Equazioni differenziali

$$(E) \quad y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)$$

$a(x), b(x) \in C^0(I)$ date

I intervallo di $\mathbb{R}$.

Una soluzione di questa eq. è una funzione $y(x) \in C^1(I)$ che verifica (E) $\forall x \in I$

Un'eq^{ne} del tipo (E) si dice equaz. diff lineare, del 1° ordine

in quanto l'operatore
$$L : C^1(I) \longrightarrow C^0(I)$$
$$y(x) \longmapsto y'(x) - a(x)\,y(x)$$
è lineare.

$$L(\alpha y + \beta z) = \alpha L(y) + \beta L(z) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \forall y, z \in C^1(I)$$

Con questa notazione l'eq^{ne} (E) si scrive

$$(E) \quad L(y)(x) = b(x)$$

Esempio: $\quad y'(x) = -\dfrac{y(x)}{x} + e^x \qquad I = (0, +\infty)$

$\hookrightarrow a(x) = -\dfrac{1}{x}$; $\quad b(x) = e^x$

(E) $y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)$

(E₀) $y'(x) = a(x)\,y(x)$ eq^ne omogenea associata ad (E).

Obiettivo trovare tutte le soluzioni (integrale generale) di (E) e (E₀)

Studio di (E₀)

Una soluzione di (E₀) non nulla si vede subito; se la cerchiamo nella forma

$$y(x) = e^{A(x)} \Rightarrow y'(x) = A'(x)\,e^{A(x)}$$

L'eq^ne diventerebbe $A'(x)\,\cancel{e^{A(x)}} = a(x)\,\cancel{e^{A(x)}}$

Basta prendere $A(x) = \int a(x)\,dx$, cioè $A(x)$ primitiva di $a(x)$.

Osserviamo che anche $y(x) = c\,e^{A(x)}$, con $A(x)$ primitiva di $a(x)$

è soluzione di (E₀) ⇒ abbiamo trovato ∞ sol^ni di (E₀).

Ce ne sono altre? NO. Infatti, sia $z(x)$ una soluzione di (E₀). Considero la funzione $u(x) = z(x)\,e^{-A(x)}$

$$u'(x) = z'(x)\,e^{-A(x)} - z(x)\,a(x)\,e^{-A(x)} =$$

$$= e^{-A(x)}\underbrace{\left[z'(x) - z(x)a(x)\right]}_{=0} \equiv 0 \quad \text{in } I$$

$\Rightarrow u(x) \equiv$ costante $\Rightarrow z(x) = \text{cost.}\,e^{A(x)}$

Quindi abbiamo trovato l'integrale generale di (E₀)

$(E_0)\quad y'(x) = a(x)\, y(x)$

TEOREMA Sia $a(x) \in C^0(I)$. Allora l'integrale generale di (E_0) è dato da

$$y(x) = c\, e^{A(x)},$$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$, e c è una costante reale arbitraria.

OSS abbiamo provato che l'insieme delle soluzioni di (E_0) è un sottospazio vettoriale di dimensione 1 di $C^1(I)$

Esercizio Trovare l'integrale generale di

$$(E_0)\quad y'(x) = -\frac{y(x)}{x} \qquad \text{in } (0,+\infty)$$

$$a(x) = -\frac{1}{x} \Rightarrow A(x) = \int\left(-\frac{1}{x}\right)dx = -\ln x \quad (+c)$$

$\Rightarrow$ integrale generale di (E_0) $\quad y(x) = c\, e^{-\ln x} = \dfrac{c}{x}$

2^a parte - risoluzione di

$$(E) \quad y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)$$

Supponiamo di conoscere una sol^{ne} particolare di (E), sia essa $y_p(x)$

Sia ora $y(x)$ un'altra sol^{ne} di (E).

Considero $z(x) = y(x) - y_p(x)$.

$$z'(x) = y'(x) - y_p'(x) = \left(a(x)\,y(x) + \cancel{b(x)}\right) - \left(a(x)\,y_p(x) + \cancel{b(x)}\right)$$

$$= a(x)\left(y(x) - y_p(x)\right) = a(x)\,z(x)$$

$\Rightarrow$ la differenza di due qualsiasi soluzioni di (E) risolve (E_0) $\Longrightarrow$ sappiamo calcolarla.

