- Domani tutoraggio 17:30 $\rightarrow$ 19:00
  Aula 16

Eq^{ni} differenziali lineari.

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)\, y^{(n-2)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x) \quad (E)$$

$$\text{'' \quad '' \quad '' \quad '' } = 0 \quad (E_0)$$

eq^{ne} omogenea.

$a_0(x), \dots, a_{n-1}(x), f(x) \in C^0(I)$, I intervallo di $\mathbb{R}$.

Per il teorema di esistenza e unicità globale per il pb. di Cauchy, ogni soluzione di (E), (E_0) è definita su tutto I.

TEOREMA (Integrale generale di (E_0))

L'integrale generale di (E_0), cioè l'insieme di tutte le sol^{ni} di (E_0), costituisce un sottospazio vettoriale di $C^n(I)$, che ha dimensione n (ordine dell'eq^{ne}).

Ne segue che, una volta trovate n soluzioni lin. indipendenti $y_1(x), \dots, y_n(x)$ di (E_0), ogni altra sol^{ne} di (E_0) sarà della forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

Dim. (per semplicità di notazione, prendiamo $n=2$)

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \qquad (E_0)$$

Ricordo il teorema di esistenza e unicità globale per il pb. di Cauchy.

Il problema:

$$(P)\quad \begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y(x_0) = \bar{y}_0 \\ y'(x_0) = \bar{y}_1 \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $y(x) \in C^2(I)$ $\forall x_0 \in I$, $\forall \bar{y}_0, \bar{y}_1 \in \mathbb{R}$.

Per dim. che l'int. generale di (E_0) è un sottosp. di $C^2(I)$ di dim. 2 devo

1) trovare due sol^{ni} lin. indipendenti;
2) data una qualsiasi sol^{ne} di (E_0), mostro che è combinaz. lineare delle due sol^{ni} trovate al pto 1).

1) Fisso $x_0 \in I$, e risolvo i seguenti due pb. di Cauchy.

$$(P_1)\quad \begin{cases} y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0 \\ y_1(x_0) = 1 \\ y_1'(x_0) = 0 \end{cases} \qquad (P_2)\quad \begin{cases} y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0 \\ y_2(x_0) = 0 \\ y_2'(x_0) = 1 \end{cases}$$

Proviamo che $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono lin. indip.

Supponiamo che $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ siano t.c.

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0 \qquad \forall x \in I.$$

Voglio provare che $c_1 = c_2 = 0$.

$$(P_1)\begin{cases} y_1'' + a_1(x) y_1' + a_0(x) y_1 = 0 \\ y_1(x_0) = 1 \\ y_1'(x_0) = 0 \end{cases} \qquad (P_2)\begin{cases} y_2'' + a_1(x) y_2' + a_0(x) y_2 = 0 \\ y_2(x_0) = 0 \\ y_2'(x_0) = 1 \end{cases}$$

Proviamo che $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono lin. indip.
Supponiamo che $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ siano t.c.

$$(*) \qquad y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \equiv 0 \qquad \forall x \in I.$$

Voglio provare che $c_1 = c_2 = 0$.

$$0 = y(x_0) = c_1 \underbrace{y_1(x_0)}_{=1} + c_2 \underbrace{y_2(x_0)}_{=0} = c_1$$

Derivando $(*)$, si ottiene $y'(x) = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x) \equiv 0$

$$0 = y'(x_0) = c_1 \underbrace{y_1'(x_0)}_{=0} + c_2 \underbrace{y_2'(x_0)}_{=1} = c_2$$

2) Sia $y(x)$ una sol^{ne} di (E_0). $y(x)$ è l'unica sol^{ne} di

$$(P) \quad \begin{cases} y''(x) + a_1(x)y'(x) + a_0(x)\,y(x) = 0 \\ y(x_0) = y(x_0) \\ y'(x_0) = y'(x_0) \end{cases}$$

Ora considero la funzione $\tilde{y}(x) = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) =$

dove $c_1 = y(x_0)$, $c_2 = y'(x_0)$ $\qquad = y(x_0)\, y_1(x) + y'(x_0)\, y_2(x)$

Voglio provare che $y(x)$ e $\tilde{y}(x)$ sono la stessa funzione.

