Scritto di Analisi Vettoriale (17.02.2016)

Proff. A. Dall'Aglio, F. Lanzara, E. Montefusco

COGNOME e NOME:

MATRICOLA:

DOCENTE: ◯ Dall'Aglio ◯ Lanzara ◯ Montefusco

Se ammesso, sosterrò la prova teorica: ◯ in questo appello ◯ in un appello successivo

Istruzioni: il testo d'esame deve essere riconsegnato insieme all'elaborato, tutti i ragionamenti devono essere adeguatamente spiegati!

Esercizio 1. Data la successione di funzioni

$$\phi_n(x) = \frac{x(n^2x^2+2)}{n^2x^2+1} \qquad \text{con } x \in \mathbb{R},$$

i. calcolare il limite puntuale $\phi_\infty(x)$,
ii. determinare in quali intervalli ϕ_n converge uniformemente a ϕ_∞.

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x,y) = x^4y - xy^4 + 5xy$$

i. trovare e classificare tutti i punti critici della funzione,
ii. trovare massimo e minimo assoluti della funzione nell'insieme $T = \{x \le 0 \le y\,,\ x^3 - y^3 + 5 \ge 0\}$.

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F} = (yz, -xz, xy)$ calcolare

$$\int_S (\text{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n})\, d\sigma,$$

dove $S \subset \mathbb{R}^3$ è la parte della superficie sferica $\{x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ compresa tra i piani $\{z = 0\}$ e $\{z = \sqrt{3}\}$, dove $\mathbf{n}$ indica l'usuale normale uscente dalla sfera.

Esercizio 4. Sia D la regione del piano xy delimitata dall'asse x e dall'arco di curva di equazione polare $\rho = 2+\cos(\theta)$ con $\theta \in [0,\pi]$. Calcolare il volume del solido E ottenuto facendo ruotare D di un giro completo intorno all'asse x.

Esercizio 5. Si consideri il problema di Cauchy

$$y'(t) = \frac{3}{2}\,\frac{y^{1/3}(t) - y(t)}{1+t^2}, \qquad y(0) = y_0\,.$$

i. Si assuma $y_0 = 1$. Dire se il problema ammette una o più soluzioni e, in caso, determinarle tutte.
ii. Si assuma $y_0 = 0$. Dire se il problema ammette una o più soluzioni e, in caso, determinarle tutte.

Scritto di Analisi Vettoriale (17.02.2016)

Proff. A. Dall'Aglio, F. Lanzara, E. Montefusco

COGNOME e NOME:

MATRICOLA:

DOCENTE: ◯ Dall'Aglio ◯ Lanzara ◯ Montefusco

Se ammesso, sosterrò la prova teorica: ◯ in questo appello ◯ in un appello successivo

Istruzioni: il testo d'esame deve essere riconsegnato insieme all'elaborato, tutti i ragionamenti devono essere adeguatamente spiegati!

Esercizio 1. Si consideri il problema di Cauchy

$$y'(t) = \frac{3}{2}\frac{y^{1/3}(t) + y(t)}{1+t^2}, \qquad y(0) = y_0\,.$$

i. Si assuma $y_0 = -1$. Dire se il problema ammette una o più soluzioni e, in caso, determinarle tutte.
ii. Si assuma $y_0 = 0$. Dire se il problema ammette una o più soluzioni e, in caso, determinarle tutte.

Esercizio 2. Data la successione di funzioni

$$\phi_n(x) = \frac{x(n^2x^2+3)}{n^2x^2+2} \qquad \text{con } x \in \mathbb{R},$$

i. calcolare il limite puntuale $\phi_\infty(x)$,
ii. determinare gli intervalli in cui ϕ_n converge uniformemente a a ϕ_∞.

Esercizio 3. Sia D la regione del piano xy delimitata dall'asse x e dall'arco di curva di equazione polare $\rho = 2-\cos(\theta)$ con $\theta \in [0,\pi]$. Calcolare il volume del solido E ottenuto facendo ruotare D di un giro completo intorno all'asse x.

Esercizio 4. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F} = (-yz, xz, xy)$ calcolare

$$\int_S (\mathrm{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n})\, d\sigma$$

dove $S \subset \mathbb{R}^3$ è la parte della superficie sferica $\left\{x^2+y^2+z^2=4\right\}$ compresa tra i piani $\{z=-1\}$ e $\{z=0\}$, dove $\mathbf{n}$ indica l'usuale normale uscente dalla sfera.

Esercizio 5. Data la funzione

$$f(x,y) = xy^4 + x^4y - 5xy$$

i. trovare e classificare tutti i punti critici della funzione,
ii. trovare massimo e minimo assoluti della funzione nell'insieme $T = \{x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ y^3 + x^3 - 5 \leq 0\}$.

