Cognome e nome .... **N. matricola** ....
Se ammesso, desidererei sostenere la prova teorica:
◯ 28–29 gennaio (solo poche persone) ◯ 4–5 febbraio ◯ 11–12 febbraio ◯ 18–19 febbraio.

Note ....

ISTRUZIONI

1. Compilare la parte soprastante.
2. **Svolgere i seguenti esercizi,** motivando le risposte in modo chiaro ed esauriente. Nel caso di dubbi sul testo, chiedere chiarimenti al docente. Non è consentito l'uso di strumenti elettronici di calcolo, appunti, libri di esercizi. E' consentito l'uso di libri di testo e formulari.
3. Al termine del tempo disponibile, riconsegnare l'elaborato **scritto in modo chiaro e leggibile** insieme a questo foglio. Scrivere nome e cognome **su ogni foglio** che si consegna.

---

1. Determinare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione 2π-periodica che nell'intervallo $(-\pi, \pi]$ vale $2 + x|x|$, precisando il valore della somma della serie in ogni punto di $\mathbb{R}$.

---

2. Sia dato un rettangolo R di lati x e y soggetti alla condizione

$$x^2 + 4y^2 + 2xy \leq 1$$

Si dimostri che esiste un rettangolo di area massima, e lo si determini.

---

3. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = \big(x^3, y^3 + z^2, z\big)$ uscente dalla superficie del solido delimitato dalle equazioni $\{x^2 + y^2 = 1\}$, $\{z = 0\}$ e $\{z = x + 2\}$.

---

4. Con un opportuno cambiamento di variabili si calcoli il seguente integrale

$$\iint_D e^{4x} dxdy$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{2x} \leq y \leq e^{2x} + 1,\ 2 - e^{2x} \leq y \leq 3 - e^{2x}\}$.

---

5. Trovare <u>tutte</u> le soluzioni del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (y''(t))^2 - (y'(t))^2 y''(t) - y'(t)y''(t) = 0 \\ y(0) = 0 \qquad y'(0) = 1 \end{cases}$$

Punteggi: 1: 7 punti; **2:** 7 punti; **3:** 7 punti; **4:** 7 punti; **5:** 8 punti. Per essere ammessi alla prova di teoria occorrono 15 punti. Valgono anche punteggi parziali.

ESERCIZIO 1

La funzione $f(x) = 2 + |x|x$ è la somma di una costante e di una funzione dispari. Pertanto i coefficienti di Fourier valgono:

$$\frac{a_0}{2} = 2$$

$$a_k = 0 \qquad \forall k = 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x|\, x \,\mathrm{sen}(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \,\mathrm{sen}(kx)\,dx = \text{[per parti]}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\underbrace{-\frac{1}{k}x^2\cos(kx)\Big|_0^{\pi}}_{= -\frac{1}{k}\pi^2\cos(k\pi) = \frac{\pi^2}{k}(-1)^{k+1}} + \frac{2}{k}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,dx \right] = \text{[di nuovo per parti]}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[(-1)^{k+1}\frac{\pi^2}{k} + \underbrace{\frac{2}{k^2}\, x\,\mathrm{sen}(kx)\Big|_0^{\pi}}_{= 0} - \frac{2}{k^2}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}(kx)\,dx \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[(-1)^{k+1}\frac{\pi^2}{k} + \frac{2}{k^3}\cos(kx)\Big|_0^{\pi} \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[(-1)^{k+1}\frac{\pi^2}{k} + \frac{2}{k^3}\left[(-1)^k - 1\right] \right] =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{2\pi}{k} & \text{se } k \text{ è pari} \\[2ex] \dfrac{2\pi}{k} - \dfrac{8}{\pi k^3} & \text{se } k \text{ è dispari} \end{cases}$$

Quindi la serie di Fourier cercata è

$$2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \operatorname{sen}(kx), \quad \text{dove } b_k \text{ è come indicato sopra.}$$

