Metodo della variazione delle costanti per la determinazione di una sol^{ne} particolare $y_p(x)$ dell'eq^{ne} lineare non omogenea

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = f(x) \qquad (E)$$

anche a coeff^{ti} non costanti

$$y'' + a(x)\,y' + b(x)\,y = 0 \qquad (E_0)$$

Siano $y_1(x)$ e $y_2(x)$ due sol^{ni} lin. indip. di (E_0)

$\Rightarrow$ int. generale di (E_0) $\quad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$

Per cercare una sol^{ne} particolare di (E), la cerchiamo nella forma

$$y_p(x) = c_1(x)\,y_1(x) + c_2(x)\,y_2(x) \qquad \text{(variazione delle costanti)}$$

$$y_p'(x) = \underbrace{c_1' y_1 + c_2' y_2}_{=0 \;\leftarrow\; \text{imponiamo}} + c_1 y_1' + c_2 y_2'$$

$$y_p''(x) = c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2''$$

(E) diventa

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + a(c_1 y_1' + c_2 y_2') + b(c_1 y_1 + c_2 y_2) = f(x)$$

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_1 \underbrace{\left[y_1'' + a y_1' + b y_1\right]}_{=0} + c_2 \underbrace{\left[y_2'' + a y_2' + b y_2\right]}_{=0} = f(x)$$

$$c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x)$$

In altre parole c_1' e c_2' devono verificare:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x) \end{cases}$$

E' un sistema lineare 2×2 nelle incognite $c_1'(x)$, $c_2'(x)$

Si dimostra che la matrice dei coefficienti

$\begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{bmatrix}$ ha sempre det. $\neq 0$ se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono sol^{ni} lin. indip. di (E_0)

$\Rightarrow$ risolvo e trovo c_1', c_2'

Poi si integra e si trovano $c_1(x)$, $c_2(x)$

Esempio: Trovare l'integrale generale di

$$y'' - y = \frac{1}{1+e^x} \qquad (E)$$

$$y'' - y = 0 \qquad (E_0)$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad (EA)$$

$\lambda = \pm 1 \Rightarrow$ Sol^{ni} di (E_0) $\quad y_1(x) = e^x, \; y_2(x) = e^{-x}$

Cerco una sol^{ne} di (E) nella forma

$$y_p(x) = c_1(x) e^x + c_2(x) e^{-x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1' e^x + c_2' e^{-x} = 0 \\ c_1' e^x - c_2' e^{-x} = \dfrac{1}{1+e^x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2c_1' e^x = \dfrac{1}{1+e^x} & \Rightarrow \quad c_1' = \dfrac{1}{2e^x(1+e^x)} \\ 2c_2' e^{-x} = -\dfrac{1}{1+e^x} & \Rightarrow \quad c_2' = -\dfrac{e^x}{2(1+e^x)} \end{cases}$$

$$c_2(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln(1+e^x)$$

$$c_1(x) = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{e^x(1+e^x)} = \frac{1}{2}\int \frac{e^{-x}\,dx}{1+\frac{1}{e^{-x}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}\, e^{-x}\,dx = -\frac{1}{2}\int \frac{t^{+1-1}\,dt}{t+1} =$$

$$e^{-x} = t$$
$$-e^{-x}dx = dt$$

$$= -\frac{1}{2}\left(t - \ln(t+1)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}\ln(1+e^{-x})$$

$$c_2(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+e^x)$$

$$c_1(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{2}\ln(1+e^{-x})$$

$$y_p(x) = \frac{1}{2}\ln(1+e^{-x})\,e^x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-x}\ln(1+e^x)$$ sol^{ne} di (E)

Int. generale di (E):

$$\boxed{y(x) = y_p(x) + c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Nel caso di un'eq^{ne} del 3° ordine

$$y''' + a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x), \qquad (E)$$

una volta trovate tre sol^{ni} lin. ind. $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ di

$$y''' + a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = 0 \qquad (E_0)$$

cerco una sol^{ne} part. di (E) nella forma

$y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_3(x)y_3(x)$, dove c_1, c_2, c_3 verificano

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + c_3' y_3 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + c_3' y_3' = 0 \\ c_1' y_1'' + c_2' y_2'' + c_3' y_3'' = f(x) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ si trovano c_1', c_2', c_3'