FILA A - Esercizio 1.

Esercizio 1. Data la successione di funzioni

$$\phi_n(x) = \frac{x(n^2x^2+2)}{n^2x^2+1} \qquad \text{con } x \in \mathbb{R},$$

i. calcolare il limite puntuale $\phi_\infty(x)$,
ii. determinare in quali intervalli ϕ_n converge uniformemente a ϕ_∞.

i) Per $x \neq 0$ si ha evidentemente $\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = x \lim_{n\to\infty} \frac{n^2x^2+2}{n^2x^2+1} = x \cdot 1 = x$

Ovviamente per $x = 0$ si ha $\phi_n(0) = 0$. $\forall n$.
Quindi il limite puntuale vale $\phi_\infty(x) = x$.

ii) Vediamo se si ha convergenza uniforme in $\mathbb{R}$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\phi_n(x) - \phi_\infty(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x\left(\frac{n^2x^2+2}{n^2x^2+1} - 1\right)\right| =$$

$$= \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{|x|}{n^2x^2+1}.$$

Studio quindi $g_n(x) = \frac{|x|}{n^2x^2+1}$. Poiché è pari, la studio per $x \geq 0$, dove vale $\frac{x}{n^2x^2+1}$.

$$g_n'(x) = \frac{n^2x^2+1-2n^2x^2}{(n^2x^2+1)^2} = \frac{1-n^2x^2}{(n^2x^2+1)^2}$$

Quindi $g_n'(x) = 0$ per $x = \frac{1}{n}$

$g_n'(x) < 0$ per $x > \frac{1}{n}$

$g_n'(x) > 0$ per $0 < x < \frac{1}{n}$

Quindi $\sup_{x\in\mathbb{R}} g_n(x) = g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1/n}{2} = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Pertanto si ha convergenza uniforme in tutto $\mathbb{R}$ (e quindi anche in ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$)

FILA A - Esercizio 2

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x,y) = x^4 y - x y^4 + 5xy$$

i. trovare e classificare tutti i punti critici della funzione,
ii. trovare massimo e minimo assoluti della funzione nell'insieme $T = \{x \le 0 \le y,\ x^3 - y^3 + 5 \ge 0\}$.

i) Si ha

$$f_x(x,y) = 4x^3 y - y^4 + 5y = y\left(4x^3 - y^3 + 5\right)$$

$$f_y(x,y) = x^4 - 4xy^3 + 5x = x\left(x^3 - 4y^3 + 5\right)$$

I pti critici di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y\left(4x^3 - y^3 + 5\right) = 0 \\ x\left(x^3 - 4y^3 + 5\right) = 0 \end{cases}$$

e cioè:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow P_1(0,0)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^3 - 4y^3 + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_2\left(-\sqrt[3]{5}, 0\right)$$

$$\begin{cases} 4x^3 - y^3 + 5 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow P_3\left(0, \sqrt[3]{5}\right)$$

$$\begin{cases} 4x^3 - y^3 + 5 = 0 \\ x^3 - 4y^3 + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow P_4(-1, 1)$$

Procediamo alla classificazione dei punti critici.

Si ha $f_{xx}(x,y) = 12x^2y$

$f_{xy}(x,y) = 4x^3 - 4y^3 + 5$

$f_{yy}(x,y) = -12xy^2$

Quindi

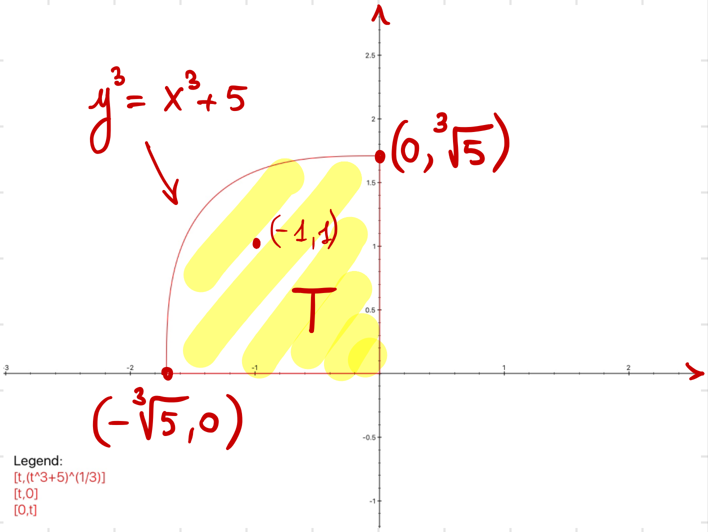
$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det D^2 f(0,0) < 0 \Rightarrow (0,0) \text{ pto di sella}$$

$$D^2 f(-\sqrt[3]{5}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -15 \\ -15 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (-\sqrt[3]{5}, 0) \text{ p.to di sella}$$

$$D^2 f(0, \sqrt[3]{5}) = \begin{pmatrix} 0 & -15 \\ -15 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (0, \sqrt[3]{5}) \text{ p.to di sella}$$

$$D^2 f(-1,1) = \begin{pmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \det D^2 f(-1,1) > 0 \\ f_{xx}(-1,1) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-1,1) \text{ p.to di minimo relativo.}$$

ii).



