DEF $f : \underset{\text{aperto}}{A \subset \mathbb{R}^N} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \underline{x}^\circ \in A$.

f si dice differenziabile in $\underline{x}^\circ$ se $\exists\, \nabla f(\underline{x}^\circ)$ e si ha

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}^\circ) + \nabla f(\underline{x}^\circ) \cdot (\underline{x} - \underline{x}^\circ) + o(\|\underline{x} - \underline{x}^\circ\|)$$

per $\underline{x} \to \underline{x}^\circ$

Thm. visti ieri:

f differenziabile in $\underline{x}^\circ \Rightarrow f$ continua in $\underline{x}^\circ$

f " " " $\Rightarrow \exists\, \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}^\circ) = \nabla f(\underline{x}^\circ) \cdot \underline{v}$

$\Rightarrow \nabla f$ indica la direzione di massima "salita"

Conviene utilizzare un concetto più "forte" della differenziabilità, ma più facile da verificare

DEF. f si dice di classe $C^1(A)$, dove A è un aperto di $\mathbb{R}^N$, se in ogni punto di A esistono le derivate parziali di f, e queste sono funzioni continue in A. $\quad f \in C^1(A)$

Per es. $\quad f(x,y) = \operatorname{sen}(x^2 y)\, e^{x^2+1} \in C^1(\mathbb{R}^2)$

TEOREMA (del differenziale totale)

Se $f \in C^1(A)$, allora f è differenziabile in ogni punto di A.

$$f \in C^1(A) \;\Rightarrow\; f \text{ differenziabile in } A \;\Rightarrow\; \begin{cases} f \text{ continua in } A \\ f\in C(A),\ f \in C^0(A) \end{cases}$$

$$f \text{ differenziabile in } A \;\Rightarrow\; f \text{ derivabile in } A$$

$$f \in C^1(A) \;\not\Leftarrow\; f \text{ differenziabile in } A$$

$$f \text{ continua in } A \;\not\Uparrow\;\not\Downarrow\; f \text{ derivabile in } A$$

f continua in A $\not\Rightarrow$ f derivabile in A già in dimensione 1

$$f(x) = |x|$$

f derivabile in A $\overset{?}{\Rightarrow}$ f continua — vero in dim 1

falso in dim ≥ 2.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{" } = (0,0) \end{cases}$$

Questo implica

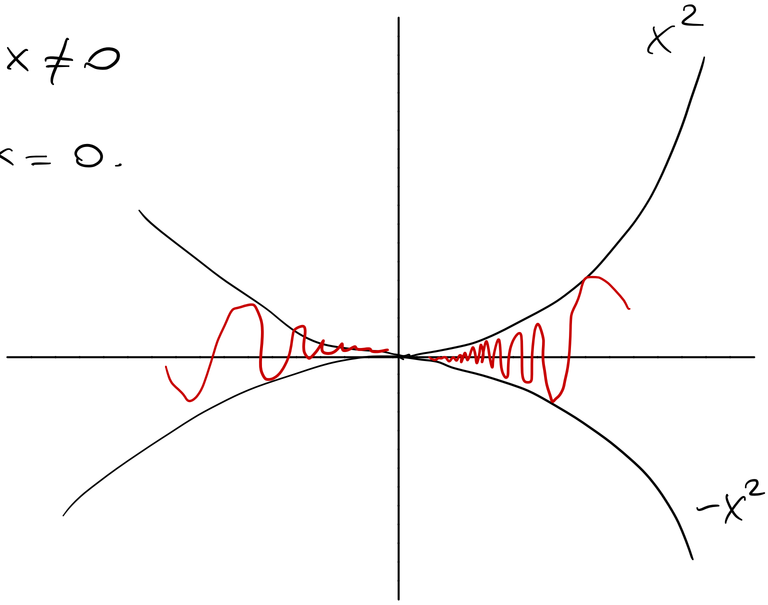
f continua $\not\Rightarrow$ f differenziabile

f derivabile in A $\not\Rightarrow$ f differenziabile

f differenziabile in A $\not\Rightarrow$ $f \in C^1(A)$

dim 1.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$



OSS Cosa diventa la differenziabilità in dim. 1?

