DEF. FUNZIONI CONTINUE

Sia $f : E \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione, e sia $\underline{x}^\circ \in E$ un punto non isolato

DEF f si dice continua in $\underline{x}^\circ$ se $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^\circ} f(\underline{x}) = f(\underline{x}^\circ)$

PROP. Somma, differenza, prodotto, rapporto di funzioni continue in un punto $\underline{x}^\circ$ sono funzioni continue in $\underline{x}^\circ$
(per il rapporto deve essere il denominatore $\neq 0$)

PROP "La composizione di funzioni continue è continua".

Più precisamente, ad esempio si ha:

PROP $f(x,y)$ continua in (x_0,y_0) e sia $g(t)$ continua in $f(x_0,y_0)$. Allora la funzione

$$g \circ f\,(x,y) = g(f(x,y)) \text{ è continua in } (x_0,y_0)$$

PROP Se $f(x), g(x)$ sono continue in $x_0 \in \mathbb{R}$, e se $h(u,v)$ è continua in $(f(x_0), g(x_0))$, allora

$$h(f(x), g(x)) \text{ è continua in } x_0.$$

$$f(x,y) = \frac{e^{x^2 y} + \cos(\ln(xy) + x^2)}{x^2y^4 + x^3 + y^2}$$ è continua dove è definita.

DEF
f si dice continua in E se è continua in tutti i pti di E.

TEOREMA Se f è continua in $\underline{x}^\circ$, e se $f(\underline{x}^\circ) > 0$, allora (per la permanenza del segno) esiste un intorno di $\underline{x}^\circ$ in cui $f(\underline{x}) > 0$.

COROLLARIO Se $f: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ è continua in $\mathbb{R}^N$, allora l'insieme

$$E_a = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^N : f(\underline{x}) \underset{>}{<} a \} \quad \text{è aperto.}$$

Dim. Infatti, se x° è tale che $x^\circ \in E_a$, $f(\underline{x}^\circ) < a$

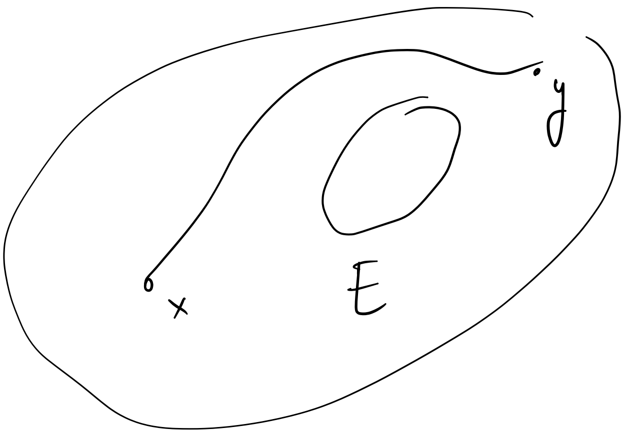
$\Rightarrow a - f(\underline{x}^\circ) > 0$, ma $g(\underline{x}) = a - f(\underline{x})$ è continua, quindi per il thm. precedente esiste un intorno di $\underline{x}^\circ$ in cui $g(\underline{x}) > 0$, cioè $f(\underline{x}) < a$. Questo intorno è tutto contenuto in E_a. $\Rightarrow E_a$ è aperto.

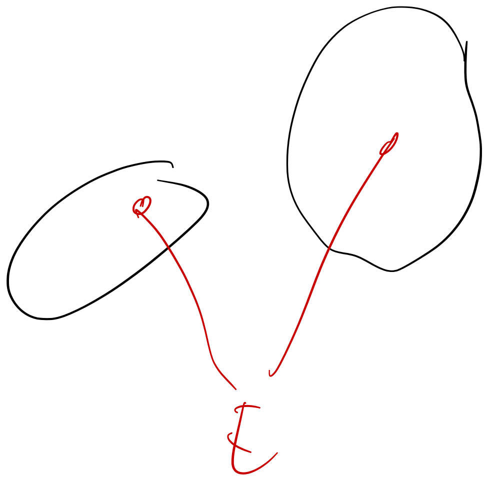
COROLLARIO Stessa ipotesi, allora l'insieme

$$F_a = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^N : f(\underline{x}) \underset{\substack{(\geqslant) \\ =}}{\leq} a \} \quad \text{è chiuso.}$$

Esempio $\{ (x, y) : x^2 y + x^6 y^4 - y + x > -7 \}$ è aperto.