La somma di questa serie è la funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$ che nell' intervallo $(-\pi, \pi]$ vale

$$\begin{cases} 2 + x|x| & \text{per } x \in (-\pi, \pi) \text{ essendo questi punti in cui } f \text{ è continua} \\ 2 & \text{se } x = \pi \end{cases}$$

(2 è il valore medio dei limiti da destra e da sinistra, essendo

$$f(\pi^-) = \lim_{x \to \pi^-} f(x) = 2 + \pi^2$$

$$f(\pi^+) = \lim_{x \to \pi^+} f(x) = \lim_{x \to (-\pi)^+} f(x) = 2 - \pi^2$$

e quindi $\dfrac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = 2.$)

ESERCIZIO 2

$$D = \{(x,y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + 4y^2 + 2xy \leq 1\}$$

D è chiuso, ed è limitato in quanto

$1 \geq x^2 + 4y^2 + 2xy \geq x^2 + 4y^2$, quindi sia x che y sono limitate.

Quindi max. e minimo esistono sicuramente per Weierstrass

La funzione da massimizzare è $f(x,y) = xy$.

L'unico pto critico è l'origine (che ovviamente è punto di minimo e sta sulla frontiera di D).

Il minimo è ovviamente assunto su tutti i lati $x=0$ e $y=0$.

Cerchiamo il massimo assoluto sul vincolo $x^2 + 4y^2 + 2xy = 1$.

Moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} y = \lambda(2x + 2y) \\ x = \lambda(8y + 2x) \\ x^2 + 4y^2 + 2xy = 1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{y}{x+y} = \frac{x}{4y+x} \Rightarrow 4y^2 + \cancel{xy} = x^2 + \cancel{xy}$$

$$\Longrightarrow x = \pm 2y \Rightarrow x = 2y$$

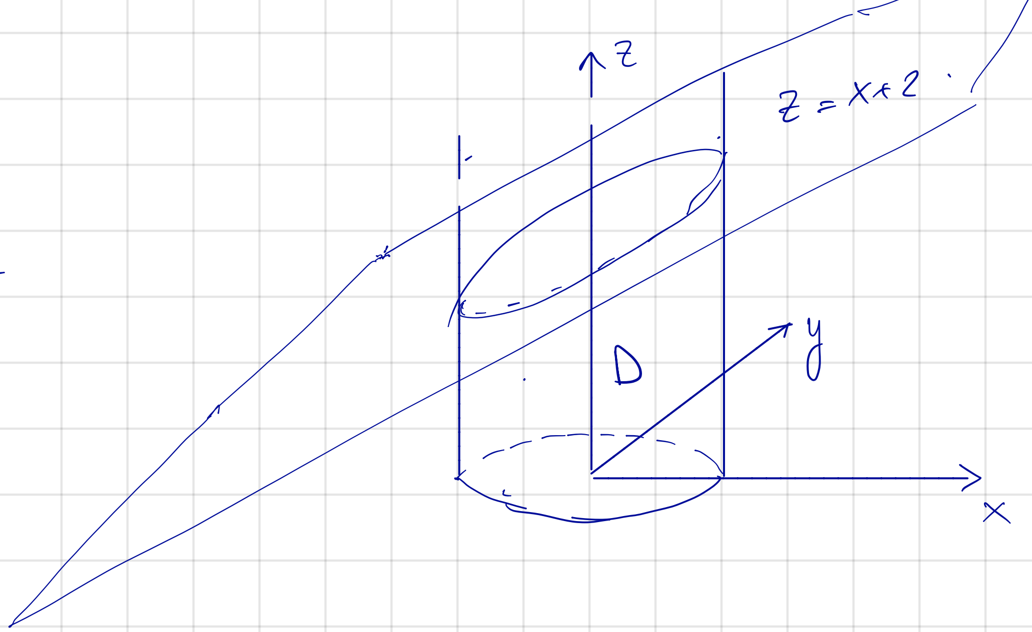
$$\Longrightarrow 4y^2 + 4y^2 + 4y^2 = 1 \Longrightarrow y = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\max_D f = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{6}.$$