$f : (a,b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x_0 \in (a,b)$

f differenziabile in x_0 significa $\exists\, f'(x^0)$ e si ha

$$f(x) = f(x^0) + f'(x^0)(x-x^0) + o(|x-x^0|) \qquad (*)$$

"$o(x-x^0)$" si vede facendo il limite da dx e da sx.

Ma questo è <u>sempre</u> vero se f è derivabile in x^0.

$$(*) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x^0)(x-x^0)}{x-x^0} \xrightarrow[x \to x^0]{} 0$$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x-x^0} \longrightarrow f'(x^0) \quad \text{def}^{\text{ne}} \text{ di derivata.}$$

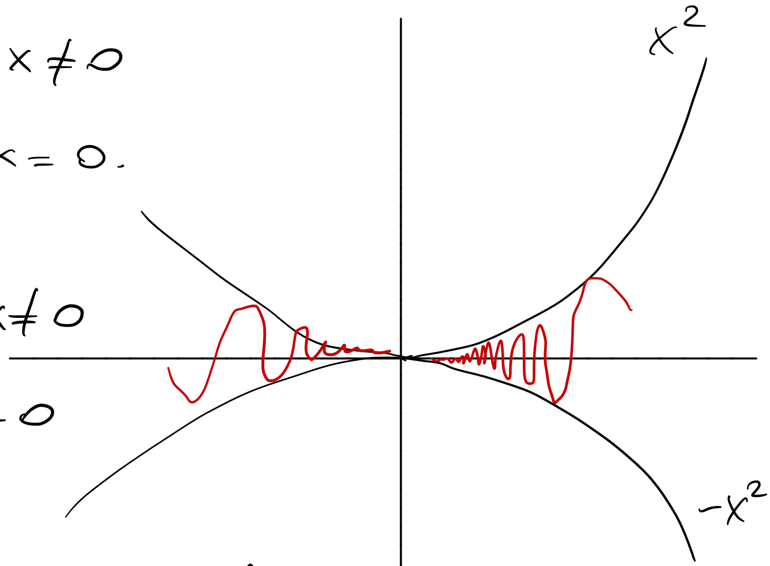
Quindi in dim 1.

