Pb. di Cauchy per eq^{ni} di ordine ≥ 2.

in forma "normale"

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = \bar{y}_0 \\ y'(x_0) = \bar{y}_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \bar{y}_{n-1} \end{cases} \quad (P)$$

condizioni iniziali

aperto

$$f(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_0, \bar{y}_0, \bar{y}_1 \dots \bar{y}_{n-1}) \in A$$

Una sol^{ne} di (P) è una funzione $y(x)$ definita su un intervallo I contenente x_0, di classe $C^n(I)$ verificante le cond^{ni} iniziali, t.c. $\forall x \in I$ $(x, y(x), y'(x) \dots y^{(n-1)}(x)) \in A$
e t.c. l'eq^{ne} $y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$ sia vera $\forall x \in I$

$$
\begin{cases}
y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}) \\
y(x_0) = \bar{y}_0 \\
y'(x_0) = \bar{y}_1 \\
\vdots \\
y^{(n-1)}(x_0) = \bar{y}_{n-1}
\end{cases}
\qquad (P).
$$

Trasformiamo (P) in un <u>sistema</u> del 1° ordine.

Poniamo

$$
\begin{aligned}
y_0(x) &= y(x) \\
y_1(x) &= y'(x) \\
y_2(x) &= y''(x) \\
&\dots \\
y_{n-1}(x) &= y^{(n-1)}(x)
\end{aligned}
\implies
$$

L'eq^{ne} diventa

$$
\begin{cases}
y'_{n-1}(x) = f(x, y_0(x), y_1(x), \dots, y_{n-1}(x)) \\
y'_{n-2}(x) = y_{n-1}(x) \\
\dots \\
y'_0(x) = y_1(x)
\end{cases}
$$

$+$ C.I.

$$\begin{cases} y'_{n-1}(x) = f(x, y_0(x), y_1(x), \ldots, y_{n-1}(x)) \\ y'_{n-2}(x) = y_{n-1}(x) \\ \ldots\ldots \\ y'_0(x) = y_1(x) \\ + \text{ C.I.} \end{cases}$$

Poniamo $\underline{Y}(x) = (y_0(x), y_1(x) \ldots y_{n-1}(x)) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Il sistema di prima si può scrivere così:

$$\underline{Y}'(x) = \underline{F}(x, \underline{Y}(x))$$

dove $\underline{F} : A \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$$(x, \underline{Y}) \longmapsto F(x, \underline{Y}) = (F_0(x, \underline{Y}), F_1(\ ), \ldots F_{n-1}(\ ))$$

dove

$$F_0(x, \underline{Y}) = y_1, \quad F_1(x, \underline{Y}) = y_2 \ldots$$

$$F_{n-2}(x, \underline{Y}) = y_{n-1} \quad ; \quad F_{n-1}(x, \underline{Y}) = f(x, \underline{Y})$$

le c.i. sono diventate. $\underline{Y}(x_0) = \overline{\underline{Y}} = (\overline{y}_0, \overline{y}_1 \ldots \overline{y}_{n-1})$

In definitiva il nostro pb. di Cauchy si è trasformato formalmente nell'eq^{ne} vettoriale

$$(P') \begin{cases} \underline{Y}'(x) = F(x, \overline{Y}(x)) \\ \underline{Y}(x_0) = \overline{\underline{Y}} \end{cases}$$

Si tratta di fare un minimo di teoria dei pb. di Cauchy per sistemi.

TEOREMA DI CAUCHY (Esistenza e unicità in piccolo) (per sistemi)

$$(P) \quad \begin{cases} \underline{Y}' = \underline{F}(x, \underline{Y}) \\ \underline{Y}(x_0) = \underline{Y}_0 \end{cases}$$

$\underline{F} : I \times J \to \mathbb{R}$ $\quad I = [x_0 - a, x_0 + a]$

$J = \overline{B_r(\underline{Y}_0)} = \{ \underline{Y} \in \mathbb{R}^N \text{ t.c. } \|\underline{Y} - \underline{Y}_0\| \leq r \}$

1) $\underline{F}$ continua in $I \times J$

2) $\underline{F}$ lipschitziana rispetto a $\underline{Y}$, unif^{te} in x

$$\|\underline{F}(x, \underline{Y}_1) - \underline{F}(x, \underline{Y}_2)\| \leq L \|\underline{Y}_1 - \underline{Y}_2\| \quad \forall \underline{Y}_1, \underline{Y}_2 \in J \quad \forall x \in I$$