Si vede facilmente che il dominio T è fatto come mostrato a lato. E' evidentemente chiuso e limitato. Quindi, per il teorema di Weierstrass, massimo e minimo di f in T esistono sicuramente.

Su ∂T $f \equiv 0$. All'interno di T f è negativa. Il minimo assoluto è assunto nell'unico punto critico interno $(-1,1)$.

Quindi $\max_T f = 0$, $\min_T f = f(-1,1) = -3$

FILA A

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F} = (yz, -xz, xy)$ calcolare

$$\int_S (\mathrm{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n})\, d\sigma,$$

dove $S \subset \mathbb{R}^3$ è la parte della superficie sferica $\{x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ compresa tra i piani $\{z = 0\}$ e $\{z = \sqrt{3}\}$, dove $\mathbf{n}$ indica l'usuale normale uscente dalla sfera.

Utilizzando il teorema di Stokes, si ottiene che il flusso richiesto è uguale alla circuitazione di $\underline{F}$ lungo il bordo di S.

Il bordo di S, orientato positivamente rispetto al versore normale indicato, è dato dalla circonferenza

$\gamma_1 = \{ x^2 + y^2 = 4, \; z = 0 \}$, percorsa in verso antiorario se vista "dall'alto"

e dalla circonferenza

$\gamma_2 = \{ x^2 + y^2 = 1, \; z = \sqrt{3} \}$, percorsa in verso orario se vista "dall'alto"

Quindi

$$\int_{\partial^+ S} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = \underbrace{\int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds}_{= 0} + \int_{\gamma_2} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds =$$

essendo γ_2^- (verso negativo) parametrizzata come

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \\ z = \sqrt{3} \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$= - \int_0^{2\pi} \left[(\sqrt{3} \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) - \sqrt{3} \cos t \cdot \cos t \right] dt =$$

$$= \sqrt{3} \cdot \int_0^{2\pi} 1\, dt = 2\sqrt{3}\,\pi$$

In alternativa, si può fare il calcolo diretto, essendo

$$\operatorname{rot} \underline{F} = (2x, 0, -2z)$$

ed essendo S parametrizzata come

$$\psi \begin{cases} x = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = 2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = 2\cos\theta \end{cases} \qquad (\theta, \varphi) \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi]$$

ed avendosi

$$\psi_\theta = (2\cos\theta\cos\varphi, \; 2\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \; -2\operatorname{sen}\theta)$$

$$\psi_\varphi = (-2\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi), \; 2\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \; 0)$$

i tre minori dello jacobiano di ψ valgono

$$A(\theta,\varphi) = 4\operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi; \; B(\theta,\varphi) = 4\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\varphi; \; C(\theta,\varphi) = 4\cos\theta\operatorname{sen}\theta$$

(osserviamo che questa orientazione coincide con quella prescritta).

Si ha quindi

$$\iint_S (\operatorname{rot} \underline{F}) \cdot \underline{n} \, d\sigma = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[4\operatorname{sen}\theta\cos\varphi \cdot 4\operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi - 4\cos\theta \cdot 4\cos\theta\operatorname{sen}\theta\right] =$$

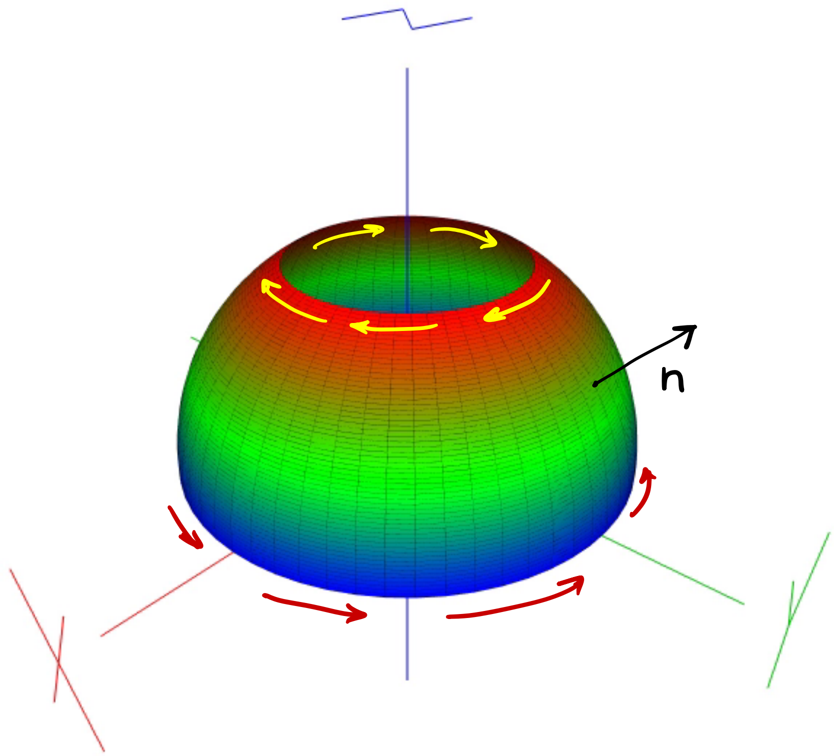
$$= 16 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi/2} d\theta \left[\operatorname{sen}^3\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi}_{= \pi} - \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{= 2\pi}\right] =$$