$$f \text{ differenziabile in } x^0 \iff f \text{ derivabile in } x^0$$

f differenziabile in $A \not\Rightarrow f \in C^1(A)$

dim 1.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$



Si ha

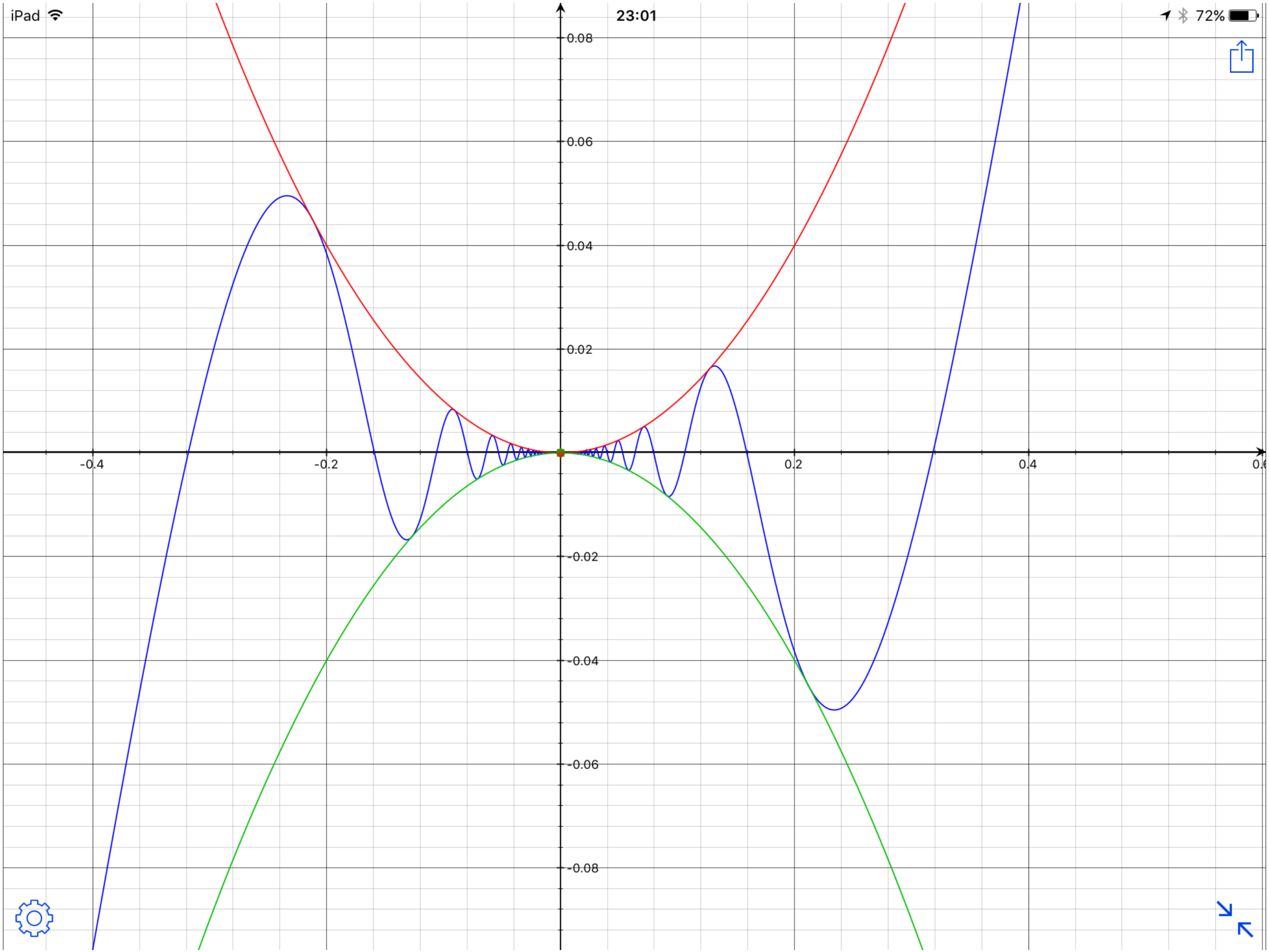
$$f'(x) = \begin{cases} 2x \operatorname{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\Uparrow$$

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - \cancel{f(0)}}{h} = \lim_{h \to 0} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0$$

f derivabile in tutto $\mathbb{R}$ (differenziabile) ma $\lim_{x \to 0} f'(x) \nexists$

f' non è continua in 0.



iPad
23:01
72%
0.08
0.06
0.04
0.02
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
-0.4
-0.2
0.2
0.4

PROP. Somma, prodotto, differenza, rapporto$^{(*)}$ di funzioni $C^1(A)$ (differenziabili) sono $C^1(A)$ (differenziabili)

(*) se il denominatore non si annulla.

Calcolare $\frac{\partial f}{\partial v}(-1,5)$ dove $f(x,y) = x^4 y - y^2$

$\underline{v}$ è la direzione di $(-2,-1)$ $\qquad \underline{v} = \frac{(-2,-1)}{\sqrt{5}}$

$f \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$ differenziabile.

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(-1,5) = \nabla f(-1,5) \cdot \underline{v} = -20 \cdot \frac{(-2)}{\sqrt{5}} - 9 \cdot \frac{(-1)}{\sqrt{5}} = \frac{49}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 y \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(-1,5) = -20$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4 - 2y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(-1,5) = -9$$

Eq^{ne} del piano tangente al grafico di f nello stesso punto.

$$z = f(-1,5) + \nabla f(-1,5) \cdot (x+1, y-5)$$

$$z = -20 - 20(x+1) - 9(y-5)$$

DEF. $f: E \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, sia $\underline{x}^\circ \in E$.