Viceversa, se prendiamo una soluzione particolare $y_p(x)$ di (E) e le sommiamo una qualsiasi soluzione di (E_0) (sia $z(x)$) allora la nuova funzione

$y(x) = y_p(x) + z(x)$ verifica (E)

Infatti

$$y'(x) = y_p'(x) + z'(x) = a(x)\,y_p(x) + b(x) + a(x)\,z(x) =$$

$$= a(x)\,y(x) + b(x)$$

TEOREMA Siano $a(x), b(x) \in C^0(I)$. L'integrale generale di

$$(E) \quad y'(x) = a(x)\,y(x) + b(x)$$

è costituito da tutte e sole le funzioni della forma

$$y(x) = y_p(x) + z(x) = y_p(x) + c\,e^{A(x)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

dove $z(x) = c\,e^{A(x)}$ è una soluzione qualsiasi dell'eq.ne omog. associata

$$(E_0) \quad z'(x) = a(x)\,z(x)$$

$$A(x) = \int a(x)\,dx$$

Resta il pb. di trovare una sol^{ne} particolare $y_p(x)$.

Si cerca una soluzione nella forma

$$y_p(x) = c(x)\, e^{A(x)}$$

metodo di variazione delle costanti

Cerchiamo $c(x)$ in modo che $y_p(x)$ sia sol^{ne} di (E)

$$y_p'(x) = c'(x)\, e^{A(x)} + c(x)\, a(x)\, e^{A(x)}$$

(E) diventa

$$c'(x)\, e^{A(x)} + \cancel{c(x)\, a(x)\, e^{A(x)}} = \cancel{c(x)\, a(x)\, e^{A(x)}} + b(x)$$

$$c'(x) = b(x)\, e^{-A(x)} \Rightarrow c(x) = \int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx$$

$(E)\quad y'(x) = -\dfrac{y(x)}{x} + e^x$

$(E_0) = \quad z'(x) = -\dfrac{z(x)}{x} \iff z(x) = \dfrac{c}{x}$

Cerco una sol^{ne} particolare di (E)

$$y_p(x) = \frac{c(x)}{x}$$

$$y_p'(x) = \frac{c'(x)}{x} - \frac{c(x)}{x^2}$$

$$(E) \iff \frac{c'(x)}{x} - \cancel{\frac{c(x)}{x^2}} = -\cancel{\frac{c(x)}{x^2}} + e^x$$

$$c'(x) = x e^x$$

$$c(x) = \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x$$

$$y_p(x) = \frac{(x-1)e^x}{x}$$

Integrale generale di (E)

$$y(x) = y_p(x) + z(x) = \frac{(x-1)e^x}{x} + \frac{c}{x} = \frac{(x-1)e^x + c}{x}$$

int. generale di (E_0)

$c \in \mathbb{R}$

In molte situazioni l'eq^{ne} differenziale è associata ad una condizione iniziale, per esempio

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y(x)}{x} + e^x \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Problema di Cauchy

Esempio "concreto"

$$(P) \quad \begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y(x)}{x} + e^x \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

$$y(x) = \frac{(x-1)e^x + c}{x}$$

Impongo $y(1) = 2 \Rightarrow c = 2$.

La sol^{ne} del pb. di Cauchy (P) è data data da

$$y(x) = \frac{(x-1)e^x + 2}{x}$$

TEOREMA Siano $a(x), b(x) \in C^0(I)$.
L'integrale generale dell'eq^{ne}

$$(E) \qquad y'(x) = a(x)\, y(x) + b(x)$$

è dato da

$$y(x) = c e^{A(x)} + e^{A(x)} \int b(x) e^{-A(x)} dx$$

$$= e^{A(x)} \left[c + \int b(x) e^{-A(x)} dx \right]$$

dove $A(x) = \int a(x) dx$, e c è una costante arbitraria.

$$(P)\begin{cases} y' + y \operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\sin x} \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \qquad I = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a(x) = -\operatorname{tg} x$$

$$b(x) = \frac{1}{\sin x}$$

$$A(x) = -\int \operatorname{tg} x \, dx = -\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \ln|\cos x| \qquad (+c)$$

$$= \ln(\cos x)$$

$$y(x) = \cos x \left(c + \int \frac{1}{\operatorname{sen} x} \frac{1}{\cos x} dx \right)$$

meglio sost. $t = \operatorname{tg} x$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\operatorname{sen} x \cos^2 x} = \int \frac{\cos x \, dx}{\operatorname{sen} x (1 - \operatorname{sen}^2 x)} = \begin{cases} \operatorname{sen} x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{cases}$$

