OSSERVAZIONE

Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$, allora anche il limite lungo le rette passanti per (x_0,y_0) deve essere uguale ad ℓ.
In particolare

$$\lim_{x\to x_0} f(x, y_0 + m(x-x_0)) = \ell, \quad \lim_{y\to y_0} f(x_0,y) = \ell$$

$$y = y_0 + m(x-x_0)$$

ESEMPIO

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

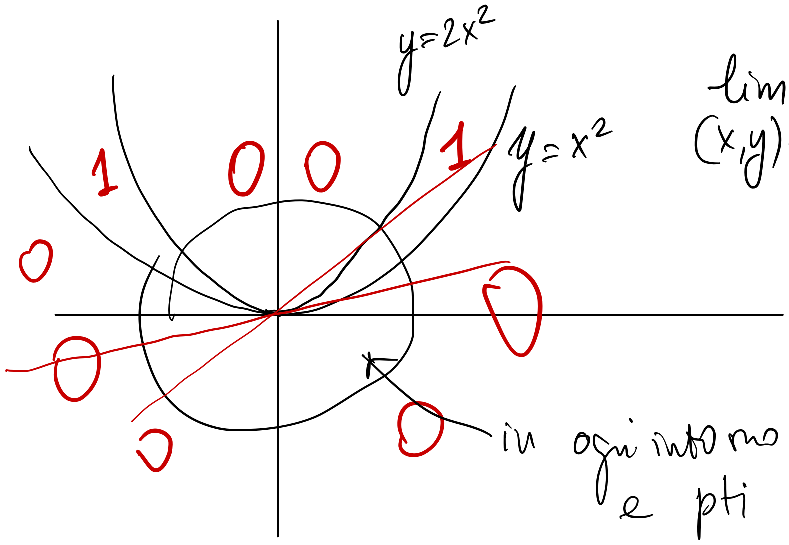
Provo il limite lungo le rette $y = mx$

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$ dipende da m!

$\Rightarrow$ il limite non esiste.

<u>OSS</u> Tuttavia esistono casi in cui esiste il limite lungo le rette, questo limite non dipende dalla retta, ma il limite in due variabili non esiste.

1) $$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x^2 < y < 2x^2 \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$



$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \nexists$$

in ogni intorno ci sono pti in cui $f=1$ e pti in cui $f=0$.

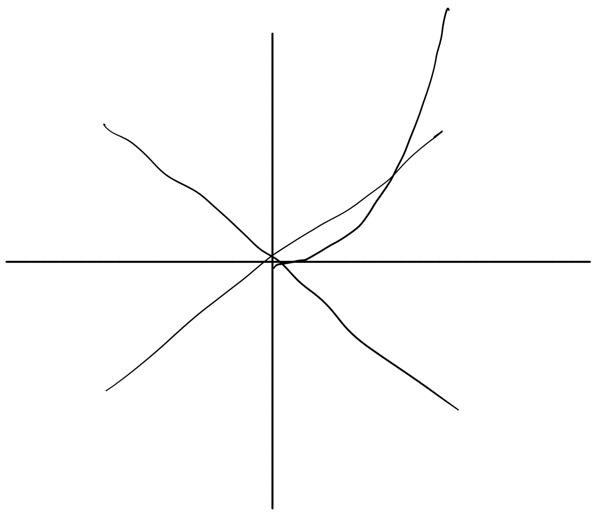
ma il limite lungo ogni retta passante per l'origine vale zero.

2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} \nexists.$

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{m x^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{x^2+m^2} = 0 \quad \forall m.$$

vero anche sulla retta $y=0$ e sulla retta $x=0$.

Tuttavia $\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$



Continuano a valere importanti teoremi già visti in dim. 1 (dim. quasi uguale).

1°) Il limite, se esiste, è unico.