Esercizio 3

$\underline{F}(x,y,z) = (x^3, y^3+z^2, z)$

$x^2+y^2=1, \quad z=0, \quad z=x+2$



$\text{div } \underline{F} = 3x^2+3y^2+1.$

Quindi Flusso $= \iiint_D (3x^2+3y^2+1)\,dx\,dy\,dz$ (coord. cilindriche)

termine a media nulla

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_0^{2+\rho\cos\theta} dz\,(3\rho^2+1)\rho = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho\,(3\rho^2+1)\rho\,[2+\rho\cos\theta] =$$

$$= 4\pi \int_0^1 d\rho\,(3\rho^2+1)\rho = \frac{\pi}{3}(3\rho^2+1)^2\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}[16-1] = 5\pi.$$

ESERCIZIO 4

$$2e^{2x} = v-u$$

$$\iint_D e^{4x}\,dx\,dy$$

$$D = \left\{ e^{2x} \le y \le e^{2x}+1 \,,\quad 2-e^{2x} \le y \le 3-e^{2x} \right\}$$

Il disegno dell'insieme si trova alla pagina successiva.

Poniamo $\begin{cases} y-e^{2x}=u \\ y+e^{2x}=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{v-u}{2}\right) \\ y = \frac{u+v}{2} \end{cases}$ $\qquad (u,v)\in[0,1]\times[2,3]$

$$\det \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\frac{1}{v-u} & \frac{1}{2}\frac{1}{v-u} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{1}{v-u}$$

il denominatore non si annulla mai!

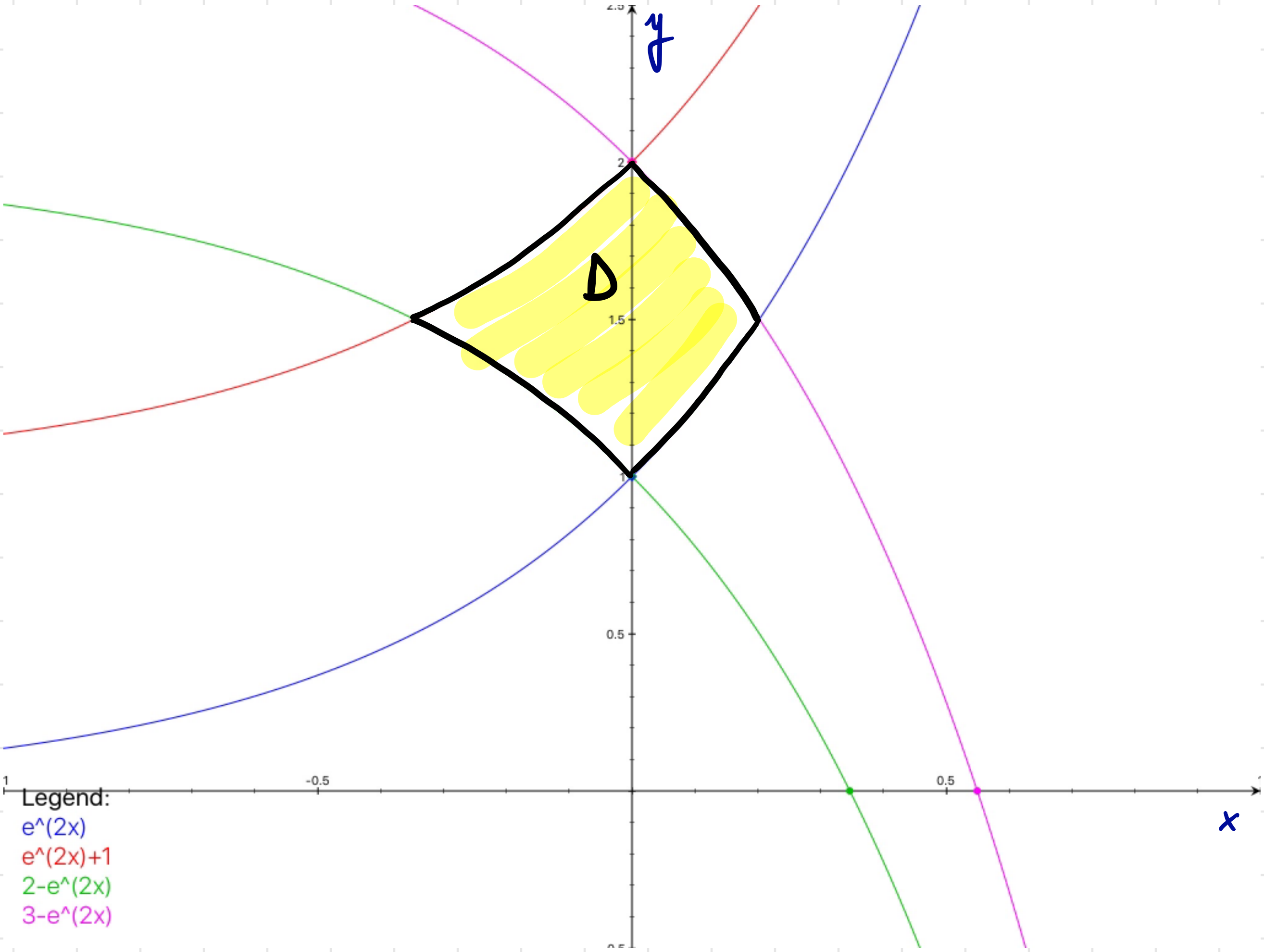
il suo valore assoluto vale $\dfrac{1}{2(v-u)}$