$$= 16\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \left[\operatorname{sen}^3\theta - 2\cos^2\theta\operatorname{sen}\theta\right] =$$

$$= 16\pi \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\theta \operatorname{sen}\theta \left[1 - 3\cos^2\theta\right] = 16\pi \left(-\cos\theta + \cos^3\theta\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} =$$

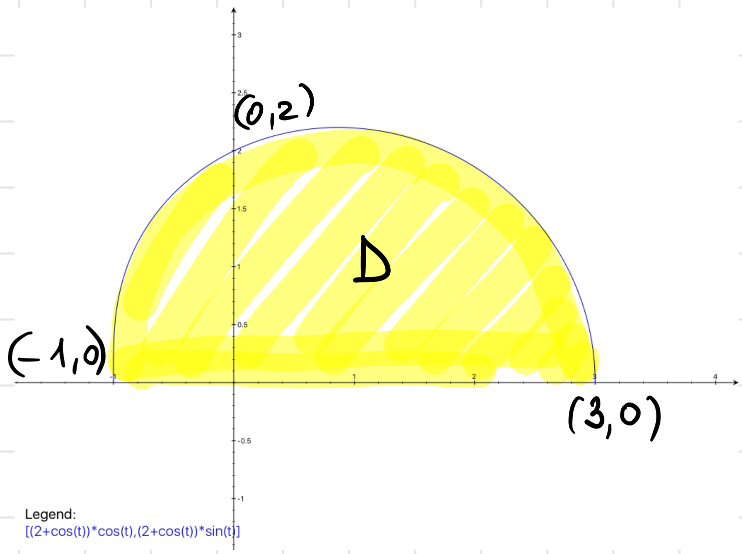
$$= 16\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) = 2\sqrt{3}\pi$$

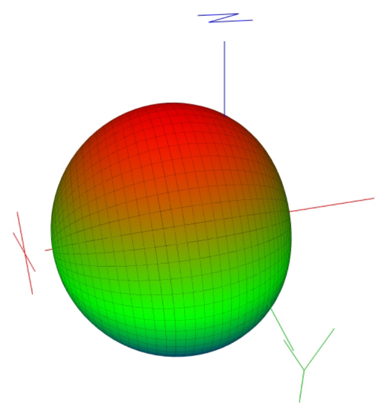
$\square$


n

FILA A

Esercizio 4. Sia D la regione del piano xy delimitata dall'asse x e dall'arco di curva di equazione polare $\rho = 2 + \cos(\theta)$ con $\theta \in [0, \pi]$. Calcolare il volume del solido E ottenuto facendo ruotare D di un giro completo intorno all'asse x.





Per il teorema di Guldino, si ha:

$$\mathrm{Vol}\,E = 2\pi \iint_D y \, dx\,dy = \left[\text{passando a coordinate polari}\right]$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2+\cos\theta} d\rho \; \rho^2 \operatorname{sen}\theta = \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta \, (2+\cos\theta)^3 \, d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{6} \left(-(2+\cos\theta)^4 \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{6} \left(3^4 - 1\right) = \frac{40}{3}\pi$$

FILA A

Esercizio 5. Si consideri il problema di Cauchy

$$y'(t) = \frac{3}{2}\frac{y^{1/3}(t) - y(t)}{1+t^2}, \qquad y(0) = y_0.$$

i. Si assuma $y_0 = 1$. Dire se il problema ammette una o più soluzioni e, in caso, determinarle tutte.
ii. Si assuma $y_0 = 0$. Dire se il problema ammette una o più soluzioni e, in caso, determinarle tutte.

i) Il problema di Cauchy ammette evidentemente la soluzione costante $y(t) \equiv 1$.

