Scritto di Analisi Vettoriale (17.02.2016)

Proff. A. Dall'Aglio, F. Lanzara, E. Montefusco

COGNOME e NOME:

MATRICOLA:

DOCENTE: ◯ Dall'Aglio ◯ Lanzara ◯ Montefusco

Se ammesso, sosterrò la prova teorica: ◯ in questo appello ◯ in un appello successivo

Istruzioni: il testo d'esame deve essere riconsegnato insieme all'elaborato, tutti i ragionamenti devono essere adeguatamente spiegati!

Esercizio 1. Data la successione di funzioni

$$\phi_n(x) = \frac{x(n^2x^2+2)}{n^2x^2+1} \qquad \text{con } x \in \mathbb{R},$$

i. calcolare il limite puntuale $\phi_\infty(x)$,
ii. determinare in quali intervalli ϕ_n converge uniformemente a ϕ_∞.

Esercizio 2. Data la funzione

$$f(x,y) = x^4y - xy^4 + 5xy$$

i. trovare e classificare tutti i punti critici della funzione,
ii. trovare massimo e minimo assoluti della funzione nell'insieme $T = \{x \le 0 \le y,\, x^3 - y^3 + 5 \ge 0\}$.

Esercizio 3. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F} = (yz, -xz, xy)$ calcolare

$$\int_S (\mathrm{rot}(\mathbf{F}) \cdot \mathbf{n})\, d\sigma,$$

dove $S \subset \mathbb{R}^3$ è la parte della superficie sferica $\{x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ compresa tra i piani $\{z = 0\}$ e $\{z = \sqrt{3}\}$, dove $\mathbf{n}$ indica l'usuale normale uscente dalla sfera.

Esercizio 4. Sia D la regione del piano xy delimitata dall'asse x e dall'arco di curva di equazione polare $\rho = 2 + \cos(\theta)$ con $\theta \in [0, \pi]$. Calcolare il volume del solido E ottenuto facendo ruotare D di un giro completo intorno all'asse x.

Esercizio 5. Si consideri il problema di Cauchy

$$y'(t) = \frac{3}{2}\frac{y^{1/3}(t) - y(t)}{1 + t^2}, \qquad y(0) = y_0.$$

i. Si assuma $y_0 = 1$. Dire se il problema ammette una o più soluzioni e, in caso, determinarle tutte.
ii. Si assuma $y_0 = 0$. Dire se il problema ammette una o più soluzioni e, in caso, determinarle tutte.

Scritto di Analisi Vettoriale (17.02.2016)
Proff. A. Dall'Aglio, F. Lanzara, E. Montefusco

COGNOME e NOME:

MATRICOLA:

DOCENTE: ○ Dall'Aglio ○ Lanzara ○ Montefusco

Se ammesso, sosterrò la prova teorica: ○ in questo appello ○ in un appello successivo

Istruzioni: il testo d'esame deve essere riconsegnato insieme all'elaborato, tutti i ragionamenti devono essere adeguatamente spiegati!

Esercizio 1. Si consideri il problema di Cauchy

$$y'(t) = \frac{3}{2}\,\frac{y^{1/3}(t) + y(t)}{1+t^2}, \qquad y(0) = y_0\,.$$

i. Si assuma $y_0 = -1$. Dire se il problema ammette una o più soluzioni e, in caso, determinarle tutte.
ii. Si assuma $y_0 = 0$. Dire se il problema ammette una o più soluzioni e, in caso, determinarle tutte.

Esercizio 2. Data la successione di funzioni

$$\phi_n(x) = \frac{x(n^2x^2+3)}{n^2x^2+2} \qquad \text{con } x \in \mathbb{R}\,,$$

i. calcolare il limite puntuale $\phi_\infty(x)$,
ii. determinare gli intervalli in cui ϕ_n converge uniformemente a a ϕ_∞.

Esercizio 3. Sia D la regione del piano xy delimitata dall'asse x e dall'arco di curva di equazione polare $\rho = 2-\cos(\theta)$ con $\theta \in [0,\pi]$. Calcolare il volume del solido E ottenuto facendo ruotare D di un giro completo intorno all'asse x.

Esercizio 4. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F} = (-yz, xz, xy)$ calcolare

$$\int_S (\mathrm{rot}(\mathbf{F})\cdot\mathbf{n})\, d\sigma$$

dove $S \subset \mathbb{R}^3$ è la parte della superficie sferica $\left\{x^2+y^2+z^2=4\right\}$ compresa tra i piani $\{z=-1\}$ e $\{z=0\}$, dove $\mathbf{n}$ indica l'usuale normale uscente dalla sfera.

Esercizio 5. Data la funzione

$$f(x,y) = xy^4 + x^4y - 5xy$$

i. trovare e classificare tutti i punti critici della funzione,
ii. trovare massimo e minimo assoluti della funzione nell'insieme $T = \{x \ge 0\,,\ y \ge 0\,,\ y^3 + x^3 - 5 \le 0\}$.