$\underline{x}^\circ$ si dice punto di $\overset{\text{minimo}}{\text{massimo}}$ assoluto se $f(\underline{x}^\circ) \overset{\leq}{\geq} f(\underline{x})$ $\forall\, \underline{x} \in E$

$\underline{x}^\circ$ si dice punto di $\overset{\text{minimo}}{\text{massimo}}$ relativo (o locale) se

$\exists\, U$ intorno di $\underline{x}^\circ$ t.c. $f(\underline{x}^\circ) \overset{\leq}{\geq} f(\underline{x})$ $\forall\, \underline{x} \in U \cap E$

$\underline{x}^\circ$ si dice punto di $\overset{\text{minimo}}{\text{massimo}}$ relativo **stretto** se

$\exists\, U$ intorno di $\underline{x}^\circ$ t.c. $f(\underline{x}^\circ) \overset{<}{>} f(\underline{x})$ $\forall\, \underline{x} \in U \cap E \setminus \{\underline{x}^\circ\}$

DEF Sia $f: A \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $\underline{x}^\circ \in A$ si dice p.to critico (o stazionario) di f se $\nabla f(\underline{x}^\circ) = \underline{0}$

TEOREMA DI FERMAT Sia $f : E \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$,
sia $\underline{x}^\circ$ un punto <u>interno</u> a E (esiste un intorno di $\underline{x}^\circ$ contenuto in E)
che sia punto di massimo (o minimo) relativo per f.
Se f è derivabile parzialmente in $\underline{x}^\circ$, si ha

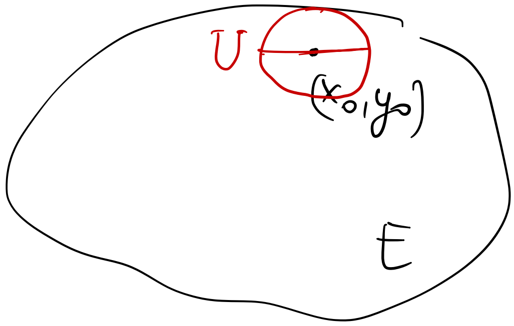
$$\nabla f(\underline{x}^\circ) = \underline{0}$$

In altre parole: se f è derivabile, allora tutti i pti di estremo relativo interni ad E sono pti critici.

DIM. (in dimensione 2).

Sia (x_0, y_0) di minimo relativo per f, e sia U = intorno di centro (x_0, y_0) e raggio r tutto contenuto in E t.c.

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \quad \forall (x, y) \in U$$



Considero

$$g(x) = f(x, y_0) \text{ definita almeno per } x \in (x_0 - r, x_0 + r)$$

Si ha $\quad g(x_0) \leq g(x) \quad \forall\, x \in (x_0 - r, x_0 + r)$

$\Rightarrow g(x)$ ha minimo relativo in x_0.

Se $g(x)$ è derivabile in x_0, si ha (Teorema di Fermat in dim. 1)

$$g'(x_0) = 0$$

$$\overset{\|}{\lim_{h \to 0}} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} =$$

$$=: \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Analogamente si prova $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

APPLICAZIONE al teorema di Weierstrass.

Sia $f: E \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

E chiuso e limitato.

Per Weierstrass, $\exists$ max. e min. assoluti di f su E.

Dove sono assunti?

OSS Un punto di max/min assoluto è anche punto di max/min. relativo.

Dove possono stare? 1) Tra i pti critici interni ad E. ($\Rightarrow f$ derivabile, e $\nabla f = 0$)

2) su ∂E

3) tra i pti interni di non derivabilità.