$\tilde{y}(x)$ verifica il seguente pb. di Cauchy

$$\begin{cases} \tilde{y}'' + a_1(x)\,\tilde{y}' + a_0(x)\,\tilde{y} = 0 \\ \tilde{y}(x_0) = y(x_0)\,\overbrace{y_1(x_0)}^{1} + y'(x_0)\,\overbrace{y_2(x_0)}^{0} = y(x_0) \\ \tilde{y}'(x_0) = y(x_0)\,\underbrace{y_1'(x_0)}_{=0} + y'(x_0)\,\underbrace{y_2'(x_0)}_{=1} = y'(x_0) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $y(x)$ e $\tilde{y}(x)$ sono sol^{ni} dello stesso pb. di Cauchy

$\Rightarrow$ per l'unicità, si ha $y(x) \equiv \tilde{y}(x)$

Quindi $y(x)$ è comb. lin. di $y_1(x)$ e $y_2(x)$. $\boxed{\not{E}}$

Si generalizza immediatamente all'ordine n.

TEOREMA (Int. generale di (E))

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)\, y^{(n-2)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y = f(x) \quad (E)$$

$$\quad '' \qquad '' \qquad '' \qquad '' \qquad = 0 \quad (E_0)$$

eq^ne omogenea.

Supponiamo di aver trovato <u>una</u> sol^ne particolare $y_p(x)$ di (E).
Allora l'integrale generale di (E) è dato da

$$y(x) = y_p(x) + z(x)$$

dove $z(x)$ è il generico elemento dell'int. generale di (E_0)

cioè

$$y(x) = y_p(x) + c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \dots + c_n\, y_n(x)$$

dove $y_1(x), \dots y_n(x)$ sono n sol^ni lin. indip. di (E_0),
e $c_1, c_2, \dots c_n$ sono arbitrari numeri reali.

ESEMPIO

$$y''(x) + 4y(x) = 3 \qquad (E)$$

$$y'' + 4y = 0 \qquad (E_0)$$

N.B. è a coeff^{ti} costanti

$$\Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \qquad \Rightarrow \lambda = \pm 2i$$

Int. generale di (E_0)

$$z(x) = c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x)$$

OSS $\quad y_p(x) \equiv \dfrac{3}{4}$ è sol^{ne} di (E) si vede a occhio!

$\Rightarrow$ L'int. generale di (E) è dato da

$$y(x) = \frac{3}{4} + c_1 \cos(2x) + c_2 \operatorname{sen}(2x).$$

DIM. TEOREMA Sia $y_p(x)$ una sol^{ne} part. di (E)

Sia $z(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$ la generica sol^{ne} di (E_0)

Devo provare:

1) $y(x) = y_p(x) + z(x)$ è ancora sol^{ne} di (E)

2) Se $y(x)$ è una <u>generica</u> sol^{ne} di (E), allora $y(x) - y_p(x)$ è sol^{ne} di (E_0).

Poniamo $L(y) = y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y$

L manda $C^n(I)$ in $C^0(I)$, ed è lineare

$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$; $L(c\, y) = c\, L(y)$

<u>Dim. 1)</u> $L(y_p + z) = \underbrace{L(y_p)}_{= f(x)} + \underbrace{L(z)}_{= 0} = f(x)$

cioè $y_p(x) + z(x)$ è sol^{ne} di (E)

Dim. 2)

Sia $y(x)$ una qualsiasi sol^ne di (E) $\Rightarrow L(y) = f$

$$L(y - y_p) = \underbrace{L(y)}_{= f} - \underbrace{L(y_p)}_{= f} = 0.$$

$\Rightarrow y(x) - y_p(x)$ è sol^ne di (E_0).

$\square$

Trovare l'integrale generale di

$$y'' + 6y' + 8y = e^x \qquad (E)$$

eq^{ne} lineare del 2° ordine a coeff^{ti} costanti

$$y'' + 6y' + 8y = 0 \qquad (E_0)$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0 \qquad \lambda = -4,\ \lambda = -2$$

$\Rightarrow$ int. generale di (E_0)

$$z(x) = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{-2x}$$

Ricerca di una sol^{ne} particolare di (E) $\Rightarrow$ la cerchiamo nella forma

$$y_p(x) = A e^x = y_p'(x) = y_p''(x)$$

(E) diventa $\qquad A\cancel{e^x} + 6A\cancel{e^x} + 8A\cancel{e^x} = \cancel{e^x}\ 1$

ok se $A = \frac{1}{15}$. $\Rightarrow y_p(x) = \frac{e^x}{15}$

Int. generale di (E)

$$y(x) = \frac{e^x}{15} + c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-4x}.$$