DEF Un insieme $E \subset \mathbb{R}^N$ si dice <u>connesso</u> (per archi) se, comunque presi due punti $\underline{x}, \underline{y} \in E$, esiste una curva regolare (def: rigorosa: vedi dopo) tutta contenuta in E che li collega





(Thm. di esistenza degli zeri)

<u>TEOREMA</u> Sia f continua in E aperto connesso di $\mathbb{R}^N$. Se esistono due pti $\underline{x}, \underline{y} \in E$ t.c. $f(\underline{x}) f(\underline{y}) < 0$, esisterà un punto di E in cui f vale zero.

(Thm. dei valori intermedi)

<u>COROLLARIO</u> Sia $f : E \to \mathbb{R}$ continua, con $E \subset \mathbb{R}^N$ aperto connesso. Allora f assume tutti i valori compresi tra $\inf_E f$ e $\sup_E f$.

In altre parole: l'immagine di una funzione continua su un aperto connesso è un intervallo.

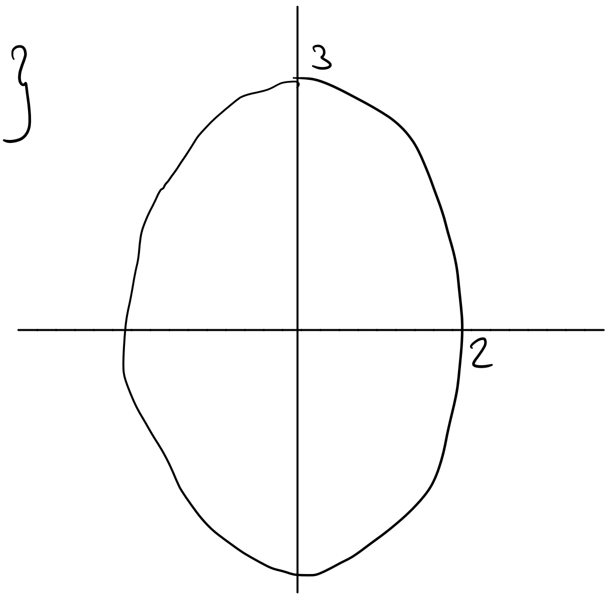
TEOREMA DI WEIERSTRASS Sia f continua su $E \subset \mathbb{R}^N$, con E chiuso e limitato. Allora $\exists$ $\underline{x}^1, \underline{x}^2 \in E$ t.c.

$$f(\underline{x}^1) \le f(\underline{x}) \le f(\underline{x}^2) \qquad \forall\, \underline{x} \in E.$$

(cioè f ammette min. e max. assoluti in E).

Esempio: la funzione $f(x,y) = xy$ ammette massimo e minimo assoluti nell'insieme

$$E = \left\{ (x,y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1 \right\}$$



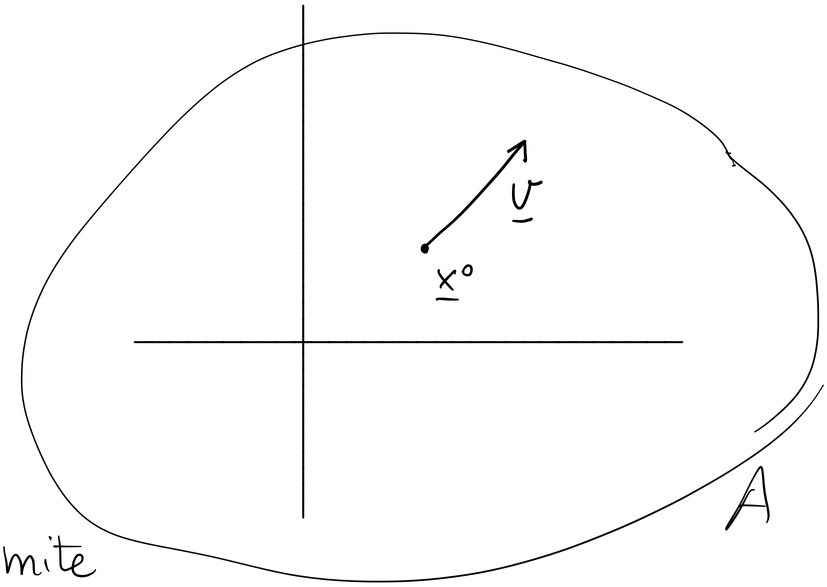
Infatti f è continua (in $\mathbb{R}^2$)

E è chiuso

E è limitato.