OSS In un un pto di minimo/massimo rel. interno non è detto che le derivate parziali esistono

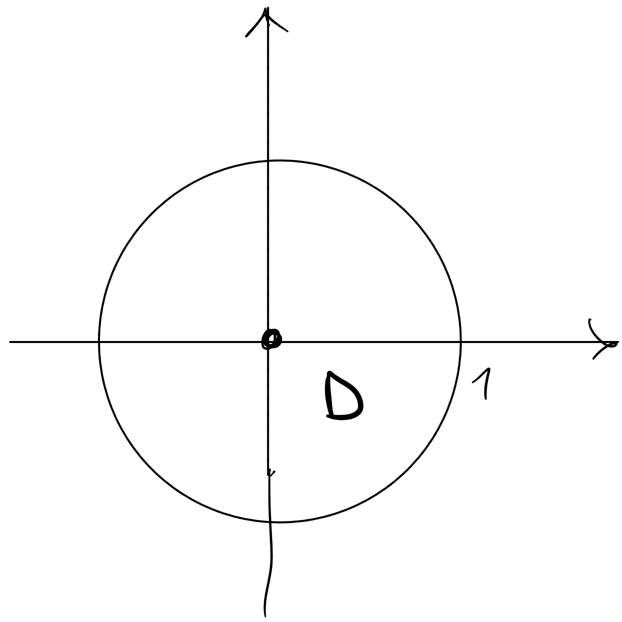
Esempio: $f(x) = |x|$ in dim. 1

$f(x,y) = \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ in dim 2, etc...

ESERCIZIO Trovare massimo e minimo assoluti di

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy \quad \text{nell'insieme}$$

$$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 1\}$$



$f \in C^1(\mathbb{R}^2)$

E chiuso e limitato.

$\Rightarrow \exists$ max. e min. assoluti

1) pti critici interni.

$$f_x(x,y) = 2x - y \; ; \; f_y(x,y) = 2y - x$$

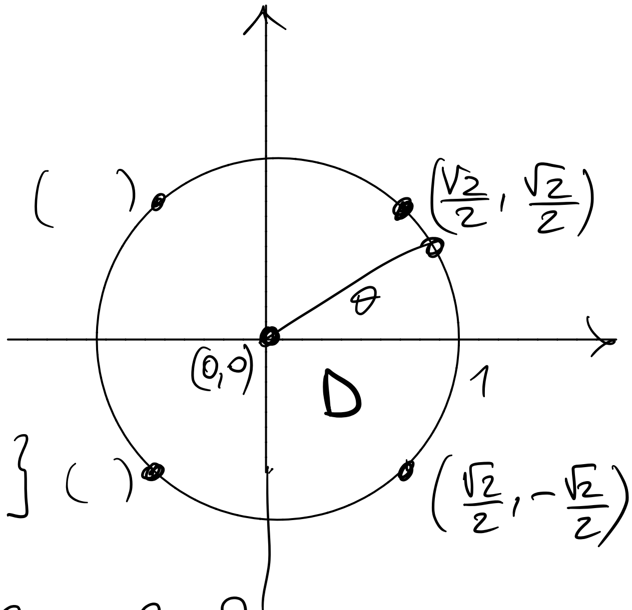
Pti critici $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - x = 0 \end{cases} \iff (0,0)$ unico pto critico

2) Studio su ∂D.

ESERCIZIO
Trovare massimo e minimo assoluti di

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy \quad \text{nell'insieme}$$

$$D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$$



2) Studio sulla frontiera

$$\partial D = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$\partial D = \{x = \cos\theta,\ y = \operatorname{sen}\theta,\ \theta \in [0, 2\pi]\} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

$$\varphi(\theta) = f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta - \cos\theta \operatorname{sen}\theta =$$

$$= 1 - \cos\theta \operatorname{sen}\theta = 1 - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}$$

sarà massimo per $2\theta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

$\theta = 7\frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $\theta = +\frac{3}{4}\pi$.

sarà minimo per $2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ $\qquad$ $\theta = \frac{5}{4}\pi$.