Metodo di "somiglianza" per la ricerca di una sol^{ne} particolare di (E). – solo per eq^{ni} a coeff^{ti} costanti.

$$y'' + 6y' + 8y = (5x^2+6x)e^{3x} \overset{\text{cerco}}{\Longrightarrow} y_p(x) = (Ax^2+Bx+C)e^{3x}$$

$$\Rightarrow y_p'(x) = e^{3x}(2Ax+B+3Ax^2+3Bx+3C)$$

$$y_p''(x) = e^{3x}(2A+6Ax+3B+6Ax+3B+9Ax^2+9Bx+9C)$$

(E) diventa:

$$2A+\underline{6Ax}+3B+\underline{6Ax}+3B+9Ax^2+\underline{9Bx}+9C+\underline{12Ax}+6B+18Ax^2+\underline{18Bx}+18C+$$
$$+8Ax^2+\underline{8Bx}+8C = 5x^2+6x$$

$$\begin{cases} 9A+18A+8A = 5 \qquad \Longrightarrow \qquad A = \dfrac{5}{35} = \dfrac{1}{7} \\ \cancel{12A+9B+12A+18B+8B=6} \\ 35B = 6-24A = 6-\dfrac{24}{7} = \dfrac{18}{7} \Longrightarrow B = \dfrac{18}{245} \\ 2A+3B+3B+9C+6B+18C+8C = 0 \end{cases}$$

$$35C = -\frac{2}{7} - \frac{12\cdot 18}{245} \Longrightarrow C = -\frac{286}{35\cdot 245} = -\frac{286}{8575}$$

$$y_p(x) = \left(\frac{x^2}{7} + \frac{18}{245}x - \frac{286}{8575}\right)e^{3x}$$

$$y(x) = \left(\ '' \quad '' \quad '' \quad ''\ \right)e^{3x} + c_1e^{-2x} + c_2e^{-4x}$$

Regola generale: se il secondo membro dell'equazione è del tipo $P_k(x)\,e^{\alpha x}$, con $P_k(x)$ polinomio di grado k, si cerca una sol^{ne} dello stesso tipo.

Con una eccezione! $\longrightarrow$

$$y'' + 6y' + 8y = 3e^{-2x}$$

Cerco $y_p(x) = Ae^{-2x} \Rightarrow y_p'(x) = -2Ae^{-2x}$, $y_p''(x) = 4Ae^{-2x}$

$4A - 12A + 8A = 3$ impossibile

Giusto, perché Ae^{-2x} è sempre sol^{ne} di (E_0), non di (E).

Si deve cercare $y_p(x)$ della forma $y_p(x) = Ax\, e^{-2x}$

$y_p' = Ae^{-2x}(1-2x)$, $y_p'' = Ae^{-2x}(-2-2+4x)$

$$A(-4+\cancel{4x}) + 6A(1-\cancel{2x}) + \cancel{8Ax} = 3$$

$-4A + 6A = 3$ $\quad A = \frac{3}{2} \Rightarrow y_p(x) = \frac{3}{2}xe^{-2x}$

$\Rightarrow$ int generale $\quad y_p(x) = \frac{3}{2}xe^{-2x} + c_1e^{-2x} + c_2e^{-4x}$.

$$y'' + 6y' + 8y = 4\cos(3x)$$

cerco $y_p(x) = A\cos(3x) + B\,\text{sen}(3x)$

$y_p'(x) = -3A\,\text{sen}(3x) + 3B\cos(3x)$

$y_p''(x) = -9A\cos(3x) - 9B\,\text{sen}(3x)$

$$-9A\cos(3x) - 9B\,\text{sen}(3x) - 18A\,\text{sen}(3x) + 18B\cos(3x) +$$

$$+ 8A\cos(3x) + 8B\,\text{sen}(3x) = 4\cos(3x)$$

$$\begin{cases} -9A + 18B + 8A = 4 \\ -9B - 18A + 8B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -A + 18B = 4 \\ -18A - B = 0 \end{cases}$$

$$B = -18A \implies -A - 324A = 4 \implies A = \frac{4}{325}$$

$$B = -\frac{72}{325}$$