$\Longrightarrow$ si trovano c_1, c_2, c_3

Trovare (al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$) l'integrale generale di

$$y'' + 6y' + \alpha y = 5e^{-3x} - x \qquad (E)$$

$$y'' + 6y' + \alpha y = 0 \qquad (E_0)$$

$$\lambda^2 + 6\lambda + \alpha = 0 \qquad (EA)$$

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-\alpha}$$

Integrale gen. di (E_0)

1) $9-\alpha>0 \Rightarrow z(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

$\alpha < 9$

2) $\alpha = 9 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -3$

$$\Rightarrow z(x) = e^{-3x}(c_1 + c_2 x)$$

3) $\alpha > 9 \qquad \lambda_{1,2} = -3 \pm i\sqrt{\alpha-9}$

$$\Rightarrow z(x) = c_1 e^{-3x}\cos\left(\sqrt{\alpha-9}\,x\right) + c_2 e^{-3x}\operatorname{sen}\left(\sqrt{\alpha-9}\,x\right)$$

Ricerca di una sol^{ne} part.

Cerco una sol^{ne} particolare di

$$y'' + 6y' + \alpha y = 5e^{-3x} \qquad (E_1)$$

Cerco y_p della forma $y_p(x) = Ae^{-3x}$

(funzionerà se $\alpha \neq 9$)

$$y_p'(x) = -3Ae^{-3x} \qquad y_p''(x) = 9Ae^{-3x}$$

$$9A\cancel{e^{-3x}} - 18A\cancel{e^{-3x}} + \alpha A\cancel{e^{-3x}} = 5\cancel{e^{-3x}}$$

$$A = \frac{5}{\alpha - 9} \Rightarrow y_p(x) = \frac{5}{\alpha-9}e^{-3x}$$

Se $\alpha = 9$, cercherò $y_p(x) = Ax^2e^{-3x} \Rightarrow$ si trova A

Infine, risolvo.

$$y'' + 6y' + \alpha y = -x \qquad (E_2)$$

$\Rightarrow y_p(x) = Ax + B$ funzionerà se 0 non è sol^{ne} dell'algebrica associata

$$y_p'(x) = A \qquad y_p''(x) = 0$$

$$6A + \alpha Ax + \alpha B = -x$$

$$\begin{cases} \alpha A = -1 \\ 6A + \alpha B = 0 \end{cases} \qquad A = -\frac{1}{\alpha} \qquad B = -\frac{6}{\alpha}A = \frac{6}{\alpha^2}$$

Ok se $\alpha \neq 0$.

se $\alpha = 0$, cercherò y_p della forma $y_p(x) = Ax^2 + Bx$
$\Rightarrow$ trovare A e B.

Per la linearità dell'eq^{ne}, l'int. generale è dato da.

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \frac{5}{\alpha-9} e^{-3x} - \frac{1}{\alpha} x + \frac{6}{\alpha^2} \qquad \alpha < 9,\ \alpha \neq 0$$

$$y(x) = c_1 e^{-6x} + c_2 - \frac{5}{9} e^{-3x} + Ax^2 + Bx \qquad \alpha = 0$$

noti

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x} + Ax^2 e^{-3x} - \frac{x}{9} + \frac{6}{81} \qquad \alpha = 9$$

noto

$$y(x) = c_1 e^{-3x} \cos\left(\sqrt{\alpha-9}\, x\right) + c_2 e^{-3x} \operatorname{sen}\left(\sqrt{}\, x\right) + \qquad \alpha > 9$$

$$+ \frac{5}{\alpha-9} e^{-3x} - \frac{1}{\alpha} x + \frac{6}{\alpha^2}$$

Pb.: risoluzione di (E_0) omog. associata se l'eq^{ne} è a coeff^{ti} non costanti.

Problema in generale difficile.

$$y'' + a(x)\, y' + b(x)\, y = 0 \qquad (E_0)$$

$$y'' + \operatorname{sen}(3x)\, y' + x^2 y = 0 \Longleftarrow \text{boh?}$$

Il problema si può risolvere se una sol^{ne} è nota.