$$= \int \frac{dt}{t(1-t^2)} = \int \left(\frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t} \right) dt = \ln t - \frac{1}{2}\ln(1-t) - \frac{1}{2}\ln(1+t) =$$

$$\frac{1}{t(1-t^2)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1-t} + \frac{C}{1+t}$$

$$= \ln \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \ln \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} =$$

$$= \ln \operatorname{tg} x$$

$$1 = A(1-t^2) + Bt(1+t) + Ct(1-t)$$

$$\begin{cases} 0 = -A + B - C \\ 0 = B + C \\ 1 = A \end{cases} \qquad -B = C \qquad 2B = 1 \qquad B = \frac{1}{2} \quad C = -\frac{1}{2} \quad A = 1$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \cos x} = \int \frac{dx}{\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)\cos^2 x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \ln \operatorname{tg} x$$

$$y(x) = \cos x \left(c + \ln(\operatorname{tg} x)\right)$$

$$y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(c) = 1 \implies c = \sqrt{2}.$$

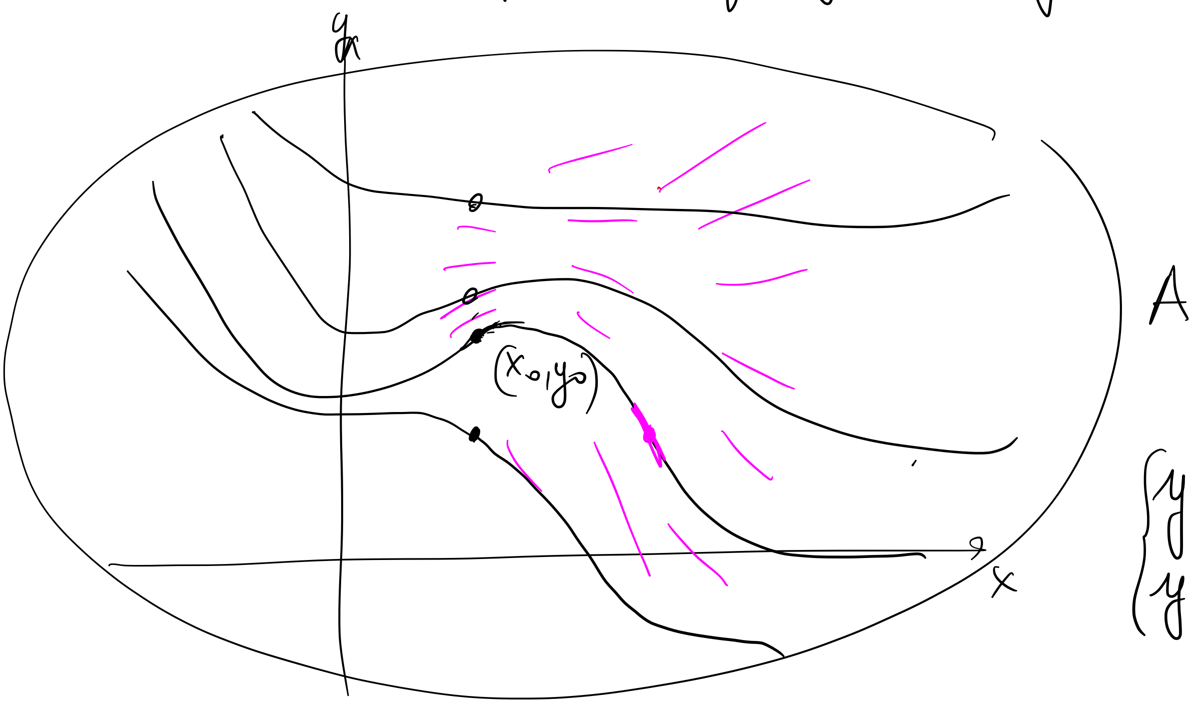
$$y(x) = \sqrt{2}\cos x + \cos x \ln(\operatorname{tg} x).$$

<u>Interpretazione</u> di un pb. di Cauchy per un'eqne del 1°ordine in forma "normale"

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

dove $f(x,y)$ è una funzione definita in un certo sottoins. A di $\mathbb{R}^2$.

Nel caso di prima $f(x,y) = a(x)y + b(x)$ definita in $I \times \mathbb{R}$



$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$