SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Corso di Laurea in Biotecnologie Agro–Industriali
Prova scritta di Fisica - A.A. 2015-16 - 29 gennaio 2016

(1) Un fascio di protoni entra in una regione di spessore $d = 4.0 \times 10^{-2}$ m in cui è presente un campo magnetico d'intensità $B = 0.20$ T. La direzione del campo è perpendicolare alla velocità iniziale del protone. Calcola la velocità minima che devono avere i protoni per superare la regione ed emergere dall'altro lato. La massa del protone è $m = 1.67 \times 10^{-27}$ kg.

(2) Due altoparlanti sono azionati dallo stesso oscillatore a 800 Hz e distano 1.25 m l'uno dall'altro. Sapendo che la velocità del suono in aria, nelle condizioni dell'esperimento, è di 343 m/s, trovare i punti lungo la congiungente gli altoparlanti in cui l'intensità sonora è minima.

(3) All'estremità di una molla di lunghezza a riposo $\ell_0 = 10$ cm disposta verticalmente si appoggia una pallina di massa $m = 20$ g, inizialmente tenuta ferma. Nel momento in cui si rilascia la pallina, la molla inizia a oscillare, ma dopo un po' si ferma rimanendo contratta a una lunghezza pari a 3/4 di quella iniziale. Quanta energia è dissipata durante il processo che ha inizio col rilascio della pallina?

(1) Per cercare di trovare una soluzione analizziamo quel che accade in questi casi. Procedendo nell'analisi comparirà, da qualche parte, una grandezza utile a risolvere il problema.

Quando particelle cariche si muovono in regioni nelle quali è presente un campo magnetico $\mathbf{B}$ subiscono la **Forza di Lorentz F** la cui espressione è

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}\,,$$

dove $\mathbf{v}$ è il vettore velocità della particella e q la sua carica. Il simbolo $\times$ rappresenta il **prodotto vettoriale** che restituisce un vettore di modulo pari

$$F = qvB \sin\theta$$

in cui θ è l'angolo formato dai vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{B}$. Il vettore risultante è perpendicolare a questi due e il verso si trova con la regola della mano destra: si dispone il pollice destro in modo che sia diretto come $\mathbf{v}$ e le altre dita della mano in direzione di $\mathbf{B}$. Il vettore $\mathbf{F}$ è cosí uscente dal palmo della mano.

Nel caso in esame quel che accade dunque è che, immaginando che i protoni si muovano verso destra e che il campo sia entrante nel piano del foglio, la forza di Lorentz è rivolta verso l'alto. La presenza di questa forza cambia la velocità del protone, ma solo in direzione e verso. Essendo infatti la forza perpendicolare alla velocità risulta essere centripeta e dà origine a una traiettoria circolare, il cui raggio si può stimare come segue.

Mettendoci nel sistema di riferimento del protone, vedremmo due forze: quella di Lorentz e quella *centrifuga*, pari in modulo a

$$F_c = m\frac{v^2}{R}$$

essendo R il raggio di curvatura della traiettoria e m la massa del protone. In questo sistema di riferimento il protone è fermo quindi le due forze devono essere uguali e contrarie. Poiché la velocità del protone, pur cambiando direzione, si mantiene perpendicolare a $\mathbf{B}$ il modulo della forza di Lorentz è costante e vale $F = qvB$. Abbiamo allora che

$$qvB = m\frac{v^2}{R}$$

da cui si ricava che

$$R = \frac{mv}{qB}\,.$$

Affinché il protone riesca a superare la prima regione è evidente che il raggio di curvatura dev'essere superiore allo spessore della regione, perciò dobbiamo avere che

$$\frac{mv}{qB} > d$$

ossia

$$v > \frac{qBd}{m} = \frac{1.6 \times 10^{-19} \times 0.2 \times 4 \times 10^{-2}}{1.67 \times 10^{-27}} \simeq 7.7 \times 10^5\,\mathrm{ms}^{-1}\,.$$

(2) In questo caso abbiamo due onde che si propagano in versi opposti dai due altoparlanti. In questi casi quel che accade è che le onde interferiscono e si possono produrre massimi e minimi d'interferenza in punti diversi, secondo la fase relativa tra le onde. Si potrebbero quindi scrivere le espressioni delle due onde, sommarle e cercare i punti in cui tale somma è minima (in valore assoluto). Ciascuna onda si scrive come

$$y = A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$$

dove x rappresenta la distanza da uno degli altoparlanti. L'espressione tra parentesi si ricava osservando che deve rappresentare un angolo, che è una frazione dell'angolo giro 2π. Tale frazione dev'essere espressa da un numero adimensionale proporzionale a x per ottenere il quale basta dividerlo per un'altra lunghezza in modo tale che l'angolo 2π corrisponda a una lunghezza d'onda.