OSS 1) e 2) sono vere se $\underline{F} \in C^1(I \times J)$

Allora $\exists$ intervallo $I_0 = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subset I$ ed $\exists !$ $\underline{Y}(x) \in C^1(I_0; J)$ sol^{ne} di (P)

$$
(P)\quad \begin{cases} y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = \bar{y}_0 \\ y'(x_0) = \bar{y}_1 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = \bar{y}_{n-1} \end{cases}
$$

Applicazione al problema (P) di ordine n:
se $f : I \times J$, $J = \overline{B_r(\underline{Y}_0)}$

continua e lipschitziana (nella $\underline{Y}$), allora (P) ammette un'unica sol^{ne} in un "piccolo" intervallo.

ok se (per es.) $f \in C^1$

Teorema di esistenza globale ("in grande") per il pb. di Cauchy.

$$(P) \begin{cases} \underline{Y}' = \underline{F}(x,\underline{Y}) \\ \underline{Y}(x_0) = \underline{Y}_0 \end{cases} \qquad \underline{F} : I \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \quad I \text{ intervallo.}$$

1) $\underline{F}$ continua in $I \times \mathbb{R}^n$

2) $\underline{F}$ localmente lipschitziana nella variabile $\underline{Y}$, cioè:

$\forall [a,b] \subset I$, $\forall M > 0$ $\exists L = L(M, a, b)$ t.c.

$$\|\underline{F}(x, \underline{Y}_1) - \underline{F}(x, \underline{Y}_2)\| \leq L \|\underline{Y}_1 - \underline{Y}_2\| \qquad \forall x \in [a,b] \quad \forall Y_1, Y_2 \text{ di norma } \leq M$$

OSS Questo è vero, per esempio, se $\underline{F}$ è di classe C^1.

3) $\underline{F}$ a crescita lineare risp. alla $\underline{Y}$

$$\|\underline{F}(x,\underline{Y})\| \leq M(x)\,(1 + \|\underline{Y}\|) \qquad \forall (x, \underline{Y}) \in I \times \mathbb{R}^n$$

$M(x)$ continua

Allora, $\forall x_0 \in I$, $\forall \underline{Y}_0 \in \mathbb{R}^n$ $\exists!$ sol^{ne} (globale!) di (P), definita su tutto l'intervallo I. Vero anche se $I = \mathbb{R}$.

$$
\begin{cases}
y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots y^{(n-1)}) \\
y(x_0) = \bar{y}_0 \\
y'(x_0) = \bar{y}_1 \\
\vdots \\
y^{(n-1)}(x_0) = \bar{y}_{n-1}
\end{cases}
\qquad (P).
$$

Il teorema di esistenza e unicità globale per il pb. di Cauchy (P) vale sotto le ipotesi:

1) f continua in $I \times \mathbb{R}^n$
2) f localmente Lipschitziana nella $\underline{Y}$ (vero se $f \in C^1$)
3) $|f(x, \underline{Y})| \leq M(x)(1 + \|\underline{Y}\|)$. $M(x)$ continua

$\Rightarrow$ allora $\exists!$ sol.^{ne} $y(x)$ di (P) definita su tutto I.

Eq^{ni} lineari di ordine n

$$(E) \quad y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = b(x)$$

$$(E_0) \quad y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = 0$$

(eq^{ne} omog. associata).

OSS Rientra nei casi precedenti, con

$$f\left(x, y(x) \dots y^{(n-1)}(x)\right) = -a_{n-1}(x) y^{(n-1)}(x) - \dots - a_0(x) y(x) - b(x)$$

Supponiamo che le funzioni $a_0(x), a_1(x) \dots a_{n-1}(x), b(x)$ siano continue in un intervallo I.
L'eq^{ne} verifica le ipotesi del teorema di esistenza globale.

$\Rightarrow \forall$ cond^{ne} iniziale $\quad y(x_0) = y_0, \dots \; y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$

con $x_0 \in I$, $(y_0, \dots y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$

$\exists !$ sol^{ne} definita su tutto I.

$$(E_0)\quad y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = 0$$

(eq^{ne} omog. associata.

~~Stesse ipotesi di prima.~~

TEOREMA.

L'integrale generale di (E_0) è uno sp. vettoriale di dim n. (sottospazio di $C^n(I)$).