Poiché in un piccolo intorno del punto $(t_0, 1)$ la funzione $f(t,y) = \frac{3}{2}\frac{y^{1/3} - y}{1+t^2}$ è di classe C^1, sono soddisfatte le ipotesi del teorema di esistenza e unicità in piccolo, pertanto la soluzione trovata è l'unica possibile.

ii) Anche qui c'è la soluzione costante $y(t) \equiv 0$.

Tuttavia, a causa del termine $y^{1/3}$, non sono verificate le condizioni del teorema di unicità $\Rightarrow$ potrebbero esistere altre soluzioni.

dividendo per $y^{1/3} - y$, si ottiene:

$$\frac{2}{3}\frac{y'}{y^{1/3} - y} = \frac{1}{1+t^2}$$ da cui, integrando in dt:

$$\frac{2}{3}\int \frac{dy}{y^{1/3} - y} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + c$$

$$\parallel$$

$$\frac{2}{3}\int \frac{dy}{y^{1/3}(1 - y^{2/3})} = \quad \left[\text{sost. } 1 - y^{2/3} = s \Rightarrow -\frac{2}{3}y^{-1/3}\,dy = ds\right]$$

$$= -\int \frac{ds}{s} = -\ln|s| = -\ln(1 - y^{2/3})$$ [ho tolto il modulo perché per $y<1$ l'argom. è positivo]

$$\Rightarrow \; -\ln\left(1-y^{2/3}\right) = \operatorname{arctg} t + c$$

Imponendo $y(0)=0$ si ottiene $c=0$

$$\Rightarrow \; 1-y^{2/3} = e^{-\operatorname{arctg} t}$$

$$\Rightarrow \; y^{2/3} = 1-e^{-\operatorname{arctg} t}$$

Osserviamo che deve essere $t \geq 0$ affinché il 2° membro sia >0

$$\Rightarrow \; y = \pm\left(1-e^{-\operatorname{arctg} t}\right)^{3/2}$$

Quindi abbiamo trovato le tre soluzioni:

$$y(t) \equiv 0 \qquad \text{e} \qquad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \\ \pm\left(1-e^{-\operatorname{arctg} t}\right)^{3/2} & \text{per } t>0. \end{cases}$$

In realtà ci sono infinite altre soluzioni, della forma

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq t_0 \\ \pm\left(1-e^{\operatorname{arctg} t_0-\operatorname{arctg} t}\right)^{3/2} & \text{per } t>t_0 \end{cases}$$

$\forall\, t_0>0$.

FILA B

Esercizio 1. Si consideri il problema di Cauchy

$$y'(t) = \frac{3}{2}\frac{y^{1/3}(t) + y(t)}{1+t^2}, \qquad y(0) = y_0 .$$

i. Si assuma $y_0 = -1$. Dire se il problema ammette una o più soluzioni e, in caso, determinarle tutte.
ii. Si assuma $y_0 = 0$. Dire se il problema ammette una o più soluzioni e, in caso, determinarle tutte.

i) Vicino al punto $(t_0, y_0) = (0, -1)$ la funzione $f(t,y) = \frac{3}{2}\frac{y^{1/3}+y}{1+t^2}$ è di classe C^1. Pertanto la soluzione esiste (in piccolo) ed è unica.

Calcoliamola:

$$\frac{2}{3}\frac{y'}{y^{1/3}(1+y^{2/3})} = \frac{1}{1+t^2}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{2}{3}\int \frac{dy}{y^{1/3}(1+y^{2/3})} = \int \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t + c$$

$$\parallel$$

$$\ln(1+y^{2/3})$$

Dalla condizione iniziale si ottiene $c = \ln 2$. Pertanto si ottiene la soluzione

$$1+y^{2/3} = 2e^{\operatorname{arctg} t} \quad \Longrightarrow \quad y = -\left(2e^{\operatorname{arctg} t} - 1\right)$$

ii) Nell'intorno del punto $(0,0)$ la funzione a secondo membro dell'equazione non è localmente lipschitziana rispetto a y. Pertanto l'unicità non è garantita. Infatti esiste la soluzione costante $y(t) \equiv 0$, ma anche le due soluzioni (che si trovano come al punto precedente)

$$y(t) = \pm\left(e^{\operatorname{arctg} t} - 1\right)^{3/2}$$

Anzi, esistono ∞ soluzioni della forma

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq t_0 \\ \pm\left(e^{\operatorname{arctg} t - \operatorname{arctg} t_0} - 1\right)^{3/2} & \text{per } t > t_0, \end{cases}$$

qualunque sia $t_0 > 0$.