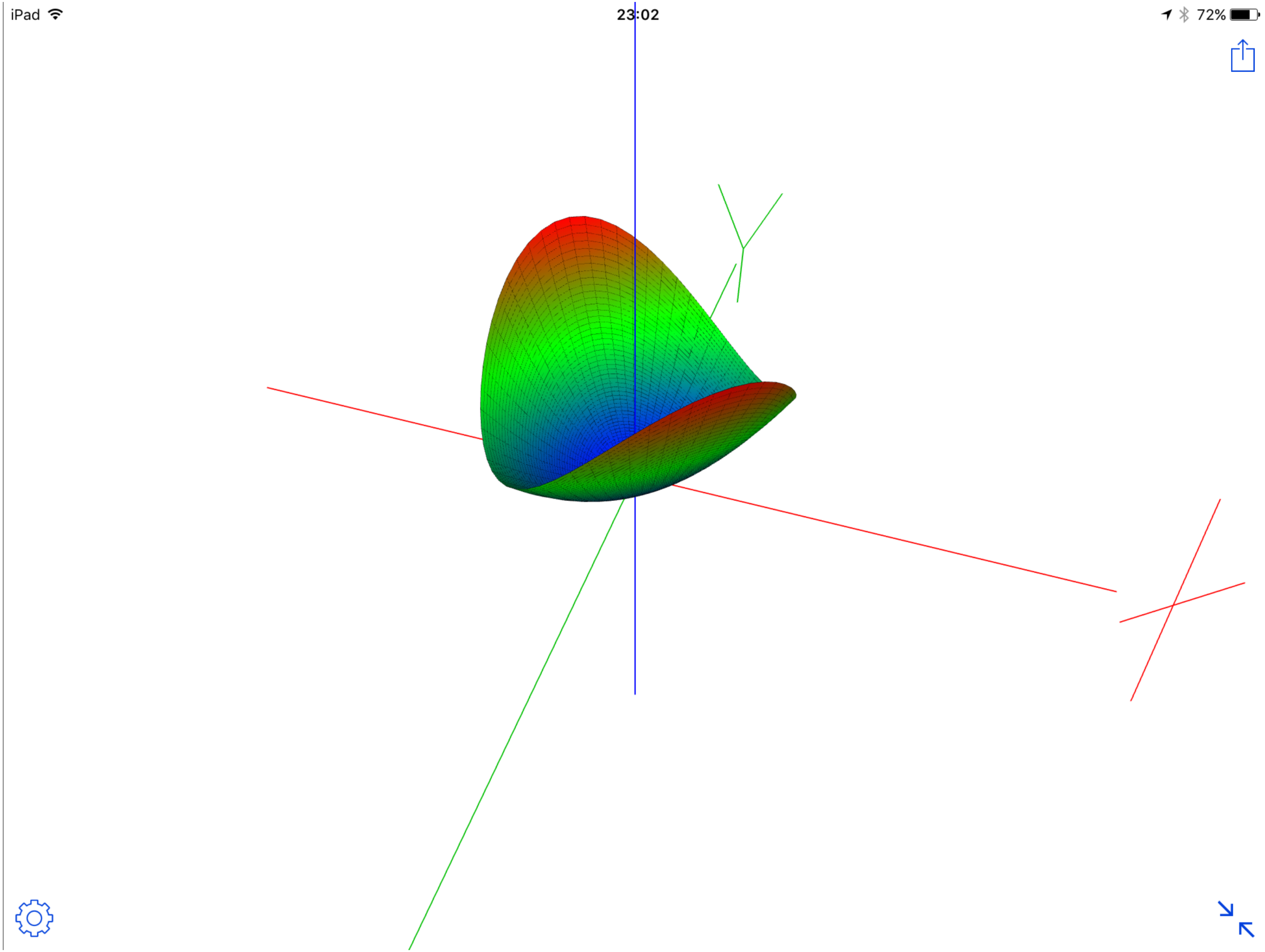
$$f(0,0) = 0$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}.$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \varphi\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ sono i pti di max. assoluto.

$(0,0)$ è il pto di min. assoluto.


iPad
23:02
72%