In particolare, se trovo n sol^{ni} di (E_0) linearmente indipendenti (cioè n soluzioni $y_1(x) \dots y_n(x)$ t.c.

se $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x) \equiv 0$

allora $c_1 = c_2 = \dots c_n = 0$.),

allora ogni soluzione di (E_0) sarà della forma

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

con $c_1, c_2, \dots c_n \in \mathbb{R}$. arbitrari.

Eq^{ni} lineari omogenee a coeff^{ti} costanti

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}\, y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0 \qquad (E_0)$$

$a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$

$$y''(x) - y(x) = 0 \qquad (E_0)$$

Cerco soluz.^{ni} della forma $y(x) = e^{\lambda x}$

$y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $\quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$

L'eq^{ne} (E_0) diventa

$$\lambda^2 e^{\lambda x} - e^{\lambda x} = 0 \iff \lambda^2 - 1 = 0 \iff \lambda = \pm 1$$

$y_1(x) = e^{x}$ $\qquad y_2(x) = e^{-x}$ $\qquad$ sono sol^{ni} di (E_0) lin. indipendenti

(Infatti, se fosse $\quad c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} \equiv 0 \quad$ su $\mathbb{R}$.

Prendo $x = 0 \Rightarrow$
$x = 1 \Rightarrow$
$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e + c_2 e^{-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0.)$$

Int. generale di (E_0): $\quad y(x) = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x}$

$$y''(x) + 2y'(x) - 3y(x) = 0.$$

$$y(x) = e^{\lambda x} \Rightarrow y'(x) = \lambda e^{\lambda x}, \quad y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \cancel{e^{\lambda x}} + 2\lambda \cancel{e^{\lambda x}} - 3 \cancel{e^{\lambda x}} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0 \qquad \lambda = -3 \quad \lambda = 1.$$

$y_1(x) = e^x \quad y_2(x) = e^{-3x}$ sono sol^{ni} (lin. ind.)

Integrale generale $\quad y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$

Riassunto. Per un' eq^{ne} lineare omogenea a coeff. costanti del 2° ordine si cercano sol^{ni} della forma $e^{\lambda x}$ $\Longrightarrow$ si ottiene un' eq^{ne} algebrica di 2° grado

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \xrightarrow[y(x) = e^{\lambda x}]{} \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad \text{(EA)}$$

eq^{ne} algebrica associata.

Si risolve (EA).

1) Le radici di (EA) sono reali e distinte $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\Rightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

2) (EA) ha due radici reali e coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$\Longrightarrow y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} = e^{\lambda_1 x}(c_1 + c_2 x)$$

3) (EA) ha due radici complesse coniugate $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \operatorname{sen} \beta x$$

$(E_0)\quad y'' + 2y' + y = 0 \quad \underset{EA}{\Longrightarrow} \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$

$$\overset{\shortparallel}{(\lambda+1)^2}$$

$\lambda = -1$ radice doppia

$y_1(x) = e^{-x} \qquad\qquad y_2(x) = xe^{-x}$

$y_2'(x) = e^{-x}(1-x)\ , \quad y_2''(x) = e^{-x}(-1-1+x) = e^{-x}(x-2)$

$(E_0)\qquad (\cancel{x}-\cancel{2})e^{-x} + 2e^{-x}(\cancel{1}-\cancel{x}) + \cancel{xe^{-x}} \overset{?}{=} 0 \qquad$ vero!

$(E_0)\quad y''(x) + 4y(x) = 0 \quad \underset{(EA)}{\Longrightarrow} \quad \lambda^2 + 4 = 0$

$y(x) = e^{\lambda x}$

$\Downarrow$

$\lambda = \pm 2i$

formalmente

$y_1(x) = e^{2ix}$ e $y_2(x) = e^{-2ix}$

sono sol^{ni} di (E_0)

$$y_1(x) = e^{2ix} = \cos(2x) + i\,\mathrm{sen}(2x)$$
$$y_2(x) = e^{-2ix} = \cos(2x) - i\,\mathrm{sen}(2x)$$

sol^{ni}.

$\Rightarrow$ se sommo e divido per 2, ottengo che $\cos(2x)$ è una sol^{ne}

se sottraggo e divido per $2i$, ottengo che $\mathrm{sen}(2x)$ è una sol^{ne}.

lin. ind.

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2\,\mathrm{sen}\,2x = A\cos(2x + \varphi)$$