FILA B

Esercizio 2. Data la successione di funzioni

$$\phi_n(x) = \frac{x(n^2x^2+3)}{n^2x^2+2} \qquad \text{con } x \in \mathbb{R},$$

i. calcolare il limite puntuale $\phi_\infty(x)$,
ii. determinare gli intervalli in cui ϕ_n converge uniformemente a a ϕ_∞.

i) come prima, si ha $\phi_\infty(x) = x$.

ii) $\phi_n(x) - \phi(x) = \dfrac{x\,(n^2x^2+3)}{n^2x^2+2} - x =$

$$= \frac{x}{n^2x^2+2}\left[n^2x^2+3 - n^2x^2-2\right] = \frac{x}{n^2x^2+2}$$

Poniamo $g_n(x) = \dfrac{x}{n^2x^2+2}$, vogliamo controllare se

$\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |g_n(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Per la parità di $g_n(x)$, basta studiarla per $x>0$.

$$g_n'(x) = \frac{n^2x^2+2-2n^2x^2}{(n^2x^2+2)^2} = \frac{2-n^2x^2}{(n^2x^2+2)^2}$$ ha max. per $x = \frac{\sqrt{2}}{n}$

$$\sup_{[0,1]} g_n(x) = g_n\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right) = \frac{\sqrt{2}}{n}\cdot\frac{1}{4} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Quindi si ha conv. uniforme in tutto $\mathbb{R}$, e ovviamente in ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

FILA B

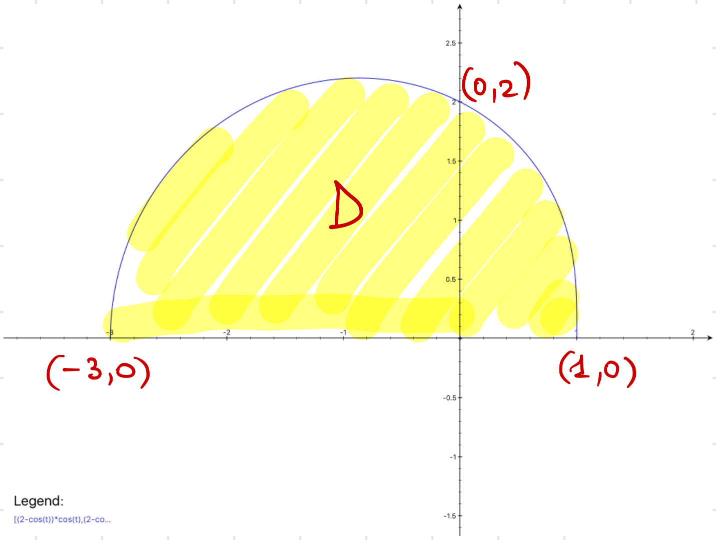
Esercizio 3. Sia D la regione del piano xy delimitata dall'asse x e dall'arco di curva di equazione polare $\rho = 2 - \cos(\theta)$ con $\theta \in [0, \pi]$. Calcolare il volume del solido E ottenuto facendo ruotare D di un giro completo intorno all'asse x.

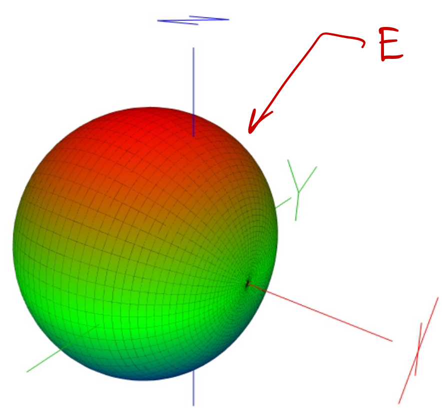
Per Guldino, si ha

$$\mathrm{vol}(E) = 2\pi \iint_D y \, dx\,dy = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2-\cos\theta} d\rho \; \rho^2 \operatorname{sen}\theta =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} d\theta \operatorname{sen}\theta \, (2-\cos\theta)^3 = \left[\begin{array}{ll} \text{sost.} & 2-\cos\theta = t \\ & \operatorname{sen}\theta \, d\theta = dt \end{array} \right]$$

$$= \frac{\pi}{6} (2-\cos\theta)^4 \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{6}(3^4 - 1) = \frac{40\pi}{3}$$





FILAB

Esercizio 4. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F} = (-yz, xz, xy)$ calcolare

$$\int_S (\mathrm{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n})\, d\sigma$$

dove $S \subset \mathbb{R}^3$ è la parte della superficie sferica $\{x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ compresa tra i piani $\{z = -1\}$ e $\{z = 0\}$, dove $\mathbf{n}$ indica l'usuale normale uscente dalla sfera.