Se prendiamo come origine del sistema di riferimento l'altoparlante a sinistra, l'onda risultante si scrive come

$$y = A\cos\left(2\pi\frac{x}{\lambda}\right) + A\cos\left(2\pi\frac{L-x}{\lambda}\right)$$

dove L rappresenta la distanza tra gli altoparlanti. Nei casi in cui si ha interferenza tra onde uguali si ha sempre la somma di due seni o di due coseni che si riscrive usando le formule di prostaferesi. Per trovare massimi e minimi però non è necessario ricordare sempre esattamente la formula giusta. Basta ricordare che nell'argomento delle funzioni trigonometriche compare sempre la semisomma e la semidifferenza degli angoli:

$$S = \frac{1}{2}\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + 2\pi\frac{L-x}{\lambda}\right) = \frac{\pi}{\lambda}L$$

e

$$D = \frac{1}{2}\left(2\pi\frac{x}{\lambda} - 2\pi\frac{L-x}{\lambda}\right) = \frac{\pi}{\lambda}(2x-L)\ .$$

S non dipende da x perciò non può essere questa a determinare l'ampiezza dell'onda risultante. L'ampiezza è minima quando la funzione trigonometrica che ha come argomento D assume il valore assoluto minimo che è 0. Se la funzione è un seno questo si verifica per $D = k\pi$. Se è un coseno per $D = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ con n intero.

Poiché le due onde sono in fase, quando s'incontrano al centro si devono sommare perciò per $x = L/2$, in cui

$$D = \frac{\pi}{\lambda}\left(2\frac{L}{2} - L\right) = 0$$

l'onda risultante deve assumere il valore massimo possibile. Quando l'argomento della funzione è zero, questa è massima se è un coseno, perciò l'onda risultante è modulata secondo il coseno di D. Si annulla, quindi, quando

$$D = \frac{\pi}{\lambda}(2x-L) = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

cioè quando

$$x = (2n+1)\frac{\lambda}{4} + \frac{L}{2}\,.$$

La lunghezza d'onda si ricava dalla relazione esistente tra la velocità di propagazione v e la frequenza $f = 1/T$ dove T è il periodo dell'onda che si misura in secondi. Poiché la velocità si misura in metri al secondo è facile ricordare che

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f\,,$$

da cui ricaviamo

$$\lambda = \frac{v}{f}\,.$$

Per $n = 0$ allora abbiamo

$$x = \frac{v}{4f} + \frac{L}{2} = \frac{343}{4 \times 800} + \frac{1.25}{2} = 0.732\,\mathrm{m}\,.$$

Per $n = 1$

$$x = 3\frac{v}{4f} + \frac{L}{2} = 0.947\,\mathrm{m}\,,$$

Con $n = 2$ si trova $x = 1.16$ m mentre per $n \geq 3$ si avrebbe $x > L$.

Osservate anche che avremmo potuto trovare la soluzione facilmente se avessimo ricordato che due onde uguali che viaggiano nella stessa direzione in versi opposti danno luogo a **onde stazionarie**. Ma invece di ricordare le espressioni per situazioni speciali conviene spesso ricavare quello di cui abbiamo bisogno al momento, anche perché non possiamo essere certi che sapremmo ricordare correttamente le relazioni che intercorrono tra le grandezze che caratterizzano un'onda stazionaria (come il fatto che la distanza tra due massimi successivi è sempre pari a $\lambda/2$).

Dato che la lunghezza d'onda in questione è di quasi 43 cm è difficile percepire questo fenomeno con le nostre orecchie che sono troppo grandi e distanti. Con uno smartphone e un programma per misurare l'intensità dei suoni però si riesce a fare l'esperimento abbastanza bene.

(3) Cambiamo subito le unità di misura per cui $\ell_0 = 0.1$ m e $m = 20 \times 10^{-3}$ kg.

Nello stato iniziale la molla non è compressa e l'energia potenziale della molla vale zero. La pallina invece si trova alla quota ℓ_0 e quindi ha un'energia potenziale $mg\ell_0$. Nello stato finale invece l'energia potenziale della molla vale $\frac{1}{2}k\Delta\ell^2$ e quella della pallina è mgh. In queste espressioni $\Delta\ell = \ell_0 - h$, con $h = \frac{3}{4}\ell_0$.

Abbiamo perciò che la differenza tra l'energia finale e quella iniziale vale

$$\Delta E = \frac{1}{2}k\left(\ell_0 - \frac{3}{4}\ell_0\right)^2 + \frac{3}{4}mg\ell_0 - mg\ell_0\,.$$

Raccogliendo ℓ_0 ed eseguendo le somme otteniamo

$$\Delta E = \frac{1}{4}\ell_0\left(\frac{1}{8}k\ell_0 - mg\right)\,.$$

D'altra parte nella situazione di equilibrio finale dev'essere

$$mg = k\left(\ell_0 - \frac{3}{4}\ell_0\right) = \frac{1}{4}k\ell_0$$

e pertanto

$$\Delta E = \frac{1}{4}\ell_0\left(\frac{1}{2}mg - mg\right) = -\frac{1}{8}mg\ell_0$$

(la variazione è negativa perché l'energia è persa). Sostituendo i valori dati si ottiene

$$\Delta E = -\frac{1}{8}20 \times 10^{-3} \times 9.8 \times 0.1 = 0.00245 = 2.45 \times 10^{-3}\,\mathrm{J}\,.$$