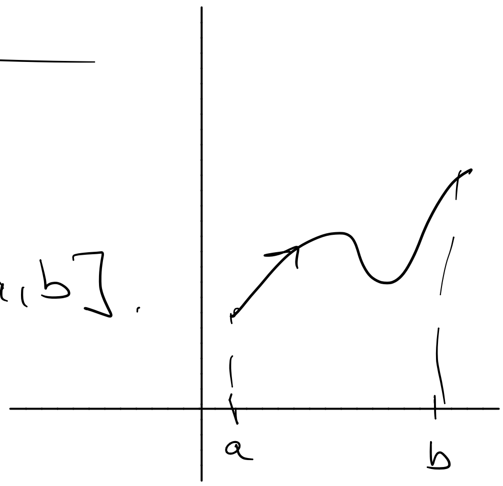
$\gamma(t) = (t, t^2)$ $\quad t \in [a,b]$

$\hookrightarrow y = x^2$



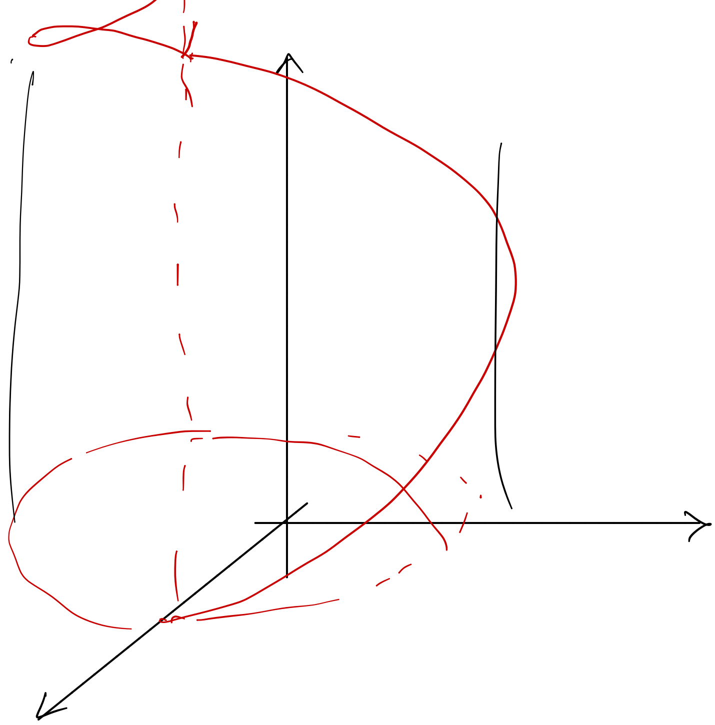
Curve grafico $\qquad y = f(x)$

$\underline{\gamma}(t) = (t, f(t))$ $\qquad t = x \in [a,b]$.



$$\gamma(t) = (R\cos t,\ R\operatorname{sen} t,\ at) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

elica cilindrica $\qquad R, a > 0$.



$$\gamma(t) = (t\cos t,\ t\operatorname{sen} t)$$ spirale di Archimede

$$\gamma(t) = (e^t\cos t,\ e^t\operatorname{sen} t)$$ spirale logaritmica