Scritto di Analisi Vettoriale (26.01.2016)

Proff. A. Dall'Aglio, F. Lanzara, E. Montefusco

COGNOME e NOME:

MATRICOLA:

DOCENTE: ◯ Dall'Aglio ◯ Lanzara ◯ Montefusco

Se ammesso, sosterrò la prova teorica: ◯ nel 1^o appello ◯ in un appello successivo

Istruzioni: il testo d'esame deve essere riconsegnato insieme all'elaborato, tutti i ragionamenti devono essere adeguatamente motivati!

Esercizio 1. Data la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \ln\left(1+\frac{2}{k}\right)(x-3)^{2k}$$

studiare la convergenza semplice, assoluta, uniforme e totale. Dire su quali intervalli è possibile applicare la formula di integrazione per serie.

Esercizio 2. Sia dato un rettangolo R di lati x e y soggetti alla condizione

$$x^2+4y^2+2xy \le 1$$

Si dimostri che esiste un rettangolo di area massima, e lo si determini.

Esercizio 3. Calcolare il flusso del campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y,z)=\left(x^3, y^3+z^2, z\right)$ uscente dalla superficie del solido delimitato dalle equazioni $\{x^2+y^2=1\}$, $\{z=0\}$ e $\{z=x+2\}$.

Esercizio 4. Con un opportuno cambiamento di variabili si calcoli il seguente integrale

$$\iint_D e^{4x}\,dx\,dy$$

dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : e^{2x}\le y\le e^{2x}+1,\ 2-e^{2x}\le y\le 3-e^{2x}\}$.

Esercizio 5. Trovare <u>tutte</u> le soluzioni del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases}(y''(t))^2-(y'(t))^2y''(t)-y'(t)y''(t)=0\\ y(0)=0 \qquad y'(0)=1\end{cases}$$

Esercizio 1

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln\left(1+\frac{2}{k}\right)(x-3)^{2k}$$

Poniamo $(x-3)^2 = y$.

$$\Longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln\left(1+\frac{2}{k}\right) y^k.$$

Si tratta di una serie di potenze.

Raggio di convergenza:

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\ln\left(1+\frac{2}{k+1}\right)}{\ln\left(1+\frac{2}{k}\right)}\right| \sim \frac{2}{k+1}\,\frac{k}{2} \longrightarrow 1 \Rightarrow R=1.$$

Negli estremi: $y=1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln\left(1+\frac{2}{k}\right)$$ converge per Leibniz (ma non assolutamente)

$y=-1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{2}{k}\right)$$ diverge

Quindi la serie converge puntualmente in (nella y) $(-1,1]$

converge assolutamente in $(-1,1)$ (non in $y=1$)

converge uniformemente (per Abel) in $(-\alpha, 1]$ $\forall\, \alpha \in (0,1)$

converge totalmente in $(-\alpha, \alpha)$ $\forall\, \alpha \in (0,1)$

non converge totalmente in $(-\alpha, 1]$

altrimenti convergerebbe assolutamente in $y=1$

Tornando alla x:

la serie converge puntualmente in $[2,4]$

converge assolutamente in $(2,4)$ (non negli estremi)

converge uniformemente in $[2,4]$.

converge totalmente in $[3-\alpha, 3+\alpha]$ $\forall \alpha \in (0,1)$

non converge totalmente in nessun intervallo che abbia 2, o 4 come estremo.

La formula di integrazione per serie si applica in tutto $[2,4]$ (e sottointervalli) in quanto si ha conv. uniforme.

Nel nostro caso la formula diventa; detta $S(x)$ la somma della serie:

$$\int_3^x S(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln\left(1+\frac{2}{k}\right)(x-3)^{2k+1}}{(2k+1)}$$

ESERCIZIO 2

$$D = \{(x,y): x \geq 0, y \geq 0, x^2+4y^2+2xy \leq 1\}$$

D è chiuso, ed è limitato in quanto

$1 \geq x^2+4y^2+2xy \geq x^2+4y^2$, quindi sia x che y sono limitate.

Quindi max. e minimo esistono sicuramente per Weierstrass

La funzione da massimizzare è $f(x,y) = xy$.

L'unico pto critico è l'origine (che ovviamente è punto di minimo e sta sulla frontiera di D).

Il minimo è ovviamente assunto su tutti i lati $x=0$ e $y=0$.

Cerchiamo il massimo assoluto sul vincolo $x^2+4y^2+2xy=1$.

Moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} y = \lambda(2x+2y) \\ x = \lambda(8y+2x) \\ x^2+4y^2+2xy = 1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{y}{x+y} = \frac{x}{4y+x} \Rightarrow 4y^2+\cancel{xy} = x^2+\cancel{xy}$$

$$\Longrightarrow x = \pm 2y \Rightarrow x = 2y$$

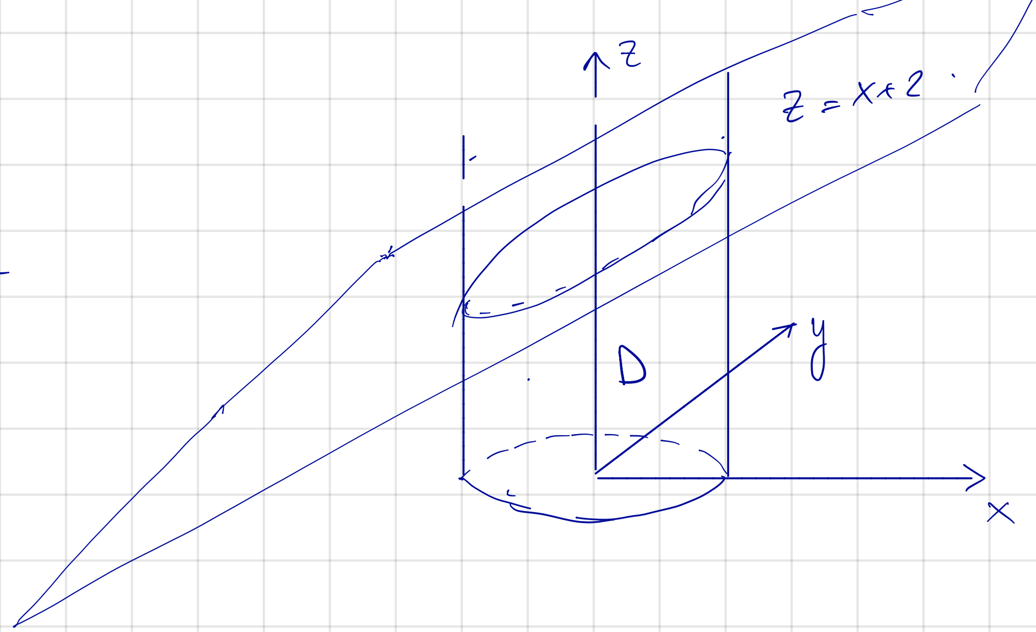
$$\Longrightarrow 4y^2+4y^2+4y^2 = 1 \Longrightarrow y = \frac{1}{2\sqrt{3}} \Longrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\max_D f = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{6}.$$

Esercizio 3

$\underline{F}(x,y,z) = (x^3, y^3+z^2, z)$

$x^2+y^2=1, \quad z=0, \quad z=x+2$



$$\operatorname{div} F = 3x^2+3y^2+1.$$

Quindi Flusso $= \iiint_D (3x^2+3y^2+1)\,dx\,dy\,dz$ (coord. cilindriche)

termine a media nulla

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho \int_0^{2+\rho\cos\theta} dz\,(3\rho^2+1)\rho = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 d\rho\,(3\rho^2+1)\rho\,\left[2+\rho\cos\theta\right] =$$

$$= 4\pi \int_0^1 d\rho\,(3\rho^2+1)\rho = \frac{\pi}{3}\,(3\rho^2+1)^2\Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}\left[16-1\right] = 5\pi.$$

ESERCIZIO 4

$$2e^{2x} = v-u$$

$$\iint_D e^{4x}\,dx\,dy$$

$$D = \{e^{2x} \le y \le e^{2x}+1 , \quad 2-e^{2x} \le y \le 3-e^{2x}\}$$

Il disegno dell'insieme si trova alla pagina successiva.

Poniamo $\begin{cases} y-e^{2x}=u \\ y+e^{2x}=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{v-u}{2}\right) \\ y=\frac{u+v}{2} \end{cases}$ $\qquad (u,v)\in[0,1]\times[2,3]$

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\frac{1}{v-u} & \frac{1}{2}\frac{1}{v-u} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{1}{v-u}$$

il denominatore non si annulla mai!