1) Usando il teorema di Stokes, basta calcolare

$$\int_{b^+S} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds$$

, dove b^+S è il bordo di S orientato in verso positivo rispetto all'orientazione scelta per la normale

Il bordo è costituito dalla circonferenza

$\gamma_1 = \{x^2 + y^2 = 4,\ z = 0\}$ percorsa in verso orario, vista "dall'alto",

e dalla circonferenza

$\gamma_2 = \{x^2 + y^2 = 3,\ z = -1\}$ percorsa in verso antiorario, vista "dall'alto".

cioè percorsa in verso negativo

γ_1^- si parametrizza come $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = 2\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = 0 \end{cases}$ $\theta \in [0, 2\pi]$

mentre γ_2 si parametrizza come $\begin{cases} x = \sqrt{3}\cos\theta \\ y = \sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = -1 \end{cases}$ $\theta \in [0, 2\pi]$.

Quindi

$$\int_{b^+S} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds = \underbrace{-\int_{\gamma_1^-} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds}_{\overset{!!}{0}} + \int_{\gamma_2} \underline{F} \cdot \underline{T}\, ds =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[(\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta)(-\sqrt{3}\,\mathrm{sen}\,\theta) - \sqrt{3}\cos\theta \cdot (\sqrt{3}\cos\theta) \right] d\theta = -3 \int_0^{2\pi} 1\, d\theta =$$

$$= -6\pi$$

2) In alternativa, si può fare il calcolo diretto:

$(-yz, xz, xy)$

$$\text{rot } F = \det \begin{bmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ -yz & xz & xy \end{bmatrix} = (0, -2y, 2z)$$

Del resto la sfera si parametrizza come

$$\psi \begin{cases} x = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = 2 \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = 2\cos\theta \end{cases} \qquad (\theta, \varphi) \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right] \times [0, 2\pi]$$

ed avendosi

$$\psi_\theta = (2\cos\theta\cos\varphi, \ 2\cos\theta \operatorname{sen}\varphi, \ -2\operatorname{sen}\theta)$$

$$\psi_\varphi = (-2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi), 2\operatorname{sen}\theta\cos\varphi, \ 0)$$

i tre minori dello jacobiano di ψ valgono

$$A(\theta,\varphi) = 4\operatorname{sen}^2\theta\cos\varphi; \ B(\theta,\varphi) = 4\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\varphi; \ C(\theta,\varphi) = 4\cos\theta\operatorname{sen}\theta$$

(osserviamo che questa orientazione coincide con quella prescritta).

L'integrale vale:

$$\int_{\pi/2}^{2\pi/3} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left[(-4\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi)\, 4\operatorname{sen}^2\theta\operatorname{sen}\varphi + 4\cos\theta \cdot 4\cos\theta\operatorname{sen}\theta \right] d\theta =$$

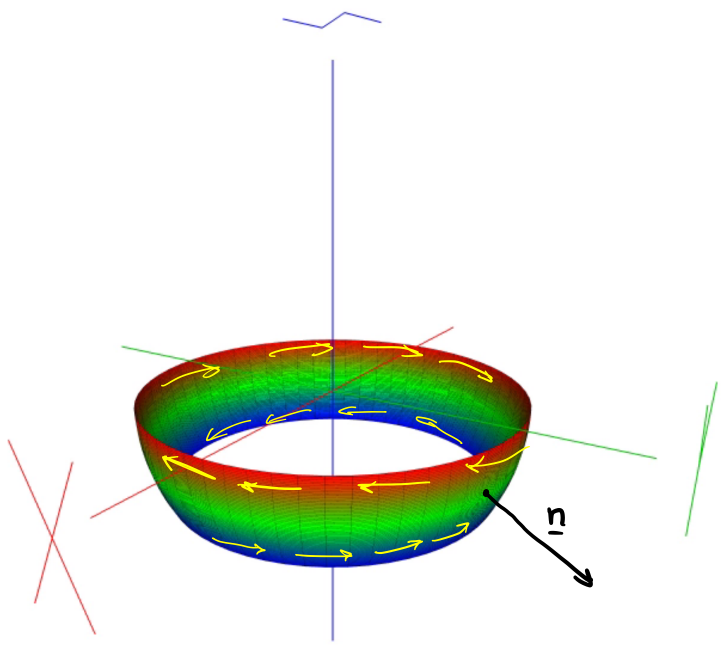
$$= 16 \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \left[-\operatorname{sen}^3\theta \underbrace{\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi}_{\pi} + \cos^2\theta\operatorname{sen}\theta \, 2\pi \right] d\theta =$$

$$= 16\pi \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \left[-\text{sen}^3\theta + 2\cos^2\theta\,\text{sen}\theta \right] d\theta =$$

$$= 16\pi \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \text{sen}\theta \left[3\cos^2\theta - 1 \right] d\theta = \left[\begin{array}{l} \text{sost. } \cos\theta = v \\ -\text{sen}\theta\, d\theta = dv \end{array} \right]$$

$$= 16\pi \left(\cos\theta - \cos^3\theta \right) \Big|_{\pi/2}^{2\pi/3} =$$

$$= 16\pi \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) = -16\pi \frac{3}{8} = -6\pi$$



FILA B

Esercizio 5. Data la funzione

$$f(x,y) = xy^4 + x^4y - 5xy$$

i. trovare e classificare tutti i punti critici della funzione,
ii. trovare massimo e minimo assoluti della funzione nell'insieme $T = \{x \geq 0,\ y \geq 0,\ y^3 + x^3 - 5 \leq 0\}$.