Derivate direzionali

Sia $f : A \subset \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, con A aperto.
Sia $\underline{x}^0 \in A$.
Sia $\underline{v} \in \mathbb{R}^N$ una direzione (o versore), cioè un vettore di lunghezza 1.



DEF. Definiamo derivata direzionale di f in $\underline{x}^0$ lungo la direzione $\underline{v}$ il limite

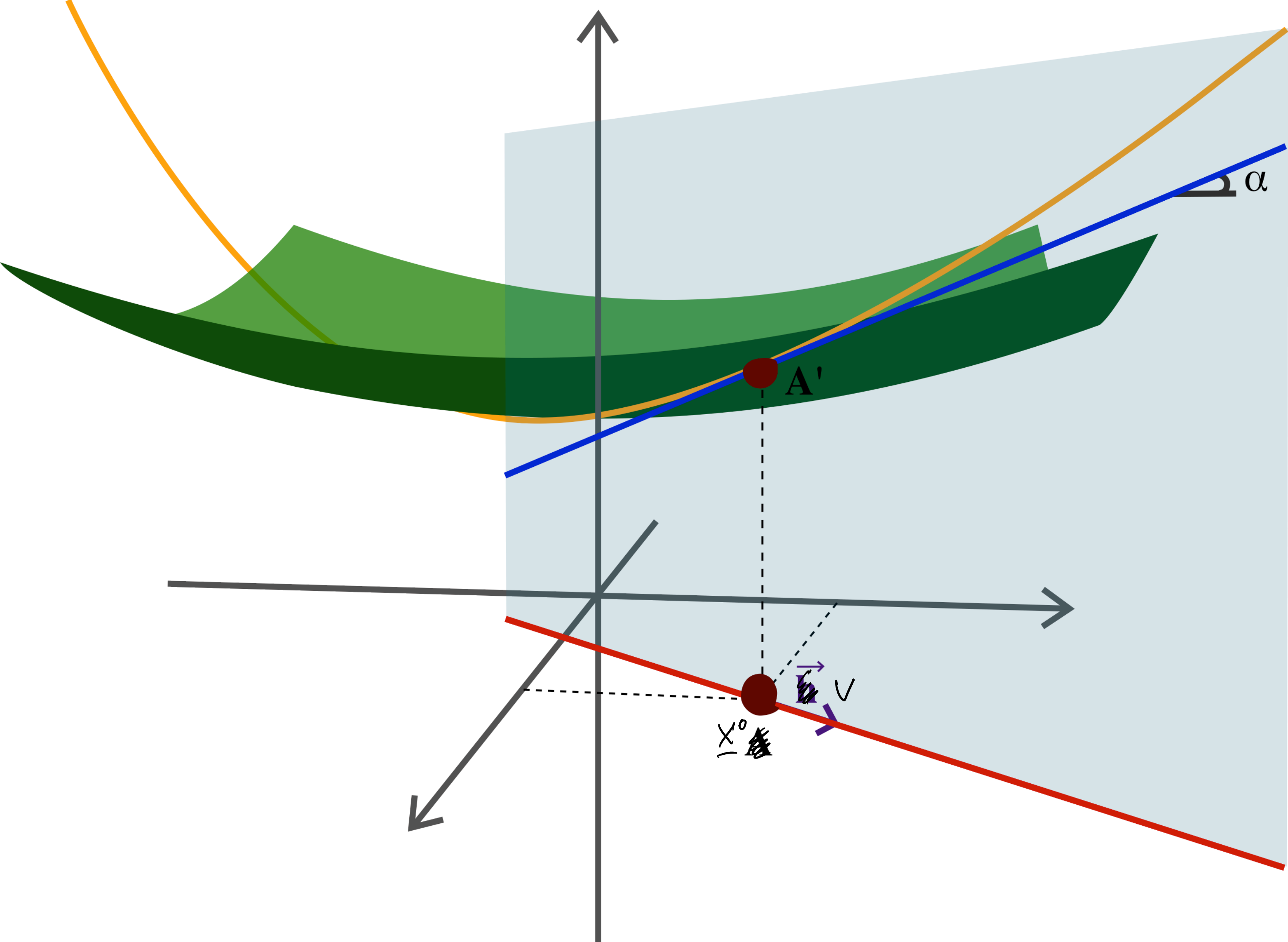
$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}^0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}^0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}^0)}{t},$$