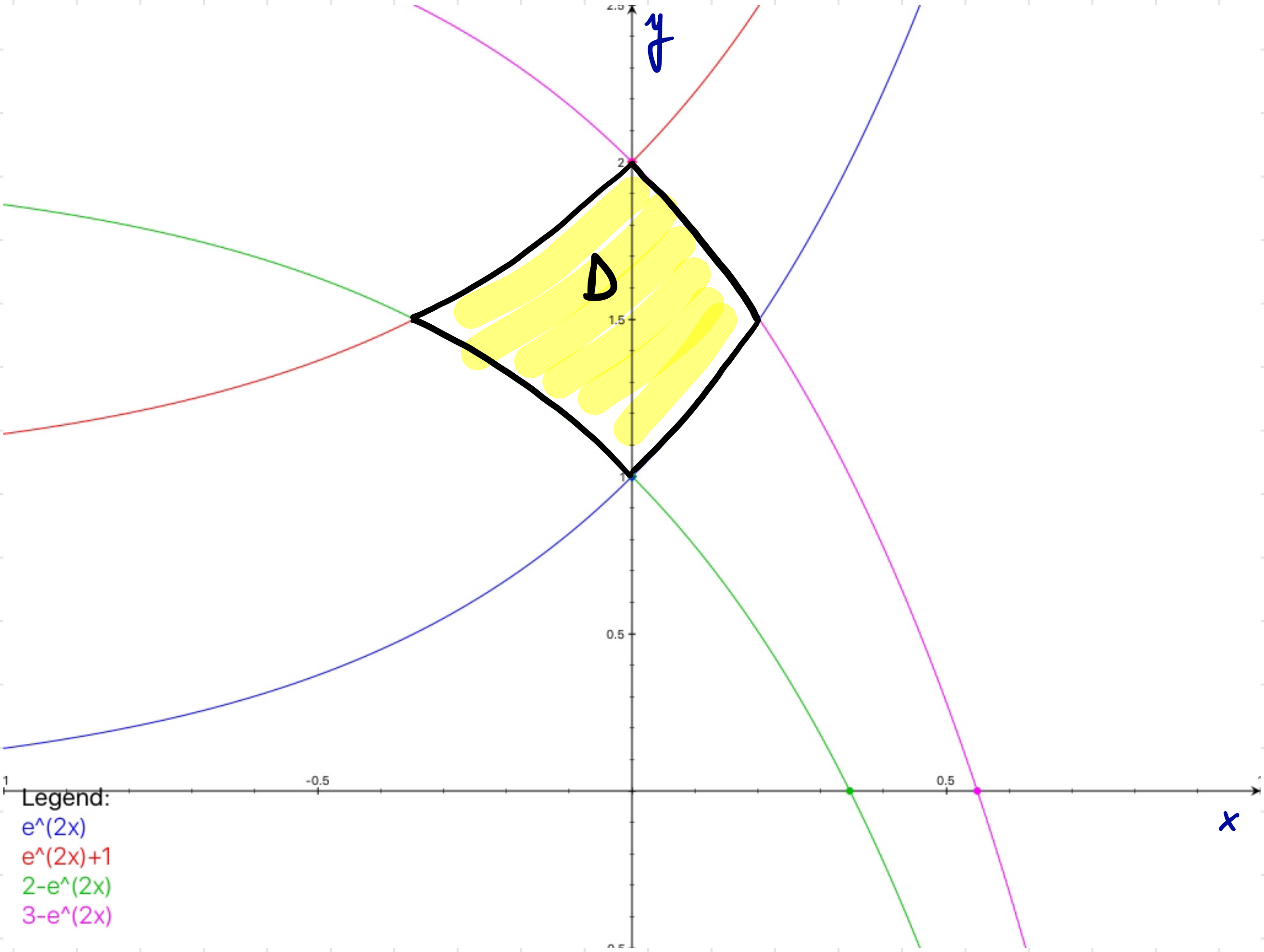
il suo valore assoluto vale $\frac{1}{2(v-u)}$

$$\boxed{e^{2x} = \frac{v-u}{2}}$$

$$\int_0^1 du \int_2^3 dv\ \frac{(v-u)^2}{4}\frac{1}{2(v-u)} = \frac{1}{8}\int_0^1 du\int_2^3 dv\,(v-u) =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 du\ \frac{(v-u)^2}{2}\Bigg|_{v=2}^{v=3} = \frac{1}{16}\int_0^1 du\,[(3-u)^2-(2-u)^2] = \frac{1}{16}\int_0^1 (5-2u)\,du$$

$$= \frac{1}{16}(5-1) = \frac{1}{4}$$



y
2
1.5
1
0.5
-0.5
0.5
x
D
Legend:
e^(2x)
e^(2x)+1
2-e^(2x)
3-e^(2x)

ESERCIZIO 5

$$\begin{cases} (y'')^2 - (y')^2 y'' - y' y'' = 0 \\ y(0) = 0 \, ; \; y'(0) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y'' \left[y'' - (y')^2 - y' \right] = 0$$

$y'' = 0 \Rightarrow$ soluzione $y(x) = x$.

oppure $y'' - (y')^2 - y' = 0$ Ponendo $v = y'$

$$\Rightarrow \begin{cases} v' = v + v^2 \\ v(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \int \frac{dv}{v+v^2} = x + c$$

$$\int \left(\frac{A}{v} + \frac{B}{1+v} \right) dv =$$

$$\frac{1}{v+v^2} = \frac{A}{v} + \frac{B}{1+v} \Rightarrow 1 = A(1+v) + Bv \Rightarrow \begin{cases} B = -A \\ 1 = A = -B \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ln \left| \frac{v}{1+v} \right| = x + c$$

$\dfrac{v}{1+v} = k e^x$ con la cond^{ne} iniziale si ottiene $k = \dfrac{1}{2}$.

$$\frac{v}{1+v} = \frac{e^x}{2} \Rightarrow 2v = e^x(1+v) \Rightarrow v(2-e^x) = e^x$$

$$v = \frac{e^x}{2-e^x} \Rightarrow y' = \frac{e^x}{2-e^x}$$

$$\Rightarrow y(x) = \int \frac{e^x}{2-e^x} dx = \int \frac{dt}{2-t} = -\ln|2-e^x| + c \Rightarrow y(x) = -\ln(2-e^x)$$

$e^x = t$

$\underline{C.I} \Rightarrow 0 = c$

Quindi il problema di Cauchy ammette due soluzioni:

$$y(x) = x$$

$$y(x) = -\ln(2 - e^x)$$

Non c'è unicità in quanto l'eq^{ne} non è in forma normale.