Si ha $f_x(x,y) = y^4 + 4x^3y - 5y = y(y^3 + 4x^3 - 5)$

$f_y(x,y) = 4xy^3 + x^4 - 5x = x(4y^3 + x^3 - 5)$

I pti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y(y^3+4x^3-5) = 0 \\ x(4y^3+x^3-5) = 0 \end{cases}$$, che sono:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Longrightarrow (0,0)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 4y^3+x^3-5 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (+\sqrt[3]{5}, 0)$$

$$\begin{cases} y^3+4x^3-5 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow (0, \sqrt[3]{5})$$

$$\begin{cases} y^3+4x^3-5 = 0 \\ 4y^3+x^3-5 = 0 \end{cases} \Longrightarrow (1,1)$$

Studio i quattro punti critici trovati. Si ha

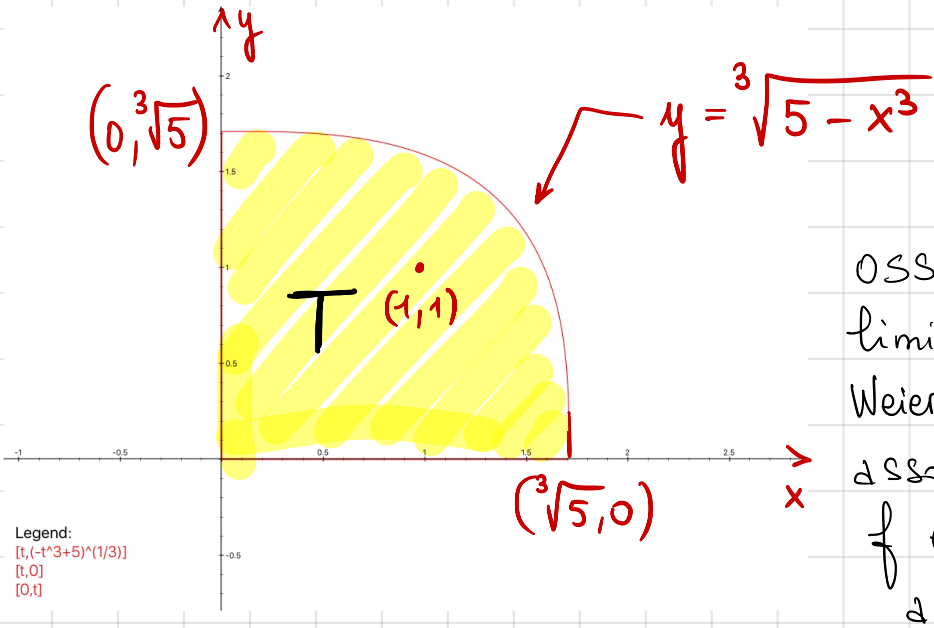
$f_{xx}(x,y) = 12x^2y$; $f_{xy}(x,y) = 4y^3+4x^3-5$; $f_{yy}(x,y) = 12xy^2$.

$$D^2 f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det D^2 f(0,0) < 0 \Rightarrow (0,0) \text{ pto di sella}$$

$$D^2 f(\sqrt[3]{5},0) = \begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 15 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \det D^2 f(\sqrt[3]{5},0) < 0 \Rightarrow (\sqrt[3]{5},0) \text{ pto di sell}$$

$$D^2 f(0,\sqrt[3]{5}) = \begin{bmatrix} 0 & 15 \\ 15 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \det D^2 f(0,\sqrt[3]{5}) < 0 \Rightarrow (0,\sqrt[3]{5}) \text{ pto di sella}$$

$$D^2 f(1,1) = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \det D^2 f(1,1) > 0 \\ f_{xx}(1,1) > 0 \end{array}\right| \Rightarrow (1,1) \text{ pto di minimo relativo.}$$



Osserviamo che T è chiuso e limitato, quindi per il thm. di Weierstrass esistono max. e min. assoluti di f su T.
f è nulla su ∂T, negativa all'interno (si vede dalla fattorizzazione $f(x,y) = xy(y^3 + x^3 - 5)$).

Quindi il massimo è assunto su tutta la frontiera, e vale zero.
Il minimo deve stare nell'unico pto critico interno, cioè (1,1)

$$\min_T f = f(1,1) = -3.$$