se questo limite esiste finito.

ESEMPIO Calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,4)$, dove $f(x,y) = x^2 y$, e $\underline{v}$ è la direzione individuata dal vettore $(-3,4)$

$$\underline{v} = \frac{(-3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

∂f


α
A'
$\underline{x}^0$
v

ESEMPIO Calcoliamo $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,4)$, dove $f(x,y)=x^2y$, e

$\underline{v}$ è la direzione individuata dal vettore $(-3,4)$

$$\underline{v} = \frac{(-3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,4) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(1-\frac{3}{5}t, 4+\frac{4}{5}t\right) - f(1,4)}{t} =$$

non perdiamo tempo a calcolarli

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(1-\frac{3}{5}t\right)^2\left(4+\frac{4}{5}t\right) - 4}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{24}{5}t + \frac{4}{5}t + at^2 + bt^3}{t} =$$

$$= -4$$

OSS

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}^\circ) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{x}^\circ + t\underline{v}) - f(\underline{x}^\circ)}{t} =$$

$$= \underbrace{\frac{d}{dt}\Big(f\overbrace{(\underline{x}^\circ + t\underline{v})}^{g(t)}\Big)}_{\shortparallel}\Big|_{t=0}$$

Verifica: $g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\underline{x}^\circ + t\underline{v}) - f(\underline{x}^\circ)}{t}$

Nel caso precedente $g(t) = f(\underline{x}^\circ + t\,\underline{v}) =$

$$= f\left(1 - \frac{3}{5}t,\ 4 + \frac{4}{5}t\right) = \left(1 - \frac{3}{5}t\right)^2\left(4 + \frac{4}{5}t\right)$$

$$g'(t) = 2\left(1 - \frac{3}{5}t\right)\left(-\frac{3}{5}\right)\left(4 + \frac{4}{5}t\right) + \frac{4}{5}\left(1 - \frac{3}{5}t\right)^2.$$

$$g'(0) = -\frac{24}{5} + \frac{4}{5} = -4$$

Tra le varie direzioni $\underline{v}$ possibili, ci sono i versori degli assi

$(1,0,0\dots0)$, $(0,1,0\dots0)$ etc..

$$\underline{e}_j = (0,\dots 0, \underset{\uparrow \text{ j-esimo posto}}{1}, 0, \dots 0)$$

<u>Def.</u> definiamo derivata parziale di f rispetto alla variabile x_j nel pto $\underline{x}$ come la derivata di f nel pto $\underline{x}$ lungo la direzione $v = \underline{e}_j$

Per concretezza, sia $f(x,y)$ una funzione di due variabili. I versori degli assi sono $\underline{e}^1 = \underline{i} = (1,0)$ e $\underline{e}^2 = \underline{j} = (0,1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial \underline{e}^1}(x_0,y_0) = \lim_{t\to0} \frac{f(x_0+t,y_0) - f(x_0,y_0)}{t} =$$

$$= \frac{d}{dt} f(x_0+t,y_0)\Big|_{t=0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{t\to0} \frac{f(x_0,y_0+t) - f(x_0,y_0)}{t} = \frac{d}{dt}\left(f(x_0,y_0+t)\right)\Big|_{t=0}$$

Calcoliamo le derivate parziali di $f(x,y) = x^2y + \sqrt{1+x^4y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\, x^3y^2}{\cancel{2}\sqrt{1+x^4y^2}} \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + \frac{\cancel{2}x^4y}{\cancel{2}\sqrt{1+x^4y^2}}$$

Derivate parziali di $f(x,y,z) = z \operatorname{sen}(x^2 y)$