$$\boxed{e^{2x} = \frac{v-u}{2}}$$

$$\int_0^1 du \int_2^3 dv\, \frac{(v-u)^2}{4}\,\frac{1}{2(v-u)} = \frac{1}{8}\int_0^1 du \int_2^3 dv\,(v-u) =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 du\, \frac{(v-u)^2}{2}\Bigg|_{v=2}^{v=3} = \frac{1}{16}\int_0^1 du\,\left[(3-u)^2-(2-u)^2\right] = \frac{1}{16}\int_0^1 (5-2u)\,du$$

$$= \frac{1}{16}(5-1) = \frac{1}{4}$$


y
x
D
Legend:
e^(2x)
e^(2x)+1
2-e^(2x)
3-e^(2x)

ESERCIZIO 5

$$\begin{cases} (y'')^2 - (y')^2 y'' - y' y'' = 0 \\ y(0) = 0 ; \; y'(0) = 1 \end{cases} .$$

$$\Rightarrow y'' \left[y'' - (y')^2 - y' \right] = 0$$

$y'' = 0 \Rightarrow$ soluzione $y(x) = x$.

oppure $y'' - (y')^2 - y' = 0$ Ponendo $v = y'$

$$\Rightarrow \begin{cases} v' = v + v^2 \\ v(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{dv}{v+v^2} = x + c$$

$$\int \frac{dv}{v+v^2} = \int \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{1+v} \right) dv =$$

$$\frac{1}{v+v^2} = \frac{A}{v} + \frac{B}{1+v} \Rightarrow 1 = A(1+v) + Bv \Rightarrow \begin{cases} B = -A \\ 1 = A = -B \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \ln \left| \frac{v}{1+v} \right| = x + c$$

$\dfrac{v}{1+v} = k e^x$ con la cond^{ne} iniziale si ottiene $k = \dfrac{1}{2}$.

$$\frac{v}{1+v} = \frac{e^x}{2} \Rightarrow 2v = e^x (1+v) \Rightarrow v(2 - e^x) = e^x$$

$$v = \frac{e^x}{2-e^x} \Rightarrow y' = \frac{e^x}{2-e^x}$$

$$\Rightarrow y(x) = \int \frac{e^x}{2-e^x} dx = \int \frac{dt}{2-t} = -\ln|2-e^x| + c \Rightarrow y(x) = -\ln(2-e^x)$$

$e^x = t$

C.I $\Rightarrow 0 = c$

Quindi il problema di Cauchy ammette due soluzioni:

$$y(x) = x$$

$$y(x) = -\ln(2 - e^x)$$

Non c'è unicità in quanto l'eq^{ne} non è in forma normale.