2°) Se $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f(\underline{x}) = \ell$, $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} g(\underline{x}) = m$ $\rightarrow$

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} \left(f(\underline{x}) \pm g(\underline{x})\right) = \ell \pm m$$

$\times$ $\times$

$/$ $/$

se $m \neq 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{x y^2}{x^2+3+y} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$\rightarrow 4$

$\searrow 6$

3°) aritmetica "estesa" dei limiti. Se, per $\underline{x} \to \underline{x}^0$ $f(\underline{x}) \to \ell \gtrless 0$

$g(\underline{x}) \to 0^+$

$$\Rightarrow \lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} \frac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})} = \pm\infty \quad \text{etc...}$$

Le forme indeterminate $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ continuano ad esserci.

4° Thm. permanenza del segno.

se $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}^0} f(\underline{x}) = \ell > 0$, allora $f(\underline{x})$ def^{te} > 0 per $\underline{x} \to \underline{x}^0$

5) Teorema carabinieri

Se
$$f(\underline{x}) \le g(\underline{x}) \le h(\underline{x}),$$
e se
$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} h(\underline{x}) = \ell \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} g(\underline{x}) = \ell.$$

OSS
$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} f(\underline{x}) = \ell^{\in\mathbb{R}} \Longleftrightarrow \lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} |f(\underline{x}) - \ell| = 0$$

In particolare
$$\lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} f(\underline{x}) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{\underline{x}\to\underline{x}^0} |f(\underline{x})| = 0$$

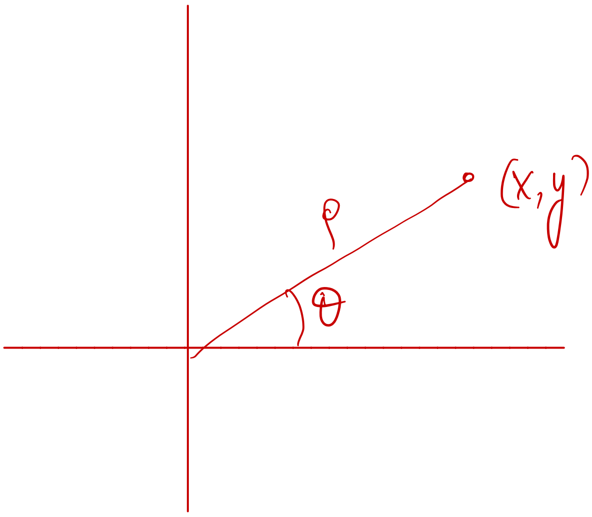
Esempio
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = 0$$

Il limite lungo le rette vale 0 $\Rightarrow$ Il limite, se esiste, vale 0.

$$0 \le \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x|\, y^2}{x^2+y^2} \le |x| \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} 0$$

$$\frac{y^2}{x^2+y^2} \le 1$$

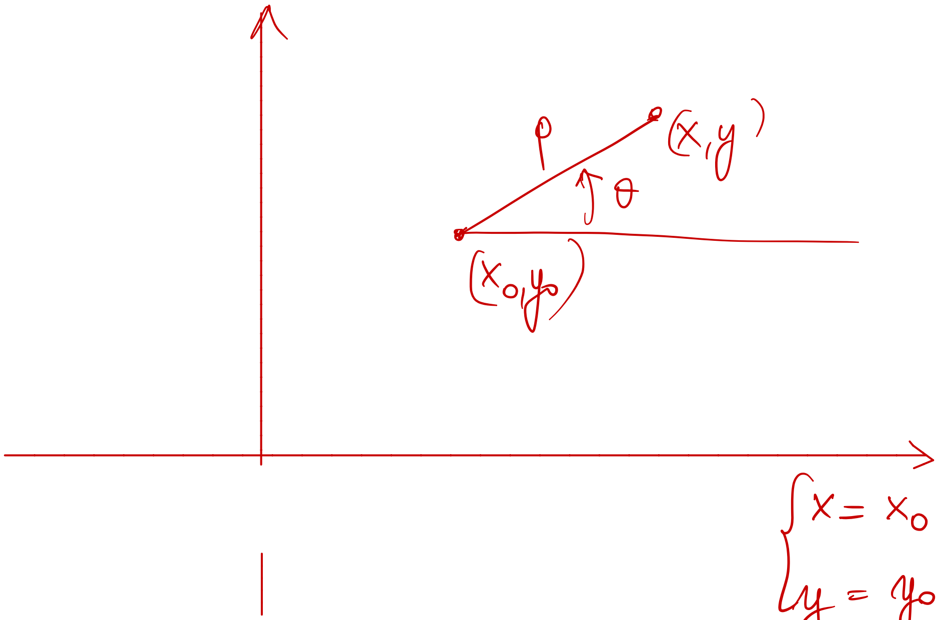
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$ si può studiare in coord. polari