Esempio

$$x^2 y'' - (x^2+2x)\, y' + (x+2)\, y = 0$$

oss $y(x) = x$ è sol^{ne}. $\quad y'(x) = 1 \qquad y''(x) = 0$

$$-(x^2+2x) + (x+2)x \overset{?}{=} 0 \qquad \text{sì.}$$

Si cerca una seconda sol^{ne} nella forma

$$y(x) = x\, v(x) \Rightarrow y'(x) = xv' + v, \quad y'' = xv'' + 2v'$$

L'eq^{ne} diventa

$$x^2(xv'' + 2v') - (x^2+2x)(xv'+v) + (x+2)\,xv = 0$$

$$x^3 v'' + \cancel{2x^2 v'} - x^3 v' - \cancel{x^2 v} - \cancel{2x^2 v'} - \cancel{2xv} + \cancel{x^2 v} + \cancel{2xv} = 0$$

$$v'' - v' = 0 \qquad \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{array}$$

$$v_1(x) = 1 \qquad v_2(x) = e^x \Rightarrow y = xe^x \text{ è sol}^{ne}$$

Int. generale

$$y(x) = c_1 x + c_2 x e^x$$

Nel caso generale $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ (E_0)

se è nota una soluzione $u(x)$, ne cerco un'altra nella forma $y = uv$ $\Rightarrow$ $y' = u'v + uv'$

$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''$$

(E_0) diventa

$$u''v + 2u'v' + uv'' + a(u'v + uv') + buv = 0$$

$$v\underbrace{(u'' + au' + bu)}_{=0} + uv'' + 2u'v' + auv' = 0$$

ponendo $w = v'$, diventa

$$uw' + (2u' + au)w = 0 \Rightarrow \text{si risolve lineare del } 1^\circ \text{ ordine omog.}$$

Eq^{ne} di Eulero

eq^{ne} singolare per $x=0$
(supponiamo $x>0$)

$$x^2 y'' + a x y' + b y = f(x) \quad (E) \qquad a, b \text{ costanti.}$$

e in generale

$$\cancel{x}^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = f(x)$$

Si risolvono con la sostituzione $\quad x = e^t \quad t = \ln x$

$$v(t) = y(e^t) \qquad\qquad y(x) = v(\ln x)$$

$$y'(x) = \frac{v'(\ln x)}{x} \qquad\qquad y'' = \frac{v''(\ln x)\frac{1}{x}\cdot x - v'(\ln x)}{x^2} =$$

$$= \frac{v''(\ln x) - v'(\ln x)}{x^2}$$

L'eq^{ne} diventa $(\ln x = t)$

$$v''(t) - v'(t) + a v'(t) + b\, v(t) = f(e^t)$$

$$v'' + (a-1) v' + b\, v = f(e^t) \qquad \text{è a coeff}^{ti} \text{ costanti.}$$

$\Rightarrow$ ~~Si~~ trova $v(t) \Longrightarrow y(x) = v(\ln x)$

$$x^2 y'' - x y' + y = 5x \qquad (E) \qquad x > 0.$$

$$v(t) = y(e^t) \qquad y(x) = v(\ln x)$$

$$y'(x) = \frac{v'(\ln x)}{x} \; , \quad y''(x) = \frac{v'' - v'}{x^2}$$

$$v'' - v' - v' + v = 5e^t \qquad v = v(t)$$

$$v'' - 2v' + v = 5e^t \qquad (E')$$

$$v'' - 2v' + v = 0 \qquad (E'_0)$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \implies \lambda = 1 \quad \text{molt. } 2.$$

Int. di (E'_0) $\qquad v(t) = e^t(c_1 + c_2 t)$

Cerco una v_p sol^{ne} part. di (E')

$$v_p(t) = A t^2 e^t \implies v_p'(t) = A e^t (t^2 + 2t)$$

$$v_p''(t) = A e^t (t^2 + 2t + 2t + 2)$$

$$A(\cancel{t^2} + \cancel{4t} + 2) - 2A(\cancel{t^2} + \cancel{2t}) + \cancel{At^2} = 5 \qquad A = \frac{5}{2}$$

Int. generale di (E')

$$v(t) = e^t\left(c_1 + c_2 t + \frac{5}{2} t^2\right) \implies$$

$$\implies y(x) = v(\ln x) = x\left(c_1 + c_2 \ln x + \frac{5}{2} \ln^2 x\right)$$

Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} u' - 2u + 3v = 1 \\ v' - u + 2v = \dfrac{1}{1+e^x} \end{cases}$$

nelle incognite $u(x), v(x)$

$$v = -\frac{u'}{3} + \frac{2u}{3} + \frac{1}{3}$$

Derivo la prima

$$u'' - 2u' + 3v' = 0$$

$$v' = u - 2v + \frac{1}{1+e^x}$$

$$u'' - 2u' + 3u - 6v + \frac{3}{1+e^x} = 0$$

$$u'' - 2u' + 3u + 2u' - 4u - 2 + \frac{3}{1+e^x} = 0$$

lineare coeff.ti costanti $\Longrightarrow$ si risolve.