$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \operatorname{sen}\theta = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$



$$\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta \\ y = y_0 + \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R} \iff \forall \varepsilon>0 \ \exists \delta \text{ t.c. } \forall (x,y) \text{ verificante } |(x,y)-(x_0,y_0)|<\delta \Rightarrow |f(x,y)-\ell| \le \varepsilon$$

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$ t.c.
$\forall \rho\in(0,\delta) \quad \forall \theta\in[0,2\pi]$

$$\big|\underbrace{f(x_0+\rho\cos\theta,\ y_0+\rho\,\mathrm{sen}\,\theta)}_{\tilde{f}(\rho,\theta)}-\ell\big| \le \varepsilon$$

$\iff$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$ t.c.
$\forall \rho\in(0,\delta)$

$$\underbrace{\sup_{\theta\in[0,2\pi]} |\tilde{f}(\rho,\theta)-\ell|}_{=\,g(\rho)} \le \varepsilon$$

$\Updownarrow$

$$\lim_{\rho\to 0^+} g(\rho) = 0$$

PROP. Si ha $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R} \iff$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \sup_{\theta} |f(x_0+\rho\cos\theta, y_0+\rho \operatorname{sen}\theta) - \ell| = 0.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} =$$

candidato limite $\ell = 0.$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

$$\lim_{\rho\to 0^+} \sup_{\theta} \left| \frac{\rho^{\cancel{3}}\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta}{\cancel{\rho^2}} \right| \overset{?}{=} 0$$

$$0 \leq \sup_{\theta} \rho\, |\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta| \leq \rho$$

$$|\cos\theta \operatorname{sen}^2\theta| \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{\rho\to 0^+} \sup_{\theta} |\tilde{f}(\rho,\theta)| = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 .$$

Esercizi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^3y^2)}{x^6+y^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Vale zero lungo gli assi $\Rightarrow$ se esiste, il limite vale zero.

$$\lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)}{t} = 1.$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\log(1+x^3y^2)}{x^3y^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{x^3y^2}{\cancel{x}^6+y^2}}_{\to 0} = 1\cdot 0 = 0.$$

$$0 \le \left|\frac{x^3y^2}{x^6+y^2}\right| = \frac{|x|^3\, y^2}{x^6+y^2} \le \underbrace{|x|^3}_{\to 0}$$

$$\frac{y^2}{x^6+y^2} \le 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 \cos\frac{1}{xy} = 0$$

limitata

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0.$$

infinitesima

$$0 \le \left| y^2 \cos\frac{1}{xy} \right| \le y^2$$

ℓ

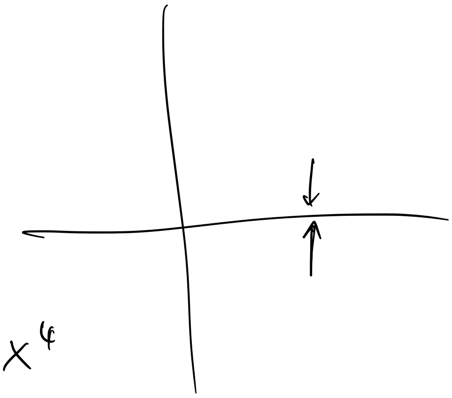
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \quad \nexists .$$

f definita su $\mathbb{R}^2 \setminus$ asse x

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \operatorname{arctg} \frac{1}{m} \quad \text{dipende da } m!$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \operatorname{arctg} \frac{x^4}{y} \quad \nexists$$

Il limite lungo le rette vale zero.



Tuttavia lungo la "parabola" $y = x^4$

$$\lim_{x\to 0} f(x, x^4) = \frac{\pi}{4}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2-3y^2)^2}{x^2+2y^2} = 0$$

Il limite lungo le rette